NOTA II.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XI (1° sem. 1902),
pp. 191-198 (*).

## 5. - Caso del campo dovuto ad una corrente sinusoidale parallela allo schermo.

Prendiamo nelle (1) della Nota precedente

$$Au(t-Ax)=I_0\, e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)},$$

dove

$$i=\sqrt{-1}\,,\qquad \omega=2\pi n(t-Ax)+\alpha\,,$$

$I_0$, $n$ ed $\alpha$ designano costanti reali. Con questa espressione di $u$ le parti reali dei secondi membri delle (1) forniscono i potenziali dovuti a una ordinaria corrente sinusoidale di intensità massima $I_0$ e di frequenza $n$.

Proponiamoci di determinare (i potenziali indotti sul piano $z=0$) $F_1$, $U_1$, $V_1$ nel caso che i potenziali inducenti corrispondano al valore complesso $I_0 e^{i(\omega-\pi/2)}$, sieno cioè

$$(1')\qquad \begin{cases} U'=2I_0\, e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}\log\dfrac{1}{\Delta}\,, \quad V'=0\,, \quad W'=0; \\ F'=U' \end{cases}$$

Trovati $F_1$, $U_1$, $V_1$, basterà prenderne la parte reale per avere i potenziali indotti sul piano $z=0$ dalla suddetta corrente sinusoidale, parallela al piano e distante $d$ da esso.

È chiaro anzitutto che, stabilito una volta il regime, le espressioni di $F_1$, $U_1$, $V_1$ dovranno essere della forma

$$(3)\qquad F_1=2I_0\, e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}F_2,\quad U_1=2I_0\, e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}U_2,\quad V_1=2I_0\, e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}V_2\,,$$

con $F_2$, $U_2$, $V_2$ funzioni soltanto di $y$, $|z|$.

---

(*) Presentata dal Socio VITO VOLTERRA nella seduta del 2 marzo 1902.

Ciò posto, le (III) e (IV) danno

$$\frac{d^2F_2}{dy^2}+\frac{d^2F_2}{d|z|^2}=0, \quad \frac{d^2U_2}{dy^2}+\frac{d^2U_2}{d|z|^2}=0, \quad \frac{d^2V_2}{dy^2}+\frac{d^2V_2}{d|z|^2}=0, \tag{4}$$

$$2\pi nAi(F_2-U_2)+\frac{dV_2}{dy}=0, \tag{5}$$

mentre le equazioni ai limiti (V) divengono

$$2\pi nAi(F_2-U_2)+\frac{AR}{2\pi}\frac{dU_2}{d|z|}=0,$$

$$\frac{dF_2}{dy}+2\pi nAiV_2-\frac{AR}{2\pi}\frac{dV_2}{d|z|}=-\frac{d\log\frac{1}{\Delta}}{dy}.$$

Le tre funzioni [armoniche, in causa delle (4)] $F_2$, $U_2$, $V_2$ dovranno inoltre comportarsi regolarmente per tutti i valori reali di $y$ e positivi di $|z|$, e annullarsi (assieme alle loro derivate) al crescere indefinito di $|z|$. Queste stesse proprietà competono di conseguenza alle due combinazioni

$$2\pi nAi(F_2-U_2)+\frac{AR}{2\pi}\frac{dU_2}{d|z|},$$

$$\frac{dF_2}{dy}+2\pi nAiV_2-\frac{AR}{2\pi}\frac{dV_2}{d|z|},$$

di cui le equazioni ai limiti, scritte or ora, forniscono inoltre i valori per $z=0$:

$$0 \quad \text{e} \quad -\frac{d\log\frac{1}{\Delta}}{dy}.$$

Poniamo

$$\nabla^2=y^2+(|z|+d)^2 \qquad (\nabla=\Delta \quad \text{per} \quad z\leqslant 0), \tag{6}$$

e osserviamo che le due funzioni 0 e $-(d\log 1/\nabla)/dy$, sono manifestamente armoniche, regolari per tutti i valori reali di $y$ e positivi di $|z|$, e nulle per $|z| = \infty$. Siccome non vi possono essere due funzioni armoniche, che prendono gli stessi valori per $z = 0$, si mantengono regolari in ogni altro punto, e si annullano per $|z| = \infty$, così dobbiamo concludere che si ha identicamente (e non soltanto per $z = 0$)

$$\tag{7} \left\{ \begin{aligned} & 2\pi n A i (F_2 - U_2) + \frac{AR}{2\pi} \frac{dU_2}{d|z|} = 0\,, \\ & \frac{d}{dy}\left(F_2 + \log \frac{1}{\nabla}\right) + 2\pi n A i V_2 - \frac{AR}{2\pi} \frac{dV_2}{d|z|} = 0\,. \end{aligned} \right.$$

*Il nostro còmpito consiste dunque nell'integrare il sistema* (completo, come tosto si riconosce) (4), (5), (7) *mediante funzioni* $F_2$, $U_2$, $V_2$ *di* $y$, $|z|$, *regolari per tutti i valori reali di* $y$, *positivi di* $|z|$, *e nulle per* $|z| = \infty$.

## 6. - Calcolo di $F_2$.

Moltiplichiamo la prima delle (7) per $2\pi n A i$, deriviamo la seconda rispetto ad $y$ e sommiamo. Verrà, tenendo conto della (5),

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(F_2 + \log \frac{1}{\nabla}\right) + A^2 n R i \frac{dF_2}{d|z|} = 0\,,$$

od anche, siccome $F_2 + \log 1/\Delta$ è funzione armonica,

$$\frac{d^2}{d|z|^2}\left(F_2 + \log \frac{1}{\nabla}\right) - A^2 n R i \frac{dF_2}{d|z|} = 0\,.$$

Integrando rispetto a $|z|$ fra un valore generico e $\infty$, risulta

$$\frac{d}{d|z|}\left(F_2 + \log \frac{1}{\nabla}\right) - A^2 n R i F_2 = 0\,.$$

Facciamo, per brevità di scrittura, le posizioni

$$\tag{8} p = 2\pi n A\,, \qquad q = \frac{4\pi^2 n}{R}\,, \qquad B = A^2 n R = \frac{p^2}{q}\,.$$

Le equazioni (5), (7) e quelle, cui siamo testè pervenuti, potranno essere scritte:

$$\frac{dV_2}{dy} = pi(U_2 - F_2)\,, \tag{5'}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d|z|}\,(U_2 - F_2) - qi(U_2 - F_2) = -\frac{dF_2}{d|z|}\,,\\ &\frac{d}{dy}\left(F_2 + \log\frac{1}{\nabla}\right) - \frac{p}{q}\left(\frac{dV_2}{d|z|}\right) - qiV_2\Bigr) = 0\,, \end{aligned}\right. \tag{7'}$$

$$\frac{dF_2}{d|z|} - B\,iF_2 = -\frac{d\log\dfrac{1}{\nabla}}{d|z|}\,. \tag{9}$$

Un integrale particolare della (9) è, come si verifica subito,

$$F_2 = -i\int_0^\infty e^{-B\lambda}\,\frac{d\log\dfrac{1}{\tau}}{d|z|}\,d\lambda\,, \tag{10}$$

in cui

$$\tau^2 = y^2 + (|z| + d - i\lambda)^2 \tag{11}$$

e si suppone $B > 0$.

La funzione sotto il segno nel secondo membro della (10) è allora effettivamente integrabile fra 0 e $\infty$ (qualunque sieno i valori reali di $y$ e di $z$).

L'integrale $F_2$ risulta poi funzione armonica di $y$, $|z|$, nulla per $|z| = \infty$, regolare per tutti i valori reali di $y$ e positivi di $|z|$, poichè

$$\frac{d\log\dfrac{1}{\tau}}{d|z|} = -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{|z| + d + i(y-\lambda)} + \frac{1}{|z| + d - i(y+\lambda)}\right\}$$

gode di tali proprietà in tutto l'intervallo di integrazione.

*La funzione cercata* $F_2$ *rimane definita dalla* (10).

Infatti, in causa della (9), essa potrebbe differirne soltanto per un integrale armonico della equazione

$$\frac{dF_2}{d|z|} - Bi\,F_2 = 0\,,$$

nullo per $|z| = \infty$. Ma un tale integrale è identicamente nullo.

Giova ancora osservare che, mediante una integrazione per parti, si può attribuire all'espressione di $F_2$ la forma

$$F_2 + \log \frac{1}{\nabla} = B \int_0^\infty e^{-B\lambda} \log \frac{1}{\tau} \, d\lambda \,. \tag{10'}$$

## 7. - Caratteri analitici della funzione $F_2$.

Per riconoscere la natura della funzione definita dall'integrale (10), prendiamo le mosse dalla formula

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + \xi} \, d\lambda = e^\xi \int_\xi^\infty e^{-\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda} = - e^\xi \mathrm{Li} e^{-\xi} \,,$$

che è, si può dire, la definizione della funzione Li (logaritmo integrale) per valori reali e positivi dell'argomento $\xi$.

Dalla formula di EULERO (¹)

$$\mathrm{Li}\, e^{-\xi} = C + \log \xi + \sum_{1}^{\infty}{}_m (-1)^m \frac{\xi^m}{m \cdot m!} \tag{11}$$

(dove $C$ è la nota costante 0,577... e pel logaritmo si intende fissata la determinazione reale) la funzione $\mathrm{Li}\, e^{-\xi}$ rimane definita in tutto il piano complesso. Supponendolo tagliato lungo il semiasse reale negativo, la $\mathrm{Li}\, e^{-\xi}$ risulta funzione uniforme colla sola singolarità logaritmica $\xi = 0$.

Nello stesso campo (cioè in tutto il piano ad esclusione del semiasse reale negativo) è pure

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + \xi} \, d\lambda$$

funzione analitica regolare di $\xi$.

Le due funzioni

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + \xi} \, d\lambda, \; - e^\xi \, \mathrm{Li}\, e^{-\xi}$$

(¹) Cfr. per es. KRONECKER, *Vorlesungen über Mathematik*, B. I, pag. 213.

coincidono per $\xi$ reale e positivo. Si ha dunque, per qualsiasi valore di $\xi$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\lambda + \xi} = -\, e^{\xi} \mathrm{Li}\, e^{-\xi},$$

dovendosi nel secondo membro intendere, come s'è detto, quella particolare determinazione della funzione multiforme Li, che, senza attraversare il taglio, risulta reale, per $\xi$ reale e positivo.

Ciò posto, la espressione (10) di $F_2$, scambiando $\lambda$ in $\lambda/B$ e moltiplicando sopra e sotto per $i$, può essere scritta

$$F_2 = -\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\lambda - B\{y - i(|z| + d)\}} + \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\lambda + B\{y + i(|z| + d)\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-B\{y - i(|z|+d)\}}\, \mathrm{Li}\, e^{B\{y - i(|z|+d)\}} + e^{B\{y + i(|z|+d)\}}\, \mathrm{Li}\, e^{-B\{y + i(|z|+d)\}}\right].$$

Valendosi dello sviluppo (11), si caratterizza immediatamente il comportamento della funzione $F_2$ nell'intorno del valore 0 del parametro $B$. Si ha infatti

$$(10'') \qquad F_2 = C + \log B - i\frac{\pi}{2} + \log \nabla + B\{Y_1 \log B + Y_2\},$$

$Y_1$ e $Y_2$ designando funzioni regolari nell'intorno di $B = 0$.

Ne viene che, per $B = 0$, le derivate, rapporto a $y$, $|z|$, di $F_2$ coincidono colle derivate di $\log \nabla$.

## 8. - Calcolo di $U_2$ e di $V_2$.

Ritenuto $q > 0$, si verifica, come sopra, che

$$(12) \qquad U_2 - F_2 = -\, i \int_0^\infty e^{-q\mu} \frac{dF_2(y,\ |z| - i\mu)}{d|z|}\, d\mu$$

soddisfa alla prima delle (7') e a tutte le altre condizioni richieste, ed è l'unica funzione, che si trova in questo caso.

Collo stesso criterio si costruisce l'integrale particolare

$$(13) \quad V_2 = -\, pi \int_0^\infty \{U_2(y + \nu,\ |z|) - F_2(y + \nu, |z|)\}\, d\nu = -\, pi \int_y^\infty (U_2 - F_2)\, dy$$

delle (5′), che è funzione armonica ecc., e fornisce in somma il cercato valore di $V_2$.

Di tutte le condizioni, imposte alle nostre incognite, rimane soltanto da controllare la seconda delle (7′). Si riconosce senza difficoltà che coi valori (10′), (12) e (13) essa rimane identicamente soddisfatta.

## 9. - Semplificazione delle espressioni trovate.

La frequenza $n$, finchè si tratta di correnti alternate industriali, è compresa fra 20 e 200; per scariche oscillanti, correnti di TESLA, ecc., può giungere sino a valori dell'ordine di $10^6$, ma in ogni caso $B = A^2 nR$ è una quantità molto piccola [2].

Si possono quindi trascurare senza scrupolo i termini dell'ordine di $B$, ed anche di $B \log B$. La (10″) dà allora (prescindendo, come è lecito, dalla costante $C + \log B - i(\pi/2)$)

$$F_2 + \log \frac{1}{\nabla} = 0 . \tag{14}$$

Ciò si sarebbe potuto ricavare dalla (9) facendovi $B = 0$, ma non si sarebbe avuto in tal modo esatta nozione dell'approssimazione risultante.

La formula (10″) mostra che l'errore, da cui possono essere affette $F_2$ e le sue derivate rispetto ad $y$, $|z|$, è dell'ordine di $B \log B$.

Nemmeno questo sarebbe sufficiente, volendo procedere con assoluto rigore. Bisognerebbe ancora assegnare un limite superiore dell'errore possibile nelle componenti delle forze elettromagnetiche.

Non è del resto difficile il farlo, partendo dalla considerazione delle derivate della (10′).

Si arriva alla conclusione prevista che gli errori sono effettivamente trascurabili.

Ritenuto ormai $F_2 = -\log 1/\nabla$, la (12), ricordando la espressione (11) di $\tau$, si riduce a

$$U_2 - F_2 = i \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda} \frac{d \log \frac{1}{\tau}}{d|z|} \, d\lambda . \tag{15}$$

---

[2] Prendiamo pure $n = 10^7$ e per $R$ il valore, che corrisponde a una lastra di argentana dello spessore di un decimillimetro, cioè a un dipresso

$$R = 20\,000 \times 100 = 2 \cdot 10^6 .$$

Sarà pur sempre

$$B = \frac{2 \cdot 10^{13}}{9 \cdot 10^{20}} = \frac{2}{9} 10^{-7} .$$

Scindiamo il reale dall'immaginario. Si ha

$$U_2 - F_2 = -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{dy} d\lambda - i\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log (\tau_1\tau_2)}{d|z|} d\lambda ,$$

dove

$$\tau_1^2 = (y - \lambda)^2 + (|z| + d)^2, \qquad \tau_2^2 = (y + \lambda)^2 + (|z| + d)^2 .$$

Si osservi che

$$-\int_y^\infty \frac{d\log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{dy} dy = \log \frac{\tau_1}{\tau_2} ,$$

$$-\int_y^\infty \frac{d \log (\tau_1\tau_2)}{d|z|} dy = \operatorname{arctg} \frac{y - \lambda}{|z| + d} + \operatorname{arctg} \frac{y + \lambda}{|z| + d} - \pi .$$

La (13) porge quindi

$$V_2 = \frac{1}{2} p\int_0^\infty e^{-q\lambda} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y - \lambda}{|z| + d} + \operatorname{arctg} \frac{y + \lambda}{|z| + d} - \pi \right\} d\lambda - i\frac{1}{2} p\int_0^\infty e^{-q\lambda} \log \frac{\tau_1}{\tau_2} d\lambda .$$

Le espressioni definitive dei potenziali indotti, con approssimazione valida in ogni caso, sono dunque, a tenore delle (3) (avvertendo che dobbiamo conservare nei secondi membri soltanto la parte reale):

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} F_1 &= -2I_0 \operatorname{sen} \omega \log \frac{1}{\nabla} , \\ U_1 - F_1 &= -2I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{dy} d\lambda \\ &\qquad - 2I_0 \cos \omega \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-q\lambda} \frac{d \log (\tau_1\tau_2)}{d|z|} d\lambda , \\ V_1 &= 2I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{1}{2} p\int_0^\infty e^{-q\lambda} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y - \lambda}{|z| + d} + \operatorname{arctg} \frac{y + \lambda}{|z| + d} - \pi \right\} d\lambda \\ &\qquad - 2I_0 \cos \omega \frac{1}{2} p\int_0^\infty e^{-q\lambda} \log \frac{\tau_1}{\tau_2} d\lambda , \end{aligned} \right.$$

dove, ricordiamolo,

$$\omega = 2\pi n(t - Ax) + \alpha\,,$$

$$\nabla^2 = y^2 + (|z| + d)^2\,,$$

$$\tau_1^2 = (y - \lambda)^2 + (|z| + d)^2\,,$$

$$\tau_2^2 = (y + \lambda)^2 + (|z| + d)^2\,,$$

mentre le costanti $p$ e $q$ sono definite dalla (8).

Il campo elettromagnetico, che, in assenza di schermo conduttore, è caratterizzato dai potenziali — parte reale delle (1′) —

$$(17) \qquad F' = 2I_0 \operatorname{sen}\omega \log\frac{1}{\Delta}\,; \quad U' = 2I_0 \operatorname{sen}\omega \log\frac{1}{\Delta}\,, \quad V' = 0\,, \quad W' = 0\,,$$

lo è invece, tenendo conto dello schermo, da

$$(18) \qquad F = 2I_0 \operatorname{sen}\omega \left\{ \log\frac{1}{\Delta} - \log\frac{1}{\nabla} \right\};$$

$$U = F + (U_1 - F_1)\,, \quad V = V_1\,, \quad W = 0\,,$$

dove bisogna sostituire per $U_1 - F_1$ e $V_1$ i loro valori (16).

Le componenti delle forze elettromagnetiche si hanno introducendo nelle (I), (II) i potenziali (18). Ma le espressioni, che ne risultano, non sono ancora abbastanza comode per il calcolo numerico, nè soprattutto per acquistare un'idea dell'andamento del fenomeno e fornire indicazioni ad eventuali sperimentatori.

Mostrerò in una terza Nota come a ciò si pervenga mediante uno sviluppo asintotico degli integrali, che compariscono nelle espressioni trovate.