XIII.

SUR LES FONCTIONS DE GENRE INFINI [1]

« Bull. des Sc. math. », s. 2e, t. XXV (1902),
pp. 333-335.

J'avais lu, il y a déjà quelques semaines, votre Note *Sur les fonctions de genre infini* [2]. Ayant eu occasion d'y réfléchir un peu, je me suis aperçu que vos remarques, très simples d'ailleurs, peuvent être présentées d'une façon plus élémentaire encore.

Si vous le permettez, je vous entretiendrai quelques minutes à ce sujet.

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}, \ldots$ les modules (rangés par ordre croissant) des zéros d'une transcendante entière $f(z)$ (se réduisant à l'unité pour $z = 0$); $r = |z|$, et $\vartheta(r)$ le nombre des zéros de $f(z)$, dont le module est plus petit que r.

On a par définition

$$\begin{array}{lll}\vartheta(s) = 1 & \text{pour} & r_1 < s \leqq r_2, \\ \vartheta(s) = 2 & \text{pour} & r_2 < s \leqq r_3, \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots, \\ \vartheta(s) = n-1 & \text{pour} & r_{n-1} < s \leqq r_n, \\ \vartheta(s) = n & \text{pour} & r_n < s \leqq r_{n+1}.\end{array}$$

D'après cela, en supposant $r_n < r \leqslant r_{n+1}$, il vient de suite

$$\int_{r_1}^{r} \frac{\vartheta(s)}{s}\, ds = \sum_{1}^{n-1}{}_k\, k \log \frac{r_{k+1}}{r_k} + n \log \frac{r}{r_n} = \log \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n}.$$

---

(1) Extrait d'une Lettre de M. LEVI-CIVITA (à Padoue) à M. BOREL (à Paris).

(2) « Comptes rendus », juin 1902.

Or, d'après le théorème de M. JENSEN, le second membre ne peut dépasser $\log M(r)$; par conséquent,

$$\log M(r) \geqq \int_{r_1}^{r} \frac{\vartheta(s)}{s}\, ds\,. \tag{1}$$

Au point de vue asymptotique, on peut naturellement remplacer ϑ par toute autre fonction $\chi(s)$ telle que

$$\lim_{s=\infty} \frac{\vartheta(s)}{\chi(s)} \leqq 1\,.$$

Si je ne me trompe pas, il n'y a, *a priori*, aucune raison pour préférer votre fonction

$$\frac{\vartheta_1}{r} = \frac{1}{r}\int_{r_1}^{r} \vartheta(s)\, ds \qquad \text{à} \qquad \int_{r_1}^{r} \frac{\vartheta(s)}{s}\, ds\,,$$

et l'on peut se contenter de l'inégalité (1), qui est valable en tout cas.

Au reste, en remarquant l'identité

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r-s}{s}\right)$$

et en posant

$$\varepsilon(r) = \int_{r_1}^{r} \frac{\vartheta(s)}{s}\,(r-s)\, ds\,,$$

il vient

$$\log M(r) \geqq \frac{1}{r}\,(\vartheta_1 + \varepsilon)\,,$$

où, par la règle de l'HOSPITAL,

$$\lim_{r=\infty} \frac{\varepsilon}{\vartheta_1} = \lim_{r=\infty} \frac{\int_{r_1}^{r} \frac{\vartheta(s)}{s}\, ds}{\vartheta(r)}\,.$$

Il suffit donc que

$$\int_{r_1}^{r} \frac{\vartheta(s)}{s}\,ds$$

croisse moins vite que $\vartheta(r)$ (ce qui arrive notamment lorsque la croissance de $\vartheta(r)$ rentre dans le type exponentiel) pour que l'on ait votre inégalité asymptotique

$$\log M(r) > \frac{\vartheta_1}{r}.$$

23 juillet 1902.