

SOPRA UN PROBLEMA DI ELETTROSTATICA
CHE SI È PRESENTATO
NELLA COSTRUZIONE DEI CAVI

« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XX (1905).
pp. 173-228,

L'uso, ormai frequente nell'industria, di correnti alternative a tensioni altissime ha messo in prima linea la questione della rigidità dielettrica dei cavi.

Di questa questione ebbe ad occuparsi con alta competenza il sig. ing. EMANUELE JONA della Ditta PIRELLI e C. (1). Egli fu in particolare condotto a proporsi un quesito specifico di non lieve importanza per i fabbricanti, ma difficile a decidersi per via sperimentale. Pensò allora di ricorrere allo strumento matematico ed incitò me ad esperirne il maneggio.

Io ho accolto assai volentieri l'invito cortese ed ho potuto rispondere in modo preciso, fornendo i coefficienti numerici desiderati quale norma costruttiva. Si tratta di conclusioni, che, come ho ora accennato, male si prestano ad un diretto controllo sperimentale. Ma, fra le formule, in cui quelle conclusioni sono implicitamente contenute, ve n'è una suscettibile di comoda verifica. La verifica è stata eseguita dallo stesso ing. JONA, e riuscì quanto mai soddisfacente (cfr. § 12).

Dei risultati, cui sono pervenuto, ho già dato notizia lo scorso anno (2); essi si ritrovano, più ampiamente illustrati e commentati, nella interessante comunicazione fatta dall'ing. JONA al Congresso di St. Louis (3).

La presente Memoria contiene la esposizione dettagliata di tutta la ricerca. Chi per altro cercasse qui ancora soltanto la posizione del problema e i risultati potrà limitarsi a leggere i §§ 1, 13 e 15.

(1) *Limitazioni necessarie*, ecc., « Atti della Associazione Elettrotecnica Italiana », vol. VIII, 1904, pag. 195-220.

(2) « Rendiconti dei « Lincei », 24 aprile 1904 [in questo vol.: XIX, p. 331-337].

(3) *Insulating materials in high tension cables*, « Electrical Congress of St. Louis », Section E.

1. - Considerazioni preliminari e cenno del metodo di risoluzione.

Un cavo consta essenzialmente:

- di un conduttore centrale (formato da un filo unico a sezione circolare, o più spesso da una corda di tali fili), per cui passa la corrente;
- di un rivestimento isolante;
- di una guaina conduttrice (a sezione circolare) da risguardarsi in comunicazione col suolo.

Quando il conduttore centrale è percorso da corrente, si genera in tutto lo spazio ambiente un campo elettromagnetico. Se anche la corrente è alternativa, entro i limiti delle frequenze industriali, si può con tutta tranquillità parlare di potenziale e ritenere valide per una generica sezione del cavo le leggi elettrostatiche (*).

La sezione del rivestimento isolante si presenta (cfr. la fig. 1) come una corona σ , limitata esternamente da un cerchio C (sezione della guaina cilindrica conduttrice) ed internamente da un contorno T (circolare nel caso di un filo unico) frastagliato, ad archi di cerchio tangenti nel caso generale di una corda.

Il potenziale (logaritmico) W è zero in C ed ha, in tutti i punti di T , uno stesso valore (variabile col tempo) δ , che può raggiungere massimi (positivi e negativi) molto elevati. Nel frapposto coibente σ c'è una caduta del potenziale W da δ a zero.

Questa caduta di potenziale pone a cimento la rigidità dielettrica di σ , tanto che, se δ oltrepassa un certo limite, avviene una scarica distruttiva, e il dielettrico rimane perforato, ciò che naturalmente è necessario evitare.

In modo preciso, si può ritenere che la misura del cimento specifico, cui sottostà il dielettrico σ in un suo punto generico P , sia data dal gradiente del potenziale W , che è poi il valore del $\Delta_1 W$ in quel punto (**).

Per gli scopi costruttivi interessa conoscere il massimo cimento specifico, che viene raggiunto in qualche punto del dielettrico σ . È chiaro che questo elemento è, al pari di W , proporzionale a δ , mentre l'altro

(*) Nella citata mia Nota dello scorso anno avevo espresso il proposito di profittare della trattazione in estenso per discutere e precisare anche questo punto. Ma mi avveggo che dovrei diffondermi soverchiamente e perciò rimetto la cosa ad altra occasione.

(**) Sia infatti W_P il valore del potenziale nel punto considerato P ; $W = W_P$ la linea equipotenziale passante per P , $W = W_P + dW_P$ la linea equipotenziale infinitamente vicina; dn la lunghezza della perpendicolare, abbassata da P sulla detta linea infinitamente vicina. Il gradiente (differenza elementare di potenziale divisa per l'elemento di distanza) è la naturale misura del cimento specifico. Esso viene quindi espresso da dW/dn , che coincide, come è ben noto, col $\Delta_1 W$ [in coordinate cartesiane $|\sqrt{(dW/dx)^2 + (dW/dy)^2}|$].

fattore, che chiameremo G , dipende soltanto dalla natura geometrica del campo σ .

Basta dunque occuparsi di questa costante di configurazione G , massimo cimento specifico (si può dire) per unità di differenza di potenziale.

Converremo di assumere la definizione di G sotto la forma seguente:

G è il valore massimo del Δ_1 della funzione V , armonica e regolare entro σ , che prende il valore zero su T e uno su C .

Nel caso semplice di un filo unico, σ è una corona circolare e si ha immediatamente

$$V = \frac{\log \frac{\rho}{r}}{\log \frac{R}{r}},$$

designando R , r i raggi esterno ed interno della corona, e ρ il raggio vettore del punto generico P .

Ne viene

$$\Delta_1 V = \frac{dV}{d\rho} = \frac{1}{\rho \log \frac{R}{r}}.$$

Il valore massimo di $\Delta_1 V$ ha luogo, come si vede, nei punti del conduttore interno ($\rho = r$). La G di una corona circolare, che rappresenteremo con G_1 , è dunque definita da

$$G_1 = \frac{1}{r \log \frac{R}{r}}.$$

Dato R , per rendere minimo G_1 , bisogna prendere $r = R/e = R/2,72\dots$, ed il valore minimo g_1 di G_1 è

$$g_1 = \frac{1}{r}.$$

Nella pratica il conduttore interno non è generalmente circolare; esso è quasi sempre costituito da una corda a 7, 19, 37, ... fili circolari.

Si tratta pertanto di stabilire che cosa diventa in questi casi la espressione di G .

Noi converremo di individuare il profilo del conduttore interno T

per mezzo del raggio nodale $r = ON$ e del numero m ($m = 6$ nella fig. 1) degli archi di cerchio tangenti, che lo costituiscono: m è dunque non il numero totale dei fili della corda, ma di quelli soltanto, che appartengono all'ultima stratificazione: 6, 12, 18 nei citati esempi di corde a 7, 19, 37 fili.

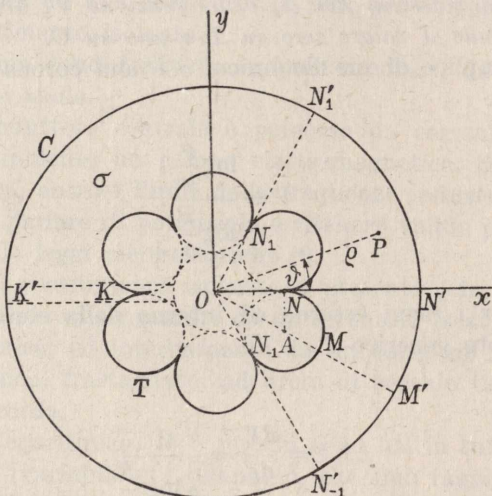


Fig. 1.

Prima di intraprendere la ricerca analitica notiamo che il semplice buon senso (sorretto, se si vuole, da nozioni fondamentali di teoria del potenziale) permette di prevedere l'andamento del gradiente entro un generico campo σ .

Anzi tutto i valori estremi del gradiente debbono cadere sul contorno del campo (su C o su T): questo perchè $\log \Delta_1 V$ è, al pari di V , una funzione armonica. Nel caso della corona circolare cadono, come si è visto, su T . Si capisce senz'altro che lo stesso deve avvenire in generale.

D'altra parte, nei nodi (che sono cuspidi colla convessità rivolta verso l'interno del campo σ , in cui V è regolare) dV/dn , cioè $\Delta_1 V$, si annulla (*). Il valore massimo di G sarà perciò da cercarsi nei ventri (punti medi degli archi di cerchio costituenti T): cosa ben naturale quando si pensi che i ventri sono i punti di T più vicini a C , a partire dai quali quindi la variazione del potenziale è più rapida.

(*) Cfr. per es. RIEMANN-WEBER, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, Bd. I, pp. 342-343.

Ciò premesso, indichiamo le linee generali del procedimento, che sarà svolto nei §§ seguenti:

1) la determinazione di V si riconduce (adattando opportunamente un classico procedimento di SCHWARZ) alla integrazione di una ordinaria equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti doppiamente periodici; da essa rigorosamente discende l'accennato comportamento del gradiente;

2) la integrazione della detta equazione (che si può effettuare per approssimazioni successive usufruendo di certi parametri λ e ζ) porge per V e per $\Delta_1 V$ degli sviluppi uniformemente convergenti in tutto σ , donde in particolare la espressione rigorosa di G ;

3) per passare alla valutazione effettiva, si arrestano questi sviluppi al loro primo termine, ciò che pur assicura ogni desiderabile approssimazione. L'errore, che si commette, risulta infatti, *nella peggiore ipotesi*, dell'ordine di $16 (r/R)^m$ (rispetto all'unità), affatto trascurabile dunque, se, come avviene sempre nei cavi, r/R è molto $< \frac{1}{2}$ ed $m \geq 6$;

4) esegesi e discussione numerica delle formule finali.

2. - La funzione armonica V e la sua associata U .

Sia O il centro di C , che si suppone naturalmente centro di simmetria anche per la spezzata T .

Riferiamoci ad un sistema di assi coll'origine in O e coll'asse x (anzi colla direzione positiva dell'asse x) passante per uno dei nodi. Sia questo N (fig. 1) e siano N_1, N_{-1} il primo e l'ultimo nodo, che si incontrano a partire da N procedendo sul contorno T nel verso xy ; sia M l'ultimo ventre, cioè il punto medio dell'arco NN_{-1} .

Sieno infine N', N'_1, N'_{-1}, M' i punti del contorno C corrispondenti a N, N_1, N_{-1}, M , cioè le intersezioni di C coi raggi ON, ON_1, ON_{-1}, OM rispettivamente.

Consideriamo, accanto alle coordinate cartesiane x, y di un generico punto P di σ , anche le polari ϱ e ϑ , e risguardiamo il potenziale V , che si annulla su T e prende il valore 1 su C , come funzione di ϱ e di ϑ .

Dacchè, per ipotesi, il campo σ , e con esso le condizioni del problema, si trasformano in sè per ogni rotazione di ampiezza $2\pi/m$, avremo identicamente

$$(1) \quad V\left(\varrho, \vartheta - \frac{2\pi}{m}\right) = V(\varrho, \vartheta).$$

Del pari, tutto essendo simmetrico rispetto all'asse polare, sarà

$$(2) \quad V(\varrho, -\vartheta) = V(\varrho, \vartheta).$$

I perfezionamenti moderni della teoria del potenziale ci permettono di asserire con tutto rigore che la V è una funzione analitica, regolare entro σ e sui contorni, esclusi al più i nodi, e che lo stesso può dirsi della sua associata U , definita (a meno di una costante additiva) dalle equazioni

$$(3) \quad e \frac{dU}{d\rho} = \frac{dV}{d\vartheta}, \quad \frac{dU}{d\vartheta} = -e \frac{dV}{d\rho}.$$

La U stessa rimane inoltre, al pari di V , finita e continua anche nei nodi (la cuspidè essendo rivolta verso l'esterno del campo σ) (*).

Si noti che, essendo il campo σ doppiamente connesso, la funzione U può non essere uniforme (ed effettivamente non lo è, come tosto apparirà), ma lo diventa non appena si renda il campo semplicemente connesso.

Immaginiamo di averlo fatto, praticando per es. il taglio KK' lungo il semiasse negativo delle x , e fissiamo la costante additiva col prendere $U=0$ in N [cioè $U(r, 0) = 0$].

Tenendo conto delle (1), (2), le (3) mostrano che $U(\rho, \vartheta - 2\pi/m)$, $-U(\rho, -\vartheta)$ hanno le medesime derivate di $U(\rho, \vartheta)$, talchè

$$U\left(\rho, \vartheta - \frac{2\pi}{m}\right) = U(\rho, \vartheta) + \text{cost.},$$

$$U(\rho, -\vartheta) = -U(\rho, \vartheta) + \text{cost.}$$

La costante della seconda equazione è nulla, come si riconosce facendovi $\rho = r, \vartheta = 0$.

Chiamando l'altra 2ω , le proprietà della U , che fanno riscontro alle (1), (2), risultano espresse da

$$(1') \quad U\left(\rho, \vartheta - \frac{2\pi}{m}\right) = U(\rho, \vartheta) + 2\omega,$$

$$(2') \quad U(\rho, -\vartheta) = -U(\rho, \vartheta).$$

La (2') dà in particolare $U(\rho, 0) = 0$, e con ciò la (1'), pure per $\vartheta = 0$, dà $U(\rho, -2\pi/m) = 2\omega$.

Facendo invece, nelle (1'), (2'), $\vartheta = \pi/m$, si ricava

$$U\left(\rho, -\frac{\pi}{m}\right) = \omega.$$

La U è dunque zero lungo tutto il segmento NN' ed ha i valori costanti $\omega, 2\omega$ in tutti i punti dei segmenti $MM', N_{-1}N'_{-1}$ rispettivamente.

(*) Cfr. in particolare KORN, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, Bd. II, pp. 211-233.

La applicazione ripetuta della (1'), a partire dai valori 0 e π/m di ϑ , mostra che, anche su ogni altro raggio, sia nodale che ventrale, la U ha valori costanti, i quali variano da un raggio al successivo di ω nel verso negativo e di $-\omega$ nel positivo: così sui due bordi del taglio KK' risulta $U = \pm m\omega$.

Prendiamo adesso a considerare una generica linea equipotenziale $V = \text{cost.}$, la costante essendo, si intende, compresa fra i valori estremi 0 ed 1, che V prende sui contorni. Un ragionamento ben noto, basato sull'armonicità di V , permette di asserire che la $V = \text{cost.}$ è una linea chiusa, priva di nodi, riducibile per deformazione continua a C (senza uscire da σ). Sia ds un elemento d'arco della $V = \text{cost.}$ (nel verso positivo xy), dn un elemento della direzione ortogonale volta verso il contorno C . Si ha dalle (3)

$$\frac{dU}{ds} = - \frac{dV}{dn}.$$

Ora dV/dn ha sempre il medesimo segno, perchè il suo annullarsi implicherebbe $\Delta_1 V = 0$, e ciò può accadere appena nei nodi. Siccome, passando da T a C , V cresce da zero ad 1, così dovrà essere dV/dn positiva. Dunque dU/ds è costantemente negativa, e ciò vale anche sui due contorni, eccettuati eventualmente i nodi.

Ne consegue che la U va sempre decrescendo quando si procede nel verso xy sopra una qualsiasi linea equipotenziale, C e T comprese.

In particolare poi

$$\omega > 0.$$

3. - Inversione.

Si ponga

$$z = x + iy = \rho e^{i\vartheta},$$

$$u = U + iV.$$

La u risulterà funzione della variabile complessa z , uniforme e regolare in tutto il campo σ (reso semplicemente connesso col taglio KK') e sui due contorni, esclusi al più i nodi (dove però si conserva finita e continua).

Al contorno di σ (costituito da T , C e dai due bordi del taglio KK') corrisponde univocamente nel piano u (fig. 2) il rettangolo \mathfrak{R} compreso fra l'asse reale $V = 0$, la sua parallela $V = 1$ e le due parallele all'asse immaginario $U = m\omega$, $U = -m\omega$.

In ogni altro punto di σ , la u assume valori interni al rettangolo e la corrispondenza è biunivoca entro i due campi e sui rispettivi contorni. Ciò risulta analiticamente dal fatto che (esclusi soltanto i nodi) $|du/dz| = \Delta_1 V$ è regolare e diverso da zero; e che anche nei nodi U e V restano finite e continue.

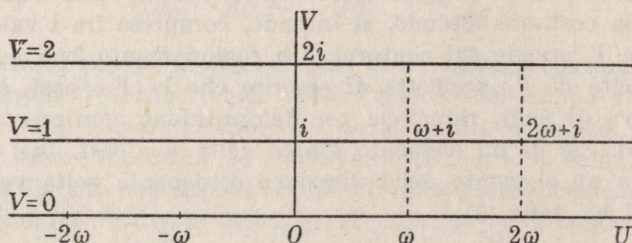


Fig. 2.

Siamo così autorizzati a ritenere reciprocamente z funzione uniforme di u , regolare entro il rettangolo \Re e sul contorno, con eventuale esclusione dei soli punti $u = 0, u = \pm 2\omega, \dots$ dell'asse reale, cui corrispondono i valori nodali di z (cioè i punti N, N_{-1}, N_1, \dots).

Ai tratti $(0, 1)$ dell'asse immaginario $U=0$ e delle sue parallele $U = \pm \omega, U = \pm 2\omega, \dots$ corrispondono la NN' e gli altri raggi (alternativamente) ventrali e nodali di σ da una parte e dall'altra di NN' . I sensi — fissiamolo bene — sono opposti, cioè al verso positivo dell'asse U corrisponde il negativo di ϑ e reciprocamente.

Le (1), (1') si possono evidentemente compendiare in

$$\begin{aligned} u(z e^{-2\pi i/m}) &= U\left(\varrho, \vartheta - \frac{m}{2\pi}\right) + iV\left(\varrho, \vartheta - \frac{2\varrho}{m}\right) \\ &= U(\varrho, \vartheta) + 2\omega + iV(\varrho, \vartheta) = u(z) + 2\omega, \end{aligned}$$

il che è quanto dire

$$(4) \quad z(u + 2\omega) = e^{-2\pi i/m} z(u).$$

Questa equazione funzionale permette, se si vuole, di considerare z come una funzione uniforme di u in tutta la striscia $V=0, V=1$ con singolarità soltanto nell'origine e nei punti dell'asse reale congrui alla origine secondo 2ω .

Un'altra proprietà della z si trae dalle (2), (2'). Così come stanno, esse esprimono che ai punti di σ simmetrici rispetto all'asse reale, cioè

a valori coniugati di z , corrispondono punti u simmetrici rispetto all'asse immaginario $U=0$. Per tradurre in formule, consideriamo in particolare (nel piano u) un generico punto $U+i$ della retta $V=1$, e il suo simmetrico (rispetto all'asse V) $-U+1$. I corrispondenti valori coniugati di z , appartenendo a C , avranno entrambi il modulo R , e sarà per conseguenza

$$z(U+i)z(-U+i) = R^2,$$

la quale equazione risulta con ciò stabilita per i valori reali di U . Ma siccome z è funzione analitica, la relazione stessa vale in tutto il campo di esistenza della funzione e può quindi essere scritta.

$$(5) \quad z(u+i)z(-u+i) = R^2.$$

4. - Criterio di Schwarz. Equazione differenziale di terz'ordine per la $z(u)$ e sua risolvente di secondo.

Il sig. SCHWARZ nella sua celebre Memoria, *Über einige Abbildungsaufgaben* (8), ha stabiliti alcuni principî, da cui, per lo scopo nostro, ricaveremo quanto segue:

1) Se z è funzione della variabile complessa u , uniforme e regolare in un certo campo, e, mentre la u varia sopra una retta parallela all'asse reale o all'asse immaginario, la z varia (nel suo piano) sopra un arco di cerchio, la espressione differenziale (derivata schwarziana)

$$\{z, u\} = \frac{d^2}{du^2} \log \frac{dz}{du} - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{du} \log \frac{dz}{du} \right)^2$$

ha, nei punti della detta retta, valori reali.

2) Se a due segmenti per diritto, concorrenti in un punto $u = u_0$, corrispondono nel piano z due archi di cerchio tangenti (più precisamente incontrantisi sotto angolo nullo, non di 180°), e z è regolare nell'intorno di $u = u_0$, o nella parte di questo intorno, che appartiene al campo, la $\{z, u\}$ ammette nell'intorno di u_0 uno sviluppo della forma

$$\{z, u\} = \frac{1}{2} \frac{1}{(u-u_0)^2} + \frac{c}{u-u_0} + \text{funzione di } u,$$

regolare per $u = u_0$, c designando una costante.

(8) « Journal für die reine und angewandte Mathematik », Bd. 70, 1869, ovvero: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. II, pag. 65. Cfr. anche DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, cap. IV.

Ciò premesso, esaminiamo il comportamento analitico della derivata schwarziana $\{z, u\}$ della funzione z precedentemente considerata.

Essa è anzi tutto, al pari di z , funzione regolare nella striscia $V=0$, $V=1$, eccettuati i soli punti $u=0$, $u=\pm 2\omega$, ... dell'asse reale; e soddisfa, in virtù della (4), alla relazione di periodicità

$$(6) \quad \{z, u + 2\omega\} = \{z, u\}.$$

Il primo principio ci assicura che, nei tratti $0, 2\omega$ dell'asse reale e della sua parallela $V=1$ (cui corrispondono nel piano z gli archi di cerchio NN_{-1} , $N'N'_{-1}$), $\{z, u\}$ è reale. Data la sua periodicità, essa è quindi reale su tutte le due rette $V=0$, $V=1$.

Applichiamo ora alla retta $V=1$ il principio della riflessione analitica, pure dovuto al sig. SCWHAERZ.

La $\{z, u\}$ (definita finora nella striscia $V=0$, $V=1$) è, a norma di tale principio, prolungabile analiticamente al disopra della $V=1$, e prende, in punti simmetrici, rispetto a questa retta, valori coniugati. In particolare si presentano coniugati i valori $\{z, U\}$, $\{z, U+2i\}$, assunti nei punti dell'asse reale e loro simmetrici, appartenenti alla $V=2$. Ma $\{z, U\}$ è reale, e per conseguenza risulta addirittura

$$\{z, U+2i\} = \{z, U\},$$

la quale, sussistendo per i valori reali di U , vale al solito in tutto il campo di esistenza, e può quindi essere scritta

$$(7) \quad \{z, u + 2i\} = \{z, u\}.$$

Le (6), (7) esprimono che la $\{z, u\}$ è funzione doppiamente periodica di u , coi periodi fondamentali 2ω , $2i$, reale il primo, puramente immaginario il secondo.

Nel rettangolo fondamentale $(0, 2\omega, 2\omega + 2i, 2i)$ questa $\{z, u\}$ ha il solo punto singolare $u=0$. Siccome ai due segmenti $0, 2\omega$; $0, -2\omega$ dell'asse reale $V=0$ corrispondono nel piano z gli archi di cerchio NN_{-1} , NN_1 , e questi si incontrano precisamente sotto angolo nullo, così il secondo dei ricordati principi mostra che $\{z, u\}$ ha nell'origine un polo di secondo ordine, la parte meromorfa dello sviluppo essendo

$$\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} + \frac{c}{u}.$$

Per un noto teorema sulle funzioni doppiamente periodiche, la somma dei residui, relativi al parallelogrammo fondamentale, è nulla. Sarà dunque $c=0$.

Basta adesso introdurre la p di WEIERSTRASS (relativa, si intende, ai periodi 2ω , $2i$ della $\{z, u\}$) e formare la differenza

$$\{z, u\} - \frac{1}{2} pu$$

per riconoscere che si tratta di una funzione doppiamente periodica senza singolarità alcuna, e quindi di una pura costante (reale, perchè sull'asse reale sono reali tanto $\{z, u\}$ quanto pu). Designandola con $2B$, si conclude in definitiva che la nostra funzione $z(u)$ soddisfa alla equazione *schwarziana*

$$\{z, u\} = \frac{1}{2} pu + 2B$$

e si può quindi considerare (*) come quoziente di due integrali della equazione differenziale di secondo ordine (a coefficienti doppiamente periodici)

$$(E) \quad \frac{d^2f}{du^2} + \left(\frac{1}{4} pu + B\right) f = 0.$$

5. - Proprietà caratteristiche degli integrali particolari della risolvente (E), a mezzo dei quali si esprime la z .

Il coefficiente $\frac{1}{4} pu + B$ della (E) dipende da due costanti, di cui le precedenti considerazioni non forniscono il valore: la ω (che si sa soltanto essere positiva) e la B . Per vedere in base a quali condizioni esse vanno determinate, cominciamo col caratterizzare i due integrali particolari della (E), il cui rapporto è z .

Designiamoli con $R\psi$ e φ , e notiamo subito che, siccome z non è una costante, ψ e φ saranno necessariamente due integrali indipendenti della (E). Di più, mancando nella (E) il termine in df/du , il wronskiano

$$\begin{vmatrix} \varphi & \frac{d\varphi}{du} \\ \psi & \frac{d\psi}{du} \end{vmatrix}$$

sarà, per il teorema di LIOUVILLE, una costante non nulla. Potremo ritenerla eguale ad 1, poichè non si influisce su z , moltiplicando ψ e φ per una stessa costante. Sarà così

$$(8) \quad \varphi \frac{d\psi}{du} - \psi \frac{d\varphi}{du} = 1.$$

(*) Cfr. DARBOUX, loco cit., pag. 185.

Dalla

$$z = R \frac{\psi}{\varphi}$$

si trae, derivando,

$$(9) \quad \frac{dz}{du} = \frac{R}{\varphi^2},$$

donde intanto apparisce che, siccome dz/du è, per natura sua, univocamente determinato, altrettanto deve accadere di φ (a meno del segno); lo stesso vale allora per $\psi = z\varphi/R$. Ma la (9) ci permette di andare più innanzi.

Nella striscia $V=0$, $V=1$, dz/du è, come z , uniforme e regolare, fatta eccezione pei soli punti 0 , $\pm 2\omega$, ... dell'asse reale. Con questa stessa eccezione sarà dunque pur *regolare e diversa da zero* la φ ; e regolare per conseguenza anche la ψ .

Portiamo per z la sua espressione $R(\psi/\varphi)$ nella (5), con che essa si può scrivere

$$\frac{\psi(-u+i)}{\varphi(-u+i)} = \frac{\varphi(u+i)}{\psi(u+i)}.$$

Se si deriva, badando alla (8), risulta subito

$$\varphi^2(-u+i) = \psi^2(u+i),$$

donde

$$\varphi(-u+i) = \pm \psi(u+i),$$

valendo il medesimo segno in tutta la striscia, perchè, come si è osservato, φ non si annulla nell'interno.

Per fissare il segno, facciamo $u=0$. Al punto i del piano u corrisponde nel piano z il punto $N'(z=R)$; deve dunque essere $\psi(i)/\varphi(i) = 1$, e valere quindi in tutta la striscia il segno superiore, ossia

$$(10) \quad \varphi(-u+i) = \psi(u+i).$$

Dalle (4) e (9) segue ovviamente

$$\varphi^2(u+2\omega) = e^{2\pi i/m} \varphi^2(u),$$

e quindi

$$\varphi(u+2\omega) = \pm e^{\pi i/m} \varphi(u)$$

colla stessa avvertenza circa il doppio segno.

L'ambiguità si toglie subito, attribuendo ad u il valore $-\omega + 1$ e notando che, in virtù della (10), $\varphi(-\omega + i) = \psi(\omega + i)$, talchè si ha

$$\varphi(\omega + i) = \pm e^{\pi i/m} \psi(\omega + i).$$

Ora al punto $\omega + i$ del piano u corrisponde, nel piano z , il punto $M'(z = Re^{-\pi i/m})$; dunque

$$\frac{\psi(\omega + i)}{\varphi(\omega + i)} = e^{-\pi i/m},$$

e questo esige che si adotti anche qui il segno superiore, scrivendo di conformità

$$(11) \quad \varphi(u + 2\omega) = e^{\pi i/m} \varphi(u).$$

Per l'altro integrale $\psi = z\varphi/R$ si ha immediatamente dalle (4) e (11)

$$(12) \quad \psi(u + 2\omega) = e^{-\pi i/m} \psi(u).$$

Aggiungendo alle (10), (11) la condizione di corrispondenza fra i punti $0, i$ del piano u ed N, N' ($z = 0, z = R$) del piano z , cioè

$$(13) \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = \frac{r}{R}, \quad \frac{\psi(i)}{\varphi(i)} = 1,$$

si ha quanto importa ritenere per la effettiva determinazione della funzione $z(u)$. Nella prima delle (13) è conveniente scrivere $\lim_{u \rightarrow 0}$, trattandosi di un punto singolare della equazione (E), nel quale — si noti bene — ogni integrale assume il valore zero: questo perchè gli esponenti caratteristici della (E), relativi al punto $u = 0$ hanno entrambi il valore $\frac{1}{2}$, e quindi un generico integrale, nelle vicinanze del detto punto, è della forma

$$u^{1/2}(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 \log u)$$

con \mathfrak{F}_1 e \mathfrak{F}_2 funzioni olomorfe.

Della esistenza (univoca, a meno di un comune cambiamento di segno) di due integrali φ e ψ della (E) soddisfacenti (per valori pure univocamente determinati dei parametri ω e B) alle (8), (11), (12) e (13) siamo assicurati dalla natura del procedimento, cioè (badando alla sostanza) dal principio di DIRICHLET, che, per aree del tipo σ , non dà ormai luogo a difficoltà alcuna.

6. - Considerazioni qualitative sugli integrali principali della (E) relativi ai punti $u = i$, $u = \omega$.

La funzione $\wp u$, avendo per periodi 2ω e $2i$, assume valori reali anche sulla retta $V=1$, cioè per u della forma $U+i$. Si ha in particolare, colle solite notazioni weierstrassiane,

$$\wp i = e_3, \quad \wp(i + \omega) = e_2.$$

Per ogni altro valore reale di U , $\wp(i + U)$ rimane compresa fra e_2 ed e_3 , ed è funzione pari della variabile U di periodo 2ω .

Risguardiamo, nella equazione (E), U come variabile indipendente, con che essa si può scrivere

$$\frac{d^2 f}{dU^2} = \left[\frac{1}{4} \wp(i + U) + B \right] f,$$

e prendiamo a considerare i due integrali principali $f_1(U)$, $f_2(U)$ relativi al punto $U=0$.

L'integrale $f_1(U)$, corrispondente alle condizioni iniziali

$$f_1(0) = 0, \quad f_1'(0) = 1,$$

risulterà ovviamente funzione dispari di U ; l'altro integrale $f_2(U)$, per cui

$$f_2(0) = 1, \quad f_2'(0) = 0,$$

risulterà invece pari.

I due integrali φ e ψ sono naturalmente esprimibili come combinazioni lineari di f_1, f_2 ; talchè si può considerare $z = R(\psi/\varphi)$ come funzione lineare fratta del rapporto

$$t = \frac{f_1}{f_2}.$$

Al variare di U da $-m\omega$ ad $m\omega$, z percorre la circonferenza C , partendo dal punto K' e ritornandovi dopo un giro completo percorso sempre nello stesso senso (yx).

Il rapporto

$$t = \frac{f_1}{f_2}$$

non può così assumere due volte uno stesso valore, tranne che per $U = \pm m\omega$. Ora f_1, f_2 restano entrambi finiti e non vanno contempora-

neamente a zero (perchè in tal caso si annullerebbe anche φ , mentre si è riconosciuto nel precedente § che ciò può aver luogo appena nei nodi).

Se ne conclude che, nell'intervallo $\pm m\omega$, f_1 ha l'unica radice $U=0$, f_2 le radici $\pm m\omega$, e queste soltanto.

Infatti, qualora f_1 si annullasse per altri valori di U , anche t riprenderebbe il valore zero, ciò che è appunto da escludere. Quanto a f_2 , se essa non fosse zero per $U = \pm m\omega$, t assumerebbe in questi punti valori finiti di segno opposto, e ciò darebbe necessariamente luogo a valori distinti di z . Che la stessa f_2 abbia queste due sole radici segue, come per f_1 , dalla univocità della corrispondenza.

Ciò posto, è facile constatare che deve sussistere la disuguaglianza

$$\frac{1}{4} e_2 + B > 0 .$$

Proviamoci infatti a supporre che sia invece

$$\frac{1}{4} e_2 + B \leq 0 .$$

Sarebbe a fortiori

$$\frac{1}{4} p(i + U) + B \leq 0$$

per tutti i valori reali di U . D'altra parte, in virtù della (E),

$$f_2''(U) = - \left[\frac{1}{4} p(i + U) + B \right] f_2(U) ,$$

e, siccome, per quanto s'è detto or ora, e per essere $f_2(0) = 1$, $f_2' > 0$ in tutto l'intervallo $\pm m\omega$ (estremi esclusi), così, in questo stesso intervallo,

$$f_2''(U) \geq 0 .$$

La funzione $f_2'(U)$ dovrebbe quindi crescere, o almeno non decrescere, al variare di U da 0 ad $m\omega$. Ma essa si annulla per $U=0$ e non è una costante [perchè, in tale ipotesi, si annullerebbe identicamente $f_2''(U)$, cioè addirittura $f_2(U)$, in causa della (E)]; sarebbe dunque $f_2'(U) \geq 0$. La funzione f_2 , che è già 1 per $U=0$ non potrebbe allora decrescere, e questo è assurdo, perchè essa deve invece scendere a zero per $U = m\omega$.

Siamo adesso in grado di approfondire il modo di comportarsi della (E) lungo l'asse reale, il che è ancora preparazione necessaria per il seguente §, dove si tratterà del gradiente.

Posto per maggior comodo

$$v = u - \omega ,$$

la (E) assumerà l'aspetto

$$\frac{d^2 f}{dv^2} + \left[\frac{1}{4} p(v - \omega) + B \right] f = 0,$$

e, restando $p(v - \omega)$ funzione pari anche dell'argomento v , i suoi integrali principali, relativi al punto $v = 0$, saranno uno pari, e l'altro dispari. Designeremo il primo con $f_2(v)$, il secondo con $f_1(v)$.

Come poc'anzi, $z = R(\psi/\varphi)$ si potrà riguardare funzione lineare fratta del rapporto

$$\frac{f_2(v)}{f_1(v)}.$$

Tenendo presente che al segmento $0, 2\omega$ dell'asse reale nel piano u , cioè al tratto di valori $-\omega, \omega$ dell'argomento v , corrisponde nel piano z l'arco di cerchio NN_{-1} , che la corrispondenza è univoca, e che $f_1(v), f_2(v)$ si annullano insieme soltanto nei nodi ($v = \pm \omega$) ⁽¹⁰⁾, si riconosce, con considerazioni del tutto analoghe a quelle usate per f_1, f_2 , che:

Nell'intervallo $-\omega, \omega$ (estremi esclusi) $f_2(v)$ non si annulla mai, $f_1(v)$ una volta sola (per $v = 0$); f_2 , che è 1 per $v = 0$, resta così sempre positiva; f_1 , che per $v = 0$ si annulla ed ha derivata prima positiva [$f_1'(0) = 1$], deve invece essere negativa fra $-\omega$ e 0, positiva fra 0 ed ω .

Ricordando che pu , lungo l'asse reale, non va mai al disotto di $e_1 (> e_2)$, la precedente disuguaglianza

$$\frac{1}{4} e_2 + B \geq 0$$

implica a fortiori, per qualsiasi valore reale di v ,

$$\frac{1}{4} p(\omega - v) + B > 0.$$

Dacchè la funzione $f_2(v)$ è sempre positiva fra $-\omega$ ed ω ,

$$f_2''(v) = - \left[\frac{1}{4} p(\omega - v) + B \right] f_2(v)$$

è invece negativa, quindi f_2' decrescente; ma essa f_2' si annulla per $v = 0$ e deve quindi risultare positiva nel tratto $-\omega, 0$; negativa nel successivo $0, \omega$.

⁽¹⁰⁾ Tutti gli integrali della (E) si annullano nei nodi. Lo abbiamo esplicitamente osservato alla fine del precedente paragrafo, riferendoci al punto $u = 0$. Lo stesso naturalmente vale per gli altri nodi, che sono congrui a zero rispetto al periodo 2ω .

Una parola ancora sui due rapporti

$$\frac{f_1(v)}{f_2(v)}, \quad \frac{f_1'(v)}{f_2'(v)}.$$

Nell'intervallo $0, \omega$ (nei punti interni al quale si mantengono entrambi finiti), essi sono crescenti.

Infatti, essendo il wronskiano

$$f_2(v)f_1'(v) - f_1(v)f_2'(v)$$

identicamente eguale all'unità, la derivata del primo rapporto si riduce a

$$\frac{1}{f_2'^2},$$

quella del secondo, in causa della (E), a

$$\frac{\frac{1}{4}[\wp(\omega - v) + B]}{f_2'^2},$$

l'una e l'altra quantità essenzialmente positive.

Fra 0 ed ω sarà per conseguenza crescente anche il prodotto

$$(14) \quad \tilde{\omega}(v) = \frac{f_1(v)f_1'(v)}{f_2(v)f_2'(v)}.$$

Per $v = 0$, il secondo membro si presenta sotto forma indeterminata, ma $\tilde{\omega}$ resta finita e continua, ed è precisamente

$$(14') \quad \tilde{\omega}(0) = -\frac{1}{\frac{1}{4}e_1 + B},$$

come si vede subito, tenendo presente che $f_2(0) = f_1'(0) = 1$, e trattando la frazione $f_1(v)/f_2'(v)$ colla regola del L'HÔPITAL.

7. - Estensione del campo σ per riflessione circolare. Comportamento del gradiente.

La funzione $z(u)$ realizza, come si è visto a § 3, la rappresentazione conforme del campo σ (reso semplicemente connesso col taglio KK') sopra il rettangolo \Re ($V=0, V=1; U=\pm m\omega$) del piano u .

Al lato $V=1$ del rettangolo corrisponde la circonferenza C (contorno esterno di σ).

Consideriamo il rettangolo \mathfrak{R}^0 , simmetrico di \mathfrak{R} , rispetto alla retta $V=1$ (che ha quindi per lati le rette $V=1$, $V=2$, $U=\pm m\omega$).

La funzione $z(u)$ è prolungabile analiticamente entro \mathfrak{R}^0 e vi resta uniforme, come si desume dalla

$$(5) \quad z(u+i) = \frac{R^2}{z(-u+i)},$$

immaginando di attribuire a $-u+1$ tutti i valori compresi in \mathfrak{R} (con che quelli di $u+i$ esauriscono \mathfrak{R}^0).

Se si nota che R^2/z è l'affissa del punto riflesso-coniugato di z rispetto all'asse x e al cerchio C , si desume dalla (5) che, al variare di u entro \mathfrak{R}^0 , $z(u)$ varia conformemente in un campo σ^0 , il quale non è altro che l'immagine (thomsoniana) di σ rispetto a C .

In particolare, ai punti della retta $V=2$ corrisponde un contorno T^0 , immagine di T , che risulta evidentemente costituito da m archi di cerchio tangenti ed esterni a C . Cambiando nella (5) u in $-u+i$ e derivando, si ha

$$(5') \quad \frac{d}{du} z(2i-u) = -\frac{R^2}{z^2} \frac{dz}{dU}.$$

Ciò posto, osserviamo che, per la monogeneità della relazione fra u e z , sussistono le identità

$$\frac{du}{dz} = \frac{dU}{dx} + i \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} + i \frac{dV}{dx},$$

e, quindi, prendendo i moduli,

$$\left| \frac{du}{dz} \right| = \Delta_1 V,$$

identità già invocata a pag. 346.

Fin dal § 1 si è avvertito che, per l'armonicità di $\log \Delta_1 V$, il massimo valore del gradiente cade certamente sul contorno del campo σ : su T o su C . Allora s'è anche aggiunto che ragioni di analogia e di simmetria indicavano i ventri di T come sedi di questi valori massimi.

È il momento di giustificare tali asserzioni.

Mostriamo in primo luogo che si può prescindere da C .

Giova all'uopo l'estensione al campo σ^0 della relazione funzionale fra u e z , offerta dalla (5).

Essa permette in particolare di riconoscere che il potenziale V , fisicamente definito nel campo σ , è analiticamente prolungabile anche nell'immagine σ^0 , e prende il valore costante $V=2$ sul contorno esterno T^0 . Come in σ , così in σ^0 (e sulla linea di separazione C) V è una funzione armonica e regolare, potendo fare eccezione i soli nodi di T e le loro immagini rispetto a C . Nelle stesse condizioni si trova la funzione $\log \Delta_1 V$. Perciò i valori estremi di $\Delta_1 V$, relativi all'intero campo σ , σ^0 , coincidono coi valori estremi, relativi al contorno, il quale consta delle due spezzate T e T^0 . Il valore minimo (corrispondente ad uno qualunque dei nodi di T o di T^0) è lo zero ⁽¹¹⁾.

Consideriamo d'altra parte i valori del gradiente in due punti (riflesso-coniugati) Q e Q^0 di T e T^0 rispettivamente (cui corrispondono nel piano u due punti U e $2i-U$, simmetrici rispetto alla retta $V=1$).

Scrivendo per brevità Δ , al posto di $\Delta_1 V$, ponendo cioè

$$(15) \quad \Delta = \Delta_1 V = \frac{du}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{du}},$$

ricaviamo dalla (5')

$$\Delta_{Q^0} = \frac{|z|^2}{R^2} \Delta_Q.$$

Siccome la $|z|$ di un punto generico Q di T è sempre $< R$, così i massimi del gradiente in T prevalgono necessariamente su quelli relativi a T^0 .

Rimane con ciò dimostrato che, per tutto il campo σ , σ^0 , e quindi a fortiori per il solo σ , i valori estremi del gradiente Δ si trovano sopra T .

Resta da confermare che, conformemente alla presunzione intuitiva, i massimi cadono proprio nei ventri.

Si noti intanto che, come la funzione potenziale V , così il $\Delta_1 V$ rimane inalterato per rotazioni di $2\pi/m$, talchè basta studiarne il comportamento sopra uno degli archi di cerchio, che costituiscono il contorno T : NMN_{-1} per esempio.

D'altra parte c'è pure simmetria rispetto ad ogni raggio ventrale; e perciò in punti Q , \bar{Q} di σ , simmetrici rispetto al raggio ventrale MM' , V e $\Delta_1 V$ prendono valori identici.

In virtù delle (3), si ha, per la funzione associata U ,

$$U_{\bar{Q}} = -U_Q + \text{cost.}$$

⁽¹¹⁾ Ciò risulta da proprietà generali, come già si è avvertito a § 1. Si può del resto verificarlo direttamente, ricorrendo alla (9). Essa mostra infatti che du/dz si annulla con φ ; e nei nodi si ha appunto $\varphi = 0$.

La costante ha il valore 2ω , come si vede facendo coincidere Q con N e quindi \bar{Q} con N_{-1} (oppure entrambi con M). Si può dunque scrivere

$$U_q - \omega = -(U_{\bar{q}} - \omega),$$

la quale non è del resto che un'ovvia combinazione delle (1'), (2'). Essa sta a dire, se si vuole, che a punti $U - \omega, V; -(U - \omega), V$ del piano u , simmetrici rispetto alla retta $U = \omega$, corrispondono, nel piano z , punti Q, \bar{Q} simmetrici rispetto al raggio ventrale MM' .

Ne viene che il gradiente Δ , in quanto si riguardi, come è evidentemente lecito, funzione delle due variabili $U_1 = U - \omega, V$, soddisfa alla relazione

$$\Delta(U_1, V) = \Delta(-U_1, V).$$

Siccome, per le (15) e (9),

$$(15') \quad \Delta = \frac{|\varphi^2|}{R},$$

risulteranno in particolare eguali — importa ritenerlo — i valori di $|\varphi^2|$ corrispondenti a valori reali ed opposti dell'argomento $u - \omega$.

Ciò premesso, riprendiamo per un momento i due integrali $f_1(v), f_2(v)$ ($v = u - \omega = U_1 + iV$) del § antecedente.

φ , che è combinazione lineare di f_1, f_2 , non può essere proporzionale ad f_1 , perchè f_1 , a differenza di φ , si annulla per $v = 0$, cioè in M . Sarà dunque essenzialmente diverso da zero, nella espressione di φ , il coefficiente k di f_2 , e si potrà quindi porre la espressione stessa sotto la forma

$$(16) \quad \varphi = k[f_2(v) + ihf_1(v)],$$

con h e k costanti.

Per v reale e compreso fra i due valori singolari $-\omega, \omega$, f_1 ed f_2 sono reali. Dette \bar{h} e \bar{k} le costanti coniugate ad h e k , avremo

$$|\varphi(v)|^2 = k\bar{k}[f_2^2 + h\bar{h}f_1^2 + i(h - \bar{h})f_2f_1],$$

da cui, cambiando v in $-v$ e tenendo presente che $|\varphi|^2$ deve con ciò rimanere inalterato, risulta subito $\bar{h} = h$, il che è quanto dire h costante reale.

Per determinare k e riconoscere in pari tempo che $h > 0$, conviene ricorrere alla circostanza che, variando v da $-\omega$ ad ω , $z = R(\psi/\varphi)$ percorre l'arco di cerchio NMN_{-1} . Sia A il centro del cerchio (fig. 1), $a = \overline{AN}$ il suo raggio, $b = \overline{OA}$ la distanza del centro del cerchio dall'origine.

La considerazione del triangolo OAN , rettangolo in N , porge ovviamente

$$(17) \quad a = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}, \quad b = \frac{r}{\cos \frac{\pi}{m}}.$$

Essendo $b e^{-\pi i/m}$ l'affissa del centro A ,

$$\frac{z - b e^{-\pi i/m}}{a} = e^{-\pi i/m} \frac{\frac{R}{a} e^{\pi i/m} \psi - \frac{b}{a} \varphi}{\varphi}$$

deve risultare unimodulare per i punti dell'arco suddetto.

Ora

$$\frac{R}{a} e^{\pi i/m} \psi - \frac{b}{a} \varphi$$

si può porre eguale a

$$k(k_2 f_2 + k_1 f_1),$$

designando k_1, k_2 due nuove opportune costanti.

Per $v = 0$ ($u = \omega$), $(z - b e^{-\pi i/m})/a$ si riduce a $e^{-\pi i/m}$, la frazione

$$\frac{\frac{R}{a} e^{\pi i/m} \psi - \frac{b}{a} \varphi}{\varphi}$$

a

$$k_2 e^{-\pi i/m},$$

dunque intanto $k_2 = 1$.

Bisogna così che $f_2 + k_1 f_1$ abbia lo stesso modulo di $\varphi = f_2 + i h f_1$, e ciò per qualunque valore di v compreso fra $-\omega$ ed ω ; se ne inferisce, cambiando v in $-v$, che devono essere insieme eguali i moduli di

$$f_2(v) \pm i h f_1(v),$$

e di

$$f_2(v) \pm k_1 f_1(v),$$

da cui subito

$$k_1 = \pm i h.$$

Non può valere il segno superiore, perchè in tal caso $(z - b e^{-\pi i/m})/a$, e quindi z , risulterebbe costante; dunque

$$k_1 = -ih$$

e rimane con ciò provata la identità

$$z - b e^{-\pi i/m} = a e^{-\pi i/m} \frac{f_2 - ihf_1}{f_2 + ihf_1}.$$

Avuto riguardo alle

$$(16) \quad \varphi = k(f_2 + ihf_1)$$

e

$$z = R \frac{\psi}{\varphi},$$

se ne trae

$$(16') \quad \psi - \frac{b}{R} e^{-\pi i/m} \varphi = \frac{a}{R} k e^{-\pi i/m} (f_2 - ihf_1);$$

dalle (16) e (16') si ha in particolare per $u = \omega$, cioè $v = 0$,

$$(18) \quad \varphi(\omega) = k, \quad \psi(\omega) = \frac{b}{R} (a + b) e^{-\pi i/m}.$$

Tenendo conto che $v = u - \omega$ e che i due wronskiani

$$\varphi \frac{d\psi}{du} - \psi \frac{d\varphi}{du},$$

$$f_2(v) f_1'(v) - f_1(v) f_2'(v)$$

sono entrambi eguali ad 1, si ha ancora dalle (16), (16')

$$1 = -\frac{2iha}{R} k^2 e^{-\pi i/m},$$

ossia

$$(19) \quad k^2 = i \frac{R}{2ah} e^{\pi i/m}.$$

A norma di questa eguaglianza e delle precedenti (18), la equazione

$$\frac{dz}{du} = \frac{R}{\varphi^2},$$

facendovi $u = \omega$, $du = idV$, dà

$$\frac{dz}{dV} = 2ah e^{-\pi i/m}.$$

Ora, lungo il raggio ventrale MM' , z ha l'argomento costante $-\pi/m$, talchè $ze^{\pi i/m}$ si presenta, lungo il detto raggio, come funzione di V positiva e crescente. Sarà quindi $d(ze^{\pi i/m})/dV$, e in particolare $2ah$, una quantità positiva.

Insomma

$$h > 0$$

giusta l'asserto.

Le (15'), (16) e (19) dànno

$$\Delta(U_1, 0) = \frac{f_2^2(v) + h^2 f_1^2(v)}{2ah} \quad (v = U_1),$$

donde

$$\frac{d\Delta}{dU_1} = \frac{1}{ah} (f_2 f_2' + h^2 f_1 f_1'),$$

la quale, ricordando la posizione (14) nel § precedente,

$$\tilde{\omega} = \frac{f_1 f_1'}{f_2 f_2'},$$

può anche essere scritta

$$\frac{d\Delta}{dU_1} = \frac{1}{ah} f_2 f_2' \{1 + h^2 \tilde{\omega}\}.$$

Sotto questa forma sarà facile riconoscere che $d\Delta/dU_1$, la quale si annulla per $U_1 = 0$, resta poi costantemente negativa fino ad $U_1 = \omega$.

Esaminiamo perciò come si comportano i singoli fattori fra $U_1 = 0$ e $U_1 = \omega$:

$1/ah$ è una costante positiva;

f_2 è sempre positiva;

f_2' è sempre negativa;

quanto al binomio $1 + h^2 \tilde{\omega}$, esso è intanto crescente, tale essendo $\tilde{\omega}$.
Se dunque già

$$1 + h^2 \tilde{\omega}(0) \geq 0,$$

risulterà senz'altro $d\Delta/dU_1 < 0$ ($0 < U_1 < \omega$).

La constatazione della disuguaglianza

$$1 + h^2 \tilde{\omega}(0) \geq 0,$$

può farsi nel modo seguente.

Anzitutto, essendo $f_2(v)$ funzione pari, $f_1(v)$ funzione dispari di v , per v puramente immaginario, cioè u della forma $\omega + iV$, $f_2(v)$ e $if_1(v)$ riescono reali.

La (16) ci assicura così che

$$\frac{\varphi(\omega + iV)}{k} = f_2(iV) + ihf_1(iV)$$

è una funzione reale di V , la quale per $V=0$ si riduce all'unità, mentre la sua derivata rispetto a V ha per valore $-h$. Facendo variare V da 0 a 2 (con che z procede lungo il raggio MM' traversando C , fino ad arrivare sul contorno T^0 immagine di T), φ non si annulla; φ/k (che è 1 per $V=0$) resta perciò costantemente positiva, e la sua derivata logaritmica

$$(20) \quad \chi(V) = i \frac{\varphi'(\omega + iV)}{\varphi(\omega + iV)},$$

che ha il valore $-h$ per $V=0$, ci si presenta nell'intervallo (0, 2) come funzione reale e regolare di V .

Derivando ancora rapporto a V , si ha

$$\frac{d\chi}{dV} = -\frac{\varphi''}{\varphi} + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2,$$

ossia, per le (E) e (20),

$$(21) \quad \frac{d\chi}{dV} = \frac{1}{4} p(\omega + iV) + B - \chi^2.$$

S'è già notato che $\chi(0) = -h$. Le proprietà caratteristiche di φ e ψ , espresse dalle (8), (10), (11), permettono di valutare anche $\chi(2)$. Poniamo a tale scopo $u + i$ al posto di u nella (8) e scriviamola sotto la forma

$$\frac{\psi'(u + i)}{\psi(u + i)} - \frac{\varphi'(u + i)}{\varphi(u + i)} = \frac{1}{\varphi(u + i)\psi(u + i)}.$$

Si ha, per le (10), (11),

$$\frac{\psi'(u + i)}{\psi(u + i)} = -\frac{\varphi'(-u + i)}{\varphi(-u + i)} = -\frac{\varphi'(2\omega - u + i)}{\varphi(2\omega - u + i)},$$

e così, dalla precedente relazione, moltiplicando per $-i$, segue

$$i \frac{\varphi'(2\omega - u + i)}{\varphi(2\omega - u + i)} + i \frac{\varphi'(u + i)}{\varphi(u + i)} = \frac{-i}{\varphi(u + i)\psi(u + i)}.$$

Facendovi $u = -i + \omega$ e avendo riguardo alla (20) e alla $\chi(0) = -h$, se ne ricava

$$\chi(2) = h - \frac{i}{\varphi(\omega)\psi(\omega)},$$

donde, per le (18) e (19),

$$\chi(2) = h - \frac{2ha}{a + b}.$$

Siccome, per le (17),

$$\frac{a}{a + b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{m}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{m} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{m}}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{m}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}},$$

così viene in definitiva

$$\chi(2) = h \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}} > 0.$$

Quel che importa fissare è che, quando V varia da 0 a 2, la funzione $\chi(V)$ passa dal valore negativo $-h$ ad un valore positivo; $d\chi/dV$ deve perciò essere positiva, almeno in una qualche porzione dell'intervallo.

L'equazione (21) porta a concludere che, già per $V = 0$, $d\chi/dV \geq 0$

Proviamoci infatti a supporre il contrario. Siccome nell'intervallo 0, 2 vi sono certo dei punti, in cui $d\chi/dV$ è positiva, così, facendo crescere V da 0 a 2, si incontrerebbe un primo valore V_0 , in cui $d\chi/dV = 0$, essendo, da 0 a V_0 , $d\chi/dV$ negativa.

Questo è assurdo, perchè, dall'essere $d\chi/dV$ negativa fra 0 e V_0 , risulterebbe $\chi(V_0) < \chi(0) = -h$, e quindi

$$-\chi^2(V_0) < -h^2.$$

D'altra parte

$$p(\omega + iV_0) \leq e_1$$

(perchè la p di argomento $\omega + iV$ resta compresa fra e_1 ed e_2), e ne verrebbe, attesa la (21),

$$\left(\frac{d\chi}{dV}\right)_{r=r_0} = \frac{1}{4} p(\omega + iV_0) + B - \chi^2(V_0) < \frac{1}{4} e_1 + B - h^2,$$

ossia, siccome, per la (21) stessa, si ha

$$\frac{1}{4} e_1 + B - h^2 = \left(\frac{d\chi}{dV}\right)_{r=0},$$

dovrebbe risultare $(d\chi/dV)_{r=r_0}$ negativa, anzichè nulla.

La disuguaglianza, così constatata,

$$\left(\frac{d\chi}{dV}\right)_{r=0} \geq 0,$$

cioè

$$\frac{1}{4} e_1 + B - h^2 \geq 0,$$

per la (14) del § precedente, porge appunto

$$1 + h^2 \tilde{\omega} \geq 0$$

c. d. d.

Così finalmente rimane dimostrato che il gradiente Δ , funzione pari di U_1 , va proprio sempre decrescendo da 0 a $\pm \omega$, cioè, riferendosi all'intero contorno T , da ciascun ventre fino ai nodi.

Data la forma del campo, non si saprebbe concepire un andamento diverso, ma è anche spiegabile che la dimostrazione matematica abbia richiesto l'intervento di tanti elementi qualitativi, trattandosi di una proprietà, che non è locale, ma dipende (come funzione di linea) dall'intero contorno.

8. - Trasformazione della equazione (E).

Criterio di integrazione per approssimazioni successive.

Dalla teoria delle funzioni ellittiche si ha ⁽¹²⁾

$$pu + \frac{\eta}{\omega} = \left(\frac{\pi}{2\omega^2}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi u}{2\omega}} - 2 \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \sum_1^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1 - q^{2n}} \cos n \frac{\pi u}{\omega}$$

col consueto significato di η e di q : η semiperiodo di seconda specie,

⁽¹²⁾ HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, vol. I, pag. 426.

$q = e^{-i\pi\omega'/\omega}$. Nel caso presente, essendo $\omega' = i$, si deve ritenere in particolare

$$(22) \quad q = e^{-\pi/\omega},$$

e la precedente espressione di pu valida in tutta la striscia compresa fra le due parallele all'asse reale $V = \pm 2$.

Ponendo

$$(23) \quad -2 \sum_1^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \cos n \frac{\pi u}{\omega} = Q$$

e sostituendo al parametro B un'analogha indeterminata γ , legata a B dalla relazione

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 (1-\gamma)^2 = B - \frac{1}{4} \frac{\eta}{\omega},$$

la equazione (E) diviene

$$(E') \quad \frac{d^2 f}{du^2} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left[\frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi u}{2\omega}} + (1-\gamma)^2 + 2Q \right] f = 0.$$

Essendo ω essenzialmente positivo, la q , definita dalla (22), risulta in ogni caso positiva e < 1 . La (23) mostra allora che, mentre u varia sopra l'asse reale,

$$|Q| \leq 2 \sum_1^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} < \frac{2}{1-q^2} \sum_1^{\infty} nq^{2n} = \frac{2q^2}{(1-q^2)^3}.$$

Più in generale, se si fa variare u entro la striscia $V=0$, $V=1$, varranno le disuguaglianze

$$\left| \cos n \frac{\pi u}{\omega} \right| \leq \frac{e^{n\pi/\omega} + e^{-n\pi/\omega}}{2},$$

donde, in virtù delle (22) e (23),

$$q^n \left| \cos n \frac{\pi u}{\omega} \right| \leq \frac{1+q^{2n}}{2},$$

$$|Q| \leq \sum_1^{\infty} nq^n \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}} < \frac{1+q^2}{1-q^2} \sum_1^{\infty} nq^n = q \frac{1+q^2}{(1-q^2)(1-q)^2}.$$

Ritenuto questo quanto al valore numerico di Q , immaginiamo di generalizzare la equazione (E') riguardandovi q , non come l'esponentiale (22), ma come un parametro indipendente $\sqrt{\lambda}$. La Q si presenta allora come una funzione olomorfa di u e di λ

$$Q(u, \lambda) = -2 \sum_1^{\infty} \frac{n\lambda^n}{1-\lambda^n} \cos n \frac{\pi u}{\omega},$$

che si annulla per $\lambda = 0$.

Per la integrazione della equazione generalizzata

$$(E_{\lambda}) \quad \frac{d^2 f}{du^2} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left[\frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi u}{2\omega}} + (1-\gamma)^2 + Q(u, \lambda) \right] f = 0$$

e conseguente determinazione di φ , ψ , ω e γ in base alle (8), (11), (12) e (13), si può procedere per approssimazioni successive a partire dal valore $\lambda = 0$.

Occupiamoci intanto della prima approssimazione.

9. - Riducibilità, per $\lambda = 0$, alla equazione ipergeometrica di Gauss. Corrispondenti espressioni di φ , ψ e z . Determinazione delle costanti.

Per $\lambda = 0$ si ha identicamente

$$Q(u, \lambda) = 0,$$

e la equazione (E_λ), cambiandovi ad un tempo la variabile indipendente u in ξ e la funzione incognita f in τ , a norma delle formole

$$(24) \quad e^{i\pi u/\omega} = \xi,$$

$$(25) \quad f = \xi^{(\gamma-1)/2} (1-\xi)^{1/2} \tau,$$

diviene

$$(G) \quad \xi(1-\xi) \frac{d^2 \tau}{d\xi^2} + [\gamma - (1+\gamma)\xi] \frac{d\tau}{d\xi} - \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4}\right) \tau = 0.$$

Basta ora confrontare colla equazione ipergeometrica

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 \tau}{d\xi^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\xi] \frac{d\tau}{d\xi} - \alpha\beta\tau = 0$$

per riconoscere che siamo di fronte al caso particolare, in cui

$$(26) \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \gamma - \frac{1}{2},$$

ovvero

$$\alpha = \gamma - \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} :$$

terremo, per fissar le idee, i valori (26).

Ricordiamo ⁽¹³⁾ che, per $1 - \gamma$ non intero, all'integrale generale della equazione ipergeometrica si può attribuire la forma:

$$c_1 \xi^{1-\gamma} F(\beta + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma, \xi) + c_2 F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$$

designando col solito simboli $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ la serie di GAUSS

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} \xi + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 \cdot 2} \frac{\beta(\beta + 1)}{\gamma(\gamma + 1)} \xi^2 + \dots,$$

e con c_1, c_2 due costanti arbitrarie. Se ne trae, per la nostra equazione

$$(G) \quad \tau = c_1 \xi^{1-\gamma} F\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + (1 - \gamma), 2 - \gamma, \xi\right] + c_2 F\left(\frac{1}{2}, \gamma - \frac{1}{2}, \gamma, \xi\right),$$

e, sostituendo nella (26), ove si scriva, per maggior simmetria, 2δ al posto di $1 - \gamma$,

$$f = (1 - \xi)^{1/2} \left[c_1 \xi^\delta F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2\delta, 1 + 2\delta, \xi\right) + c_2 \xi^{-\delta} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 2\delta, 1 - 2\delta, \xi\right) \right].$$

Per trar partito di questo risultato, conviene riattaccarsi alle cose precedenti e in particolare al § 5.

Osserviamo anzi tutto che, in virtù della (24), quando si fissa per u un valore qualunque e lo si fa aumentare di 2ω , la ξ riprende il valore iniziale.

Se in particolare si parte da un valore u , compreso nella striscia $V=0, V=1$, e si passa al valore $u + 2\omega$ senza uscire dalla striscia e senza toccare l'asse reale, nel piano della variabile ξ , si descrive attorno all'origine un cammino chiuso, contenuto entro la circonferenza di raggio 1. Questo perchè, se $V > 0$, la parte reale di $i(\pi u/\omega)$ è negativa, e quindi $|\xi| < 1$; la parte immaginaria, cioè l'argomento di ξ , aumenta appunto di 2π mentre u aumenta di 2ω .

⁽¹³⁾ Cfr. per es. SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Bd. I, pag. 255.

Ciò posto, ricordiamo che gli integrali φ e ψ della equazione (E), considerati come funzioni di u , debbono tra altro essere uniformi nella striscia $V=0$, $V=1$ e verificare le equazioni funzionali (11), (12).

Quando si risguardino funzioni di ξ , pel tramite della (24), non si potranno più ritenere uniformi; le (11) e (12) ne mettono al contrario in evidenza la polidromia.

Fissiamo per es. la funzione φ .

La corrispondente equazione (11), riportata al piano ξ , mostra che la φ resta moltiplicata per $e^{\pi i/m}$ quando si descrive un cammino chiuso, entro il cerchio $|\xi|=1$, girando una volta attorno all'origine nel senso positivo, facendo cioè aumentare di 2π l'argomento di ξ .

Del pari la ψ resta moltiplicata per $e^{-\pi i/m}$.

Cerchiamo di determinare due integrali indipendenti φ e ψ della equazione (G) [che è poi la (E $_{\lambda}$), per il valore zero del parametro λ] dotati di queste proprietà.

Intanto, essi debbono rientrare nella precedente espressione di f , o in quella (affetta da termine logaritmico), che corrisponderebbe all'ipotesi $1-\gamma=2\delta$ numero intero. Questa seconda eventualità è da rigettare senz'altro, perchè uno almeno dei due integrali φ , ψ conterrebbe un termine in $\log \xi$ e non potrebbe quindi subire, come ovviamente si riconosce, una sostituzione puramente moltiplicativa, girando attorno all'origine.

φ e ψ vanno dunque cercati nell'ambito della precedente espressione di f , per opportuna determinazione delle costanti c_1 , c_2 e del parametro $\delta = (1-\gamma)/2$.

La (11), notando che $(1-\xi)^{\frac{1}{2}}$, $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm 2\delta, 1 \pm 2\delta, \xi)$ sono funzioni monodrome di ξ entro il cerchio $|\xi|=1$, dà luogo alla relazione

$$c_1(e^{2\pi\delta i} - e^{\pi i/m})F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2\delta, 1 + 2\delta, \xi\right) + c_2(e^{-2\pi\delta i} - e^{\pi i/m})F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 2\delta, 1 - 2\delta, \xi\right) = 0.$$

Le due serie ipergeometriche sono certo indipendenti (non potendo essere 2δ numero intero e quindi nemmeno zero), e ciò esige che sia separatamente

$$c_1(e^{2\pi\delta i} - e^{\pi i/m}) = 0,$$

$$c_2(e^{-2\pi\delta i} - e^{\pi i/m}) = 0.$$

Siccome non possono annullarsi insieme c_1 e c_2 , perchè ne discenderebbe $\varphi = 0$, supporremo

$$c_1 \neq 0,$$

con che la prima equazione equivale a

$$\delta = \frac{1}{2m} + j \quad (j \text{ numero intero});$$

la seconda porge allora $c_2 = 0$, e ne risulta (ritenuto per δ il valore $1/(2m) + j$)

$$\varphi = c_1(1 - \xi)^{1/2} \xi^\delta F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2\delta, 1 + 2\delta, \xi\right),$$

cui egualmente si giunge, salvo uno scambio materiale nella notazione, supponendo $c_2 \neq 0$.

In modo perfettamente analogo si trova

$$\psi = c_2(1 - \xi)^{1/2} \xi^{-\delta} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 2\delta, 1 - 2\delta, \xi\right),$$

restando ancora arbitrarie le due costanti c_1 e c_2 .

Fino ad ora è rimasto indeterminato il numero intero j , ma è facile vedere, riprendendo per un momento la variabile u , che deve essere $j = 0$. Noi vogliamo infatti che ψ e φ si comportino come quei due integrali della (E), per mezzo dei quali si esprime la funzione z , a norma della formula

$$z = R \frac{\psi}{\varphi}.$$

Si esige in particolare che l'argomento di z si incrementi di $-2\pi/m$ (variando sempre nel medesimo senso) quando u , sopra una parallela all'asse reale, percorre un segmento di ampiezza 2ω . Ora, cogli attuali ψ e φ , z si presenta sotto la forma $e^{-2\pi i \delta u/\omega} \times$ funzione di u , uniforme e periodica.

Bisogna dunque che si attribuisca ad j il valore zero, giusta l'asserto.

Completiamo la determinazione delle costanti, trattando φ e ψ , come se fossero gli integrali della (E).

Avremo, designando con c il rapporto c_2/c_1 ,

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = c_1(1 - \xi)^{1/2} \xi^{1/2m} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right), \\ \psi = cc_1(1 - \xi)^{1/2} \xi^{-1/2m} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right), \\ z = R \frac{\psi}{\varphi} = cR \xi^{-1/m} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right)}, \end{array} \right.$$

e il nostro compito sarà di calcolare, in base alle (8) e (13), le tre costanti c , c_1 ed ω , che compariscono nei secondi membri (la ω pel tramite di $\xi = e^{i\pi u/\omega}$).

La (8) dà

$$(29) \quad \varphi \frac{d\psi}{du} - \psi \frac{d\varphi}{du} = i \frac{\pi}{\omega} \xi \left(\varphi \frac{d\psi}{d\xi} - \psi \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = 1,$$

donde in particolare

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \left(\varphi \frac{d\psi}{d\xi} - \psi \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = -i \frac{\omega}{\pi}.$$

Ma, dalle (28), badando che $(1 - \xi)^{1/2}$ e le F sono regolari e si riducono all'unità per $\xi = 0$, si ha subito

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \left(\varphi \frac{d\psi}{d\xi} - \psi \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = -\frac{cc_1^2}{m}.$$

La (29) si riduce così a

$$(29') \quad c_1^2 = i \frac{m\omega}{\pi c}.$$

Esprimiamo adesso che sono soddisfatte le (13).

Verrà ovviamente, badando che $\xi = e^{i\pi u/\omega}$ e che all'incognita ω si può sostituire $q = e^{-\pi/\omega}$,

$$c = q^{1/m} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, q\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, q\right)},$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} c \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right)} = \frac{r}{R},$$

le quali equivalgono a

$$(30) \quad q^{1/m} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, q\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, q\right)} = \frac{r}{R} e^\mu,$$

$$(31) \quad c = \frac{r}{R} e^\mu,$$

ove si intende posto

$$(32) \quad e^\mu = \lim_{\xi=1} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right)}.$$

Per assegnare il valore del limite indicato nel secondo membro, conviene richiamare dalla teoria della funzione ipergeometrica la identità

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - \xi) = C_1 \xi^{1-\gamma} F(\beta - \gamma + 1, \alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, \xi) + C_2 F(\alpha, \beta, \gamma, \xi),$$

in cui (designandosi al solito con Γ la funzione euleriana di seconda specie)

$$C_1 = \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1) \Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)},$$

$$C_2 = \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1) \Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(\beta - \gamma + 1) \Gamma(\alpha - \gamma + 1)}.$$

La identità vale per $|\xi| < 1$ e per qualunque terna di parametri α, β, γ , purchè soltanto $1 - \gamma$ non sia intero, $\alpha + \beta - \gamma + 1$ non sia zero, nè intero negativo ⁽¹⁴⁾, condizioni queste evidentemente verificate dai nostri parametri $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2} - 1/m, \gamma = 1 - 1/m$. Essi danno in particolare, notando che $\Gamma(1) = 1$,

$$C_1 = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)}, \quad C_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)},$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1, 1 - \xi\right) = C_1 \xi^{1/m} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right) + C_2 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right).$$

Le due funzioni

$$\xi^{1/m} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right),$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right),$$

⁽¹⁴⁾ SCHLESINGER, loc. cit., pp. 481-482.

sono integrali indipendenti della equazione ipergeometrica per i detti valori di α, β, γ . I due esponenti caratteristici, relativi al punto singolare $\xi = 1$, cioè 0 e $\gamma - \alpha - \beta$ vengono, per questi valori, a coincidere.

Ne viene che uno almeno dei due integrali

$$\xi^{1/m} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right),$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right),$$

crebbe indefinitamente (in valore assoluto) quando ξ converge verso 1. (Essi possono infatti riguardarsi come combinazioni lineari indipendenti dei due integrali canonici, relativi al punto singolare $\xi = 1$: uno regolare, e l'altro della forma $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 \log(\xi - 1)$, con $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ regolari e \mathfrak{F}_2 non nullo, per $\xi = 1$).

Supponiamo di conformità che sia per es.

$$\lim_{\xi=1} \left| F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right) \right| = \infty,$$

e riprendiamo la formula precedente, immaginando di dividere da una parte e dall'altra per

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right)$$

e di far poi convergere ξ verso 1 lungo l'asse reale (o più generalmente dall'interno del cerchio $|\xi| = 1$).

Il limite del primo membro è zero e ne risulta quindi

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi=1} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right)} \\ &= -\frac{C_2}{C_1} = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)}. \end{aligned}$$

Alla stessa relazione (invertiti soltanto i termini di ciascuna frazione) si arriva, appoggiandosi sull'ipotesi che cresca indefinitamente l'altro integrale

$$\xi^{1/m} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right).$$

La (32) assume così l'aspetto

$$e^\mu = - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)}.$$

Ma conviene trasformarla ancora, ricorrendo a note proprietà della funzione Γ .

Ricordiamo le formule

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x), \\ \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} 2^{1-2x}\Gamma(2x),\end{aligned}$$

e sostituiamo nella prima $\pm 1/m$, nella seconda $\frac{1}{2} \pm 1/m$, al posto di x , portando i valori di $\Gamma(\pm 1/m)$, $\Gamma(\frac{1}{2} \pm 1/m)$, che così si ricavano, nella espressione di e^μ . Si ottiene

$$e^\mu = 2^{4/m} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{m}\right)\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{m}\right)},$$

donde

$$(32') \quad \mu = \frac{4}{m} \log 2 + \log \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right)} - 2 \log \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)},$$

formula convenientissima per calcolare comodamente μ , usando le tavole della funzione $\log \Gamma$ ⁽¹⁵⁾.

Ci dovremo anche servire dello sviluppo di μ per potenze di $1/m$. Per assegnarlo, partiamoci dalla nota serie

$$\log \Gamma(1+x) = -Cx + \frac{s_2 x^2}{2} - \frac{s_3 x^3}{3} + \dots,$$

dove C rappresenta la costante di MASCHERONI, e s_2, s_3, \dots le somme delle inverse dei quadrati, cubi, ... dei numeri naturali.

⁽¹⁵⁾ Cfr. per es. LEGENDRE, *Exercices de Calcul intégral*, Paris, 1811, t. I, pp. 502-506.

Se ne trae

$$\log \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right)} = 2 \left[C \frac{2}{m} + \sum_1^{\infty} \frac{s_{2\nu+1}}{2\nu+1} \left(\frac{2}{m}\right)^{2\nu+1} \right],$$

$$2 \log \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = 4 \left[C \frac{1}{m} + \sum_1^{\infty} \frac{s_{2\nu+1}}{2\nu+1} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\nu+1} \right],$$

e quindi in definitiva

$$(32'') \quad \mu = \frac{4}{m} \log 2 + 4 \sum_1^{\infty} \frac{s_{2\nu+1}}{2\nu+1} \frac{2^{2\nu} - 1}{m^{2\nu+1}}$$

($s_3 = 1,2020 \dots$, $s_5 = 1,0369 \dots$, ...).

Ottenuto così il valore numerico di μ , si ha direttamente quello di c dalla (31), mentre resta ancora da ricavare q dalla equazione implicita (30).

Essa ammette una ed una sola radice compresa fra zero e

$$(33) \quad \zeta = \left(\frac{r}{R}\right)^m e^{m\mu}.$$

Per dimostrarlo, cominciamo col ricordare dalle (28) e (31) che il primo membro della equazione (30) altro non è che

$$\frac{r}{R} e^{\mu} \frac{\varphi(q)}{\psi(q)}.$$

Ora il rapporto $\varphi(q)/\psi(q)$, che, per

$$0 < q < 1,$$

si presenta come funzione reale, regolare di q , va sempre crescendo con q , perchè la sua derivata, che, a norma della (29), vale

$$-\frac{1}{i \frac{\pi}{\omega} q \psi^2},$$

resta sempre positiva, come mostrano ovviamente le (28), (29') e (31).

Notiamo d'altra parte che, nel suddetto intervallo $0 < q < 1$, il rap-

porto delle due serie ipergeometriche

$$\frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, q\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, q\right)}$$

è sempre superiore all'unità ⁽¹⁶⁾, mentre ha il valore 1 per $q = 0$.

Da questa osservazione si raccoglie che il primo membro della (30)

$$q^{1/m} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, q\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, q\right)}$$

è zero per $q = 0$; varia poi sempre crescendo, ed assume per $q = \zeta$ un valore già superiore a $\zeta^{1/m} = (r/R)e^\mu$, cioè al secondo membro.

Il valore di q , definito dalla (30), è dunque minore di ζ . La sua espressione esplicita può essere posta sotto forma di serie precedente per le potenze di ζ , come si riconosce subito, scrivendo la (30) sotto la forma

$$q \frac{F^m\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, q\right)}{F^m\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, q\right)} = \zeta.$$

Il primo membro è con ciò diventato una funzione regolare di q , che si annulla per $q = 0$ ed ha la derivata eguale all'unità, il che basta ad assicurare la sviluppabilità in serie di ζ della radice q . Più precisamente, immaginando di esplicitare le serie ipergeometriche, si ha

$$q \left[1 + \frac{q}{2m \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)} + \dots \right] = \zeta,$$

⁽¹⁶⁾ Si tratta infatti di due serie a termini positivi, tali che il termine generale del numeratore supera il corrispondente del denominatore: questo poi segue direttamente dal loro confronto, purchè soltanto si tenga conto che, per qualsiasi numero positivo j , sussiste la disuguaglianza

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + j}{1 + \frac{1}{m} + j} > \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{m} + j}{1 - \frac{1}{m} + j}.$$

donde

$$(30') \quad q = \zeta \left[1 - \frac{\zeta}{2m \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)} + \dots \right],$$

i termini omissi entro parentesi essendo d'ordine superiore al primo in q e ζ rispettivamente.

Ne viene, in virtù della (33),

$$(30'') \quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= -\frac{\pi}{\log q} = -\frac{\pi}{\log \zeta - \frac{\zeta}{2m \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)} + \dots} \\ &= \frac{\frac{\pi}{m}}{\log R - \log r - \mu + \frac{\zeta}{2 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)} + \dots} \end{aligned} \right.$$

10. - Ritorno alla equazione (E_λ) . Soluzione rigorosa del problema.

La equazione (E_λ) è lineare, a coefficienti periodici (di periodo 2ω) e contiene i due parametri λ e γ .

Combinando i risultati di POINCARÉ sulle equazioni differenziali, che dipendono da parametri, con considerazioni note della teoria delle equazioni lineari, si arriva facilmente a stabilire che:

1) Esistono due integrali di (E_λ) f_1, f_2 periodici di seconda specie a moltiplicatori reciproci, tali cioè che si ha

$$\begin{aligned} f_1(u + 2\omega) &= e^\eta f_1(u), \\ f_2(u + 2\omega) &= e^{-\eta} f_2(u), \end{aligned}$$

con η indipendente da u .

2) f_1, f_2 e così η sono sviluppabili in serie di potenze di λ (convergenti per $|\lambda| < e^{-2\pi/\omega}$, comunque vari u nella striscia $V=0, V=1$). Essi dipendono poi da γ in modo regolare (per qualsiasi valore finito di questo parametro).

Ciò posto, è ben chiaro che, per soddisfare alle (11), (12), (13), e (8), basta porre

$$\varphi = c_1 f_1, \quad \psi = c_1 c f_2 \quad (c_1, c \text{ costanti})$$

e determinare anzitutto γ mediante la condizione

$$\eta(\gamma, \lambda) = \frac{\pi i}{m} \quad (17).$$

Si avrà poi dalle (13)

$$c = \frac{r}{R} \lim_{u=0} \frac{f_1(u)}{f_2(u)},$$

nonchè

$$\frac{f_1(i)}{f_2(i)} = \frac{r}{R} \lim_{u=0} \frac{f_1(u)}{f_2(u)},$$

la quale ultima serve alla determinazione di ω ; si ricaverà infine anche il valore di γ , esprimendo che il wronskiano di φ , ψ è eguale all'unità.

Si ottengono in tal modo espressioni di γ , c , ω e c_1^2 sviluppabili in serie di potenze di λ , almeno per λ abbastanza piccolo.

Ometto la dimostrazione, che non ha diretto interesse per il nostro problema. In esso infatti si deve, in virtù della (22), ritenere

$$\lambda = q^2 = e^{-2\pi i/\omega}.$$

Convieni dunque fare questa sostituzione già nelle precedenti equazioni, ricavandone così direttamente i valori numerici di γ , c , ω e c_1^2 . Sulla possibilità della univoca determinazione di questi valori non occorre spender parola: ne è garante, come già abbiamo avuto occasione di osservare a § 5, la natura della questione, il che è quanto dire, dal punto di vista matematico, il principio di DIRICHLET.

11. - Soluzione approssimata, che si ottiene trascurando ζ^2 , o addirittura ζ . Presumibile entità numerica dell'errore.

Facciamo il confronto fra la soluzione rigorosa, testè tratteggiata, e quella del § 9, che corrisponde alla posizione ipotetica $\lambda = 0$.

Richiamiamo dal detto § la circostanza che, per $\lambda = 0$, tutti gli elementi incogniti si presentano sviluppati in serie di potenze della costante

$$\zeta = \left(\frac{r}{R}\right)^m e^{m\mu}.$$

(17) È facile riconoscere che η dipende da γ e da λ , e non da ω , notando che ω si può far sparire dalla equazione (E₁) mediante il cambiamento di variabile $v = \pi u/2\omega$.

Quando λ è > 0 , e abbastanza piccolo, avremo più generalmente, secondo le conclusioni testè accennate, sviluppi procedenti per ζ e per λ .

In particolare $q(\lambda, \zeta)$ si potrà considerare come funzione di λ , dipendente dal parametro ζ , regolare per $\lambda = 0$ e riducentesi alla espressione (30').

Ma deve sussistere la relazione

$$\lambda = q^2,$$

e questa, interpretata come equazione implicita in λ , mostra che λ è di secondo ordine in ζ .

Se dunque si conviene di trascurare i termini in

$$\zeta^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^{2m} e^{2m\mu},$$

si potrà riportarsi senz'altro alla prima approssimazione e ritenere inoltre, al posto delle (30) e (30''), le espressioni seguenti di q e di ω :

$$q = \zeta = \left(\frac{r}{R}\right)^m e^{m\mu},$$

$$\omega = \frac{\frac{\pi}{m}}{\log R - \log r - \mu + \frac{\zeta}{2\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}}.$$

Il valore numerico di ζ risulta in pratica assai piccolo, perchè r/R è molto minore di $\frac{1}{2}$, $m \geq 6$, e, in virtù della espressione (32'') di μ , $e^{m\mu}$ supera di poco (da $m = 12$ in poi) $e^{4 \log 2} = 16$. [Nel caso più sfavorevole $m = 6$, si ha $e^{m\mu} = 18,285 \dots$, e, supponendo $r/R \leq \frac{1}{4}$, riesce già $(r/R)^m e^{m\mu} < 0,005$].

L'errore, cui si va incontro, trascurando ζ^2 , è naturalmente di questo ordine. A rigore, bisognerebbe fissarne un limite superiore numerico. Con criterio certo meno preciso, ma pur espressivo, ci limiteremo, ad osservare quanto segue:

La nostra prima approssimazione ($\lambda = 0$) ⁽¹⁸⁾ riposa, si può dire, sopra un'unica semplificazione, quella di sopprimere nella equazione (E') il termine Q ; tutto il resto si mantiene esatto.

⁽¹⁸⁾ Considerata, si intende bene, per sè stessa, indipendentemente dalle aggiunte del presente paragrafo.

A calcoli fatti si riscontra che $|Q|$ è effettivamente piccolo, minore in tutti i casi di

$$q \frac{1 + q^2}{(1 - q^2)(1 - q)^2},$$

per quanto s'è visto a § 8, e quindi, per essere (§ 9) $q < \zeta$, minore, a più forte ragione, di

$$\frac{\zeta(1 + \zeta^2)}{(1 - \zeta^2)(1 - \zeta)^2} < 2\zeta \quad \left(\text{per } \zeta < \frac{1}{4} \right).$$

Ciò giustifica a posteriori l'attendibilità del procedimento approssimativo, risultante dal porre $\lambda = 0$, e conduce in pari tempo a riguardare lo stesso $|Q|$, od anche addirittura 2ζ , come misura dell'errore.

Sotto questo punto di vista, si può specificare maggiormente, usufruendo la limitazione

$$|Q| < \frac{2q^2}{(1 - q^2)^3},$$

trovata per i valori reali di u .

Corrispondendo questi valori ai punti del contorno interno T , si ha ivi un errore non superiore a $2q^2/(1 - q^2)^3$, cioè a $2\zeta^2/(1 - \zeta^2)^3$. Minore esattezza si può presumere mano mano che si procede verso il contorno esterno C , ma l'errore resta sempre al disotto di 2ζ .

Se — e questo sarà appunto il caso nostro — non si aspira a rendere proprio di secondo ordine il massimo errore in T , ma ci si accontenta di una approssimazione uniforme in tutto il campo, riguardando numericamente trascurabile il $2\zeta = 2(r/R)^m e^{m\mu}$, si dovranno ritenere in definitiva le formole del § 8, con q assimilabile a zero ed

$$(35) \quad \omega = \frac{\frac{\pi}{m}}{\log R - \log r - \mu}.$$

12. - Capacità. Gradiente massimo.

Diagramma della tensione lungo un raggio ventrale.

Capacità. — Il cavo (almeno finchè se ne consideri una porzione di lunghezza moderata) si può ovviamente assimilare ad un condensatore cilindrico, le cui armature sono rispettivamente: quella interna, di sezione retta T , al potenziale zero, e l'altra esterna, di sezione retta C , al potenziale 1.

La densità superficiale della carica in un punto generico di una delle due armature, T o C , è

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dn},$$

n designando la normale volta all'esterno di σ .

La carica, per unità di lunghezza del cavo, sarà così espressa da

$$\frac{1}{4\pi} \int_T \frac{dV}{dn} dT \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{4\pi} \int_C \frac{dV}{dn} dC,$$

secondo che si tratta dell'armatura interna o dell'esterna.

Data l'armonicità di V entro σ , la somma dei due integrali è nulla, e quindi le due cariche risultano eguali e di segno opposto. La positiva sta sull'armatura esterna (dove il potenziale è maggiore) ed ha per valore (§ 2)

$$\frac{1}{4\pi} \int_C \frac{dV}{dn} dC = -\frac{1}{4\pi} \int_C \frac{dU}{ds} dC = \frac{2m\omega}{4\pi}.$$

Siccome, fra le due armature, la differenza di potenziale è 1, così (attribuendo per comodità il valore uno al potere induttore specifico del dielettrico frapposto) lo stesso numero $2m\omega/4\pi$ rappresenterà anche la capacità⁽¹⁹⁾ del cavo (carica positiva per unità di lunghezza, divisa per differenza di potenziale). Designandola con C , avremo dalla (35)

$$(36) \quad C = \frac{2m\omega}{4\pi} = \frac{1}{2(\log R - \log r - \mu)}.$$

Al limite, per $m = \infty$, μ converge a zero, come apparisce dalla (32''), e risulta

$$C = \frac{1}{2 \log \frac{R}{r}},$$

che coincide, colla espressione della capacità di un cavo unifilare di raggi R , r . Ciò è ben naturale, perchè gli innumerevoli piccolissimi archetti, che costituiscono il contorno T , quando m tende all'infinito, sono come denti infinitesimi di una circonferenza di raggio r , e non possono perciò avere che influenza locale.

⁽¹⁹⁾ Cfr. BRILLOUIN, *Propagation de l'électricité*, (Paris, 1904), nn. 124-127, dove la nozione di capacità di un cavo è precisata sotto ipotesi alquanto più generali.

Espressione del gradiente massimo. — La (15'), portandovi per φ il suo valore (28), dà come espressione generica del gradiente

$$\Delta = \frac{|c_1|^2}{R} \left| (1 - \xi)\xi^{1/m} F^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right) \right|,$$

dove, si intende bene, alla u , che compare nel secondo membro per tramite dell'argomento $\xi = e^{i\pi u/\omega}$, si deve attribuire il valore, che corrisponde al punto z del campo, cui il gradiente si riferisce.

Dalle (29'), (31) e (35) si ha

$$\frac{|c_1|^2}{R} = \frac{m\omega}{\pi c R} = \frac{e^{-\mu}}{r(\log R - \log r - \mu)}.$$

Ricordando poi la proprietà della funzione ipergeometrica, espressa dalla formula (20),

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = (1 - \xi)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{\xi}{\xi - 1}\right),$$

si vede che

$$(1 - \xi)^{1/2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right)$$

è sostituibile con

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{\xi}{\xi - 1}\right).$$

Si può quindi scrivere indifferentemente

$$(37) \quad \Delta = \frac{e^{-\mu}}{r(\log R - \log r - \mu)} \left| (1 - \xi)\xi^{1/m} F^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right) \right|,$$

ovvero

$$(37') \quad \Delta = \frac{e^{-\mu}}{r(\log R - \log r - \mu)} \left| \xi^{1/m} F^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{\xi}{\xi - 1}\right) \right|.$$

Il valore massimo G di Δ cade, come sappiamo, nei ventri. Si ha in questi punti (a meno di un multiplo intero di 2ω) $u = \omega$, e quindi

$$\xi = e^{i\pi} = -1, \quad \frac{\xi}{\xi - 1} = \frac{1}{2},$$

(20) SCHLESINGER, loc. cit., pag. 265-267.

e in definitiva, dalla (37'),

$$(38) \quad G = \frac{e^{-\mu}}{r(\log R - \log r - \mu)} F^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2}\right),$$

formula convenientissima per il calcolo numerico, data l'espressione (32'), od anche (32''), di μ e la rapida convergenza della serie ipergeometrica, il cui quarto elemento è $\frac{1}{2}$.

Dalla (37) si sarebbe invece ricavata una espressione di G di nessun valore pratico, figurandovi la serie

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, -1\right),$$

che è convergente sì, ma assai lentamente.

Se si osserva che

$$F^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2}\right),$$

e così $-\mu$, sono funzioni sempre crescenti di m , mentre

$$\frac{e^{-\mu}}{\log R - \log r - \mu}$$

è, a sua volta, funzione crescente di $-\mu$ ⁽²¹⁾ si rileva dalla (38) che, per dati R ed r , il cimento G va continuamente crescendo col numero dei fili. Se poi vi si mette in evidenza il cimento

$$G_1 = \frac{1}{r \log \frac{R}{r}},$$

che competerebbe ad un cavo unifilare di raggi R , r , si riconosce subito

(21) Infatti

$$-\frac{d}{d\mu} \frac{e^{-\mu}}{\log R - \log r - \mu} = \frac{e^{-\mu}}{(\log R - \log r - \mu)^2} [\log R - \log r - \mu - 1],$$

e la quantità $\log R - \log r - \mu - 1$ è sempre positiva per i cavi, che si adoperano nell'industria (cfr. il paragrafo seguente, pag. 385).

che, al crescere indefinito di m [avendosi $\mu = 0$, $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) = 1,180$ ⁽²²⁾] rimane

$$G = 1,393 \cdot G_1.$$

Questo risultato merita un po' di commento.

Abbiamo già osservato che, quando m aumenta, la sezione della corda presenta l'aspetto di una circonferenza tutta contornata da piccoli denti. I *valori medi* non possono allora differire gran che da quelli, che competono ad una corona circolare di raggi R , r , e debbono avere per limite questi stessi valori quando m cresce indefinitamente. È ciò che vale ad es. per la capacità, come s'è visto or ora. Ma non si può dire altrettanto dei *valori locali*, in particolare del gradiente massimo G .

Si può anzi rendersi intuitivamente ragione del fatto che G aumenta con m , e non tende, per $m = \infty$, a G_1 , ma ad un valore superiore.

Per questo basta appunto ammettere che debbano invece tendere a coincidere i valori medi.

Infatti, per un cavo unifilare di raggi R , r , il valore medio del gradiente sul contorno interno è lo stesso G_1 . Ammesso che, per un cavo multifilare di raggio esterno R e di raggio nodale r , si abbia su T sempre il medesimo valore medio G_1 , è chiaro che, quando, caeteris paribus, m aumenta, deve pur aumentare G , per compensare il maggior numero di zeri (gradienti nodali), che concorrono a formare la media.

Diagramma della tensione. — Sopra il raggio ventrale MM' si ha $z = \rho e^{-\pi i/m}$, $u = \omega + iV$ e quindi $\xi = e^{i\pi u/\omega} = -e^{-\pi V/\omega}$, con V variabile fra zero ed uno.

Ricordando la espressione (35) di ω e la posizione (33)

$$\zeta = \left(\frac{r}{R}\right)^m e^{m\mu},$$

(22) Senza fare il calcolo diretto, si può riportare il valore di $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ a quello dell'integrale (di STIRLING)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1,311\dots$$

Si ha infatti (cfr. per es. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, pag. 349 e 64):

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1,180\dots$$

si può anche scrivere

$$\xi = -e^{-\pi v/\omega} = -\zeta^v,$$

donde

$$|\xi|^{-1/m} = \left(\frac{r}{R}\right)^{-v} e^{-\mu v},$$

$$\frac{\xi}{\xi-1} = \frac{\zeta^v}{1+\zeta^v}.$$

Ora la terza delle (28), applicando sopra e sotto la identità testè ricordata

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = (1-\xi)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{\xi}{\xi-1}\right),$$

e sostituendo per e il suo valore (31), dà

$$z = r e^{\mu \xi^{-1/m}} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{m}, \frac{\xi}{\xi-1}\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{\xi}{\xi-1}\right)}.$$

Per i punti della MM' (e così di ogni altro raggio ventrale) se ne ricava, prendendo i moduli,

$$(39) \quad \varrho = r \left(\frac{R}{r}\right)^v e^{\mu(1-v)} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{m}, s\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, s\right)} \quad (23),$$

dove s sta in luogo di

$$\frac{\xi}{\xi-1} = \frac{\zeta^v}{1+\zeta^v},$$

Questa espressione esplicita del raggio vettore in termini del potenziale permette di costruire comodamente la curva

$$\varrho = \varrho(V),$$

che dà appunto il diagramma della tensione lungo un raggio ventrale.

(23) Per $V=1$, $s=\xi/(1+\xi)$ è trascurabile nell'ambito della convenuta approssimazione, talchè il rapporto delle due serie ipergeometriche, che compare nella (39), può essere sostituito col'unità. Risulta così $\varrho=R$, per $V=1$, come dev'essere (si intende, entro i limiti di approssimazione, che ci siamo imposti ab initio).

L'ing. JONA (24) ha fatto la verifica sperimentale della (39), misurando direttamente alcuni valori del potenziale in un modello di cavo, corrispondente ai valori

$$m = 6, \quad R = 18^{mm}, \quad r = 3^{mm}.$$

L'accordo fra la curva sperimentale e la teorica fu perfetto.

Non sarà forse fuor di luogo l'osservare che, mentre questi esperimenti servono di utile controllo alla ricerca matematica, non avrebbero però potuto sostituirsi ad essa per la valutazione del cemento massimo, che precisamente importava.

Infatti il cemento lungo un raggio ventrale è caratterizzato da $dV/d\varrho$, cioè dall'inclinazione sull'asse ϱ della curva $\varrho = \varrho(V)$. Ora, pur immaginando tracciata sperimentalmente con esattezza la curva, rimane sempre troppo incerto l'andamento delle sue tangenti (specie in una estremità) perchè sia possibile ricavarne qualche conseguenza quantitativa.

13. - Cavi di massima sicurezza.

Cavi cordati e cavi unifilari di egual sezione.

Il massimo gradiente G definito dalla (38) misura (§ 1) il massimo cemento specifico (unitario), cui, per un dato cavo, cioè per dati m , R , r , si trova esposta la rigidità dielettrica del materiale isolante.

Se si suppongono dati soltanto m ed R , si può — come l'ing. JONA per il cavo a filo unico — cercare in qual modo va preso r affinchè G risulti minimo e quindi massima la sicurezza.

Si vede subito che la condizione di minimo è

$$\log \frac{R}{r} - \mu = 1,$$

ossia

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{e^{1+\mu}}.$$

Al crescere indefinito di m , si ritrova, come è naturale (si ricordi la osservazione fatta a proposito della capacità), il rapporto dell'ing. JONA

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{e}.$$

(24) Cfr. le pag. 41-43 della citata sua Comunicazione al Congresso di St. Louis.

Nelle condizioni di massima sicurezza G ha il valore

$$g = \frac{e^{-\mu}}{r} F^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right) \\ = \frac{e}{R} F^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right).$$

Per un cavo unifilare, che abbia la stessa sezione *totale*, cioè lo stesso R , si ha analogamente

$$g_1 = \frac{1}{r} = \frac{e}{R},$$

da cui

$$\frac{g}{g_1} = F^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right).$$

Questo rapporto, essenzialmente maggiore dell'unità, misura, si può dire, l'aumento di pericolo, che presenta un cavo cordato di massima sicurezza, di fronte all'analogo, unifilare.

Non è il caso di passare ai numeri, perchè, nella pratica, attese le inevitabili impurità del dielettrico, conviene dargli uno spessore piuttosto considerevole, maggiore certo di quello, che corrisponderebbe alla massima sicurezza.

È quindi opportuno che noi riprendiamo la formola (38) per fare piuttosto il raffronto fra un generico cavo cordato ed uno unifilare, avente la stessa sezione totale (lo stesso R) e la stessa sezione interna utile, cioè la stessa resistenza ohmica.

Chiamiamo r' il raggio di quest'unico filo. La sezione $\pi r'^2$ dovrà essere eguale alla somma delle sezioni dei fili costituenti la corda.

Per $m = 6, 12, 18, \dots$, il numero totale n dei fili è rispettivamente 7, 19, 37, ..., ciò che si può compendiare nella formola (empirica, non sussistendo per $m > 6$ una configurazione di cerchi tutti tangenti, analoga a quella della fig. 1)

$$n = 1 + \frac{m(m+6)}{12}.$$

Il raggio a di un singolo filo è legato al raggio nodale r dalla prima delle (17)

$$a = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}.$$

La sezione conduttrice della corda è dunque, in funzione di r e di m ,

$$n\pi r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m} = \pi r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m} \left[1 + \frac{m(m+6)}{12} \right].$$

Ponendo

$$(39) \quad e^\varepsilon = \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \left[1 + \frac{m(m+6)}{12} \right]^{1/2},$$

risulta

$$(40) \quad r' = r e^\varepsilon.$$

Si ha d'altra parte che il cemento G' pel cavo circolare di raggi R , r' è

$$G' = \frac{1}{r' \log \frac{R}{r'}}.$$

Mettiamo adesso in evidenza nella (38) il fattore G' , r' al posto di r , e i logaritmi a base 10, in luogo dei naturali. Avremo

$$(41) \quad G = G' \cdot \nu \cdot \frac{\log_{10} \frac{R}{r'}}{\log_{10} \frac{R}{r'} - M(\mu - \varepsilon)},$$

dove $M = 0,434 \dots$ designa al solito il modulo dei logaritmi volgari, e si è posto per brevità

$$(42) \quad \nu = \frac{F^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right)}{e^{\mu - \varepsilon}}.$$

Per illustrare la (41), giova premettere alcune considerazioni sulle funzioni di m , che vi compariscono.

14. - Comportamento numerico di μ , $\mu - \varepsilon$ e ν in funzione di m .

La (32'') mostra anzi tutto che la funzione μ decresce costantemente e va a zero al crescere indefinito di m .

La funzione ε è pure sempre decrescente e converge verso $-\frac{1}{2} \log (12/\pi^2)$ al crescere indefinito di m . Per constatarlo, immaginiamo di sostituire nella (39) x al posto di $1/m$ e di prendere i logaritmi dei due membri.

Potremo scrivere

$$\varepsilon = \log \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x} + \frac{1}{2} \log \left(x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \right).$$

Finchè x è compreso fra zero e $\frac{1}{2}$, la funzione $\log (\operatorname{tg} \pi x/x)$ cresce con x : in questo intervallo infatti la derivata prima

$$\frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi x \cos^2 \pi x} - \frac{1}{x} = \frac{2\pi x - \operatorname{sen} 2\pi x}{x \operatorname{sen} 2\pi x}$$

si mantiene positiva.

Il secondo addendo è poi evidentemente crescente per tutti i valori positivi di x . Essendo $x = 1/m$, ne risulta che ε va decrescendo al crescere di m , da $m = 2$ in avanti. Quando poi m cresce indefinitamente, cioè x tende a zero, la precedente espressione di ε si riduce a

$$\log \pi - \frac{1}{2} \log 12 = -\frac{1}{2} \log \frac{12}{\pi^2},$$

giusta l'asserto.

Sarà opportuno prendere in esame anche la derivata della ε

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{2\pi}{\operatorname{sen} 2\pi x} - \frac{1}{x} + \frac{x + \frac{1}{4}}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}}.$$

In questo intento cominciamo coll'osservare che, per y positivo e inferiore a un certo limite, diciamo < 2 , per fissare le idee, sussistono le disuguaglianze

$$y - \operatorname{sen} y \geq \frac{1}{6} y^2 \operatorname{sen} y,$$

$$y - \operatorname{sen} y \leq \frac{1}{6} y^3,$$

come si verifica senza alcuna difficoltà, usufruendo lo sviluppo di $\operatorname{sen} y$.

Se ne ricava, ponendo anche $2\pi x$ al posto di y ,

$$\frac{2\pi}{\operatorname{sen} 2\pi x} - \frac{1}{x} \geq \frac{2}{3} \pi^2 x,$$

$$\frac{2\pi}{\operatorname{sen} 2\pi x} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{3} \pi^2 x \cdot \frac{2\pi x}{\operatorname{sen} 2\pi x},$$

che si possono ritenere valide per ogni $x \leq 1/6$ (ossia $m \geq 6$), in quanto allora $y = 2\pi x$ resta certo < 2 .

Essendo identicamente

$$\begin{aligned} \frac{x + \frac{1}{4}}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}} &= 3(1 - 2x) + \frac{6x_3}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}} \\ &= 3(1 - 2x) + 72x^3 - 72x^4 \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}}, \end{aligned}$$

stanno, per ogni $x \geq 0$, le due disuguaglianze

$$\begin{aligned} \frac{x + \frac{1}{4}}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}} &\geq 3(1 - 2x), \\ \frac{x + \frac{1}{4}}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}} &\leq 3(1 - 2x) + 72x^3. \end{aligned}$$

Sommandole ordinatamente colle precedenti, se ne trae, per

$$0 \leq x \leq \frac{1}{6},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} \geq 3 + \left(\frac{2}{3}\pi^2 - 6\right)x \geq 3.$$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} \leq 3 + \left[\frac{2}{3}\pi^2 \frac{2\pi x}{\text{sen } 2\pi x} - 6\right]x + 72x^3.$$

In quest'ultima disuguaglianza la funzione, che compare al secondo membro, cresce con x (per $x < \frac{1}{2}$).

Limitandosi in particolare all'intervallo $0, 1/18$ ($m \geq 18$), si potrà ritenere

$$\frac{d\varepsilon}{dx} \leq 3,052,$$

essendo appunto 3,052 il valore assunto dal secondo membro per $x = 1/18$.

Si può adesso mostrare che la differenza $\mu - \varepsilon$, o, ciò che è lo stesso, $M(\mu - \varepsilon)$ va crescendo con m .

All'uopo ricaviamo dalla (32'')

$$\begin{aligned} M \frac{d\mu}{dx} &= 4 \log_{10} 2 + 4M \sum_1^{\infty} s_{2\nu+1} (2^{2\nu} - 1)x^{2\nu} \\ &< 4 \log_{10} 2 + 4M \sum_1^{\infty} s_{2\nu+1} (2x)^{2\nu} \\ &< 4 \log_{10} 2 + \frac{4Ms_3}{1 - (2/m)^2} \left(\frac{2}{m}\right)^2, \end{aligned}$$

che, per $m \geq 12$, dà

$$M \frac{d\mu}{dx} < 4 \log_{10} 2 + \frac{4Ms_3}{1 - \frac{1}{36}} \cdot \frac{1}{36} = 1,264 \dots$$

Ma si ha insieme

$$\frac{d\varepsilon}{dx} \geq 3,$$

onde risulta

$$M \left(\frac{d\mu}{dx} - \frac{d\varepsilon}{dx} \right) < 1,264 \dots - 3M = -0,012 \dots$$

e rimane accertato che, da $m = 12$ in avanti, la funzione $M(\mu - \varepsilon)$ va crescendo. Il calcolo diretto mostra poi che non fa eccezione nemmeno il primo valore di m , praticamente possibile, essendo, per $m = 6$,

$$M(\mu - \varepsilon) = 0,028 \dots < 0,034 \dots,$$

il quale ultimo è il valore corrispondente ad $m = 12$ (cfr. la tabella a pagina 392).

Giova indicare anche un limite inferiore per la differenza $d\mu/dx - d\varepsilon/dx$. Dalla precedente espressione di $d\mu/dx$ si ha ovviamente, per ogni x positivo,

$$\frac{d\mu}{dx} > 4 \log 2 = 2,772 \dots$$

Abbiamo poi visto che, per $x \leq 1/18$, $d\varepsilon/dx$ non supera il valore 3,052.

Si può così affermare che (da $m = 18$ in avanti)

$$\frac{d}{dx} (\mu - \varepsilon) \geq -0,28.$$

Occupiamoci da ultimo della funzione ν .

Ritenuto sempre $x = 1/m$ come variabile indipendente, abbiamo dalla (42), derivando logicamente,

$$(42') \quad -\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dx} = -\frac{2}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{d}{dx}(\mu - \varepsilon)$$

$$\left[F = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1+x, \frac{1}{2}\right) \right. \\ \left. = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 \cdot (1+x)} \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)^2}{1 \cdot 2 \cdot (1+x)(2+x)} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \right]$$

— $2(dF/dx)$ consta di termini tutti positivi decrescenti al crescere di x .

La somma dei primi tre termini, per $x = 1/18$, si trova essere 0,352...

Si può quindi ritenere, per $m \geq 18$,

$$-2 \frac{dF}{dx} > 0,352.$$

D'altra parte il massimo valore numerico di F si ha per $x = 0$, ed è (cfr. pag. 383)

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = 1,180.$$

Sussiste perciò la disuguaglianza

$$-\frac{2}{F} \frac{dF}{dx} > \frac{0,352}{1,180} > 0,299,$$

che, associata alla precedente

$$\frac{d}{dx}(\mu - \varepsilon) \geq -0,28,$$

permette di concludere che il secondo membro della (42') è certo positivo a partire da $m = 18$.

Il coefficiente ν va dunque costantemente crescendo con m . L'affermazione sta anche tenendo conto dei valori finora esclusi $m = 6$ ed $m = 12$, come si rileva dalla seguente tabella:

Valori di

m	$M(\mu - \varepsilon)$	$F^2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + 1/m, \frac{1}{2})$	$\nu = F^2/e^{\mu - \varepsilon}$
6	0,028	1,321	1,238
12	0,034	1,354	1,251
18	0,037	1,366	1,255
30	0,039	1,376	1,258
∞	0,042	1,393	1,263

15. - Conclusioni.

Premettiamo una osservazione sui cavi unifilari. Dalla espressione del massimo cimento

$$G' = \frac{1}{r' \log \frac{R}{r'}}$$

risulta subito che, nell'ambito delle applicazioni industriali, per cui si ha sempre $\log R/r' > 1$, G' diminuisce quando si aumenta la sezione di uno o di entrambi i conduttori.

Si ha infatti

$$\frac{dG'}{dR} = -G'^2 \frac{r'}{R},$$

$$\frac{dG'}{dr} = -G'^2 \left(\log \frac{R}{r'} - 1 \right),$$

che risultano l'una e l'altra < 0 .

Analogamente pei cavi cordati.

Scriviamo infatti la (41) sotto la forma

$$G = \frac{\nu}{r' \left[\log \frac{R}{r'} - (\mu - \varepsilon) \right]}$$

e formiamo le derivate

$$\frac{dG}{dR} = -\frac{r'}{\nu R} G^2,$$

$$\frac{dG}{dr'} = -\frac{1}{\nu} G^2 \left[\log \frac{R}{r'} - (\mu - \varepsilon) - 1 \right].$$

La prima è sempre negativa; la seconda lo è del pari se

$$\log \frac{R}{r'} - (\mu - \varepsilon) > 1,$$

cioè, a norma della (40), se

$$\log \frac{R}{r} - \mu > 1.$$

Ora questa diseuguaglianza esprime semplicemente che lo spessore del dielettrico è maggiore di quello, che corrisponde alla massima sicurezza; condizione sempre verificata in pratica (§ 13). Si può dunque concludere che, *per cavi cordati di uno stesso numero di fili (nei limiti delle dimensioni industriali), il cemento diminuisce quando si aumentano le sezioni dei conduttori: sia che si allontanano la guaina esterna o si ingrandisca la corda, prendendo più grossi i fili elementari, che la costituiscono.*

Resta da esaminare come varia G al variare dell'argomento m .

Dacchè tanto v , quanto $\mu - \varepsilon$ (§ 14) sono quantità positive, che crescono col numero dei fili, la

$$(41) \quad G = G' \cdot v \cdot \frac{\log_{10} \frac{R}{r'}}{\log_{10} \frac{R}{r'} - M(\mu - \varepsilon)}$$

mostra che, *a parità di sezione (totale ed utile, cioè per dati R ed r') il cemento va sempre aumentando col numero dei fili.*

L'ing. JONA ha cercato di verificare, almeno qualitativamente anche la (41), cimentando fino alla rottura più serie di cavi cordati cogli stessi R , r' e diverso m . Egli ha riconosciuto che, fino ad un certo numero di fili, la tensione di rottura accenna effettivamente ad abbassarsi quando m aumenta, conformemente alle previsioni matematiche; però, se m è molto grande, si torna a trovare una rigidità dielettrica di poco inferiore a quella di un unico filo circolare.

Ci si rende facilmente ragione di questo fenomeno, riflettendo al già accennato (§ 12) comportamento del gradiente lungo il contorno della corda.

Coll'aumentare di m , ventri e nodi si approssimano; ma d'altra parte le particelle materiali del dielettrico circostante non sono punti geometrici. Ne viene che, da un certo m in poi, quelle prossime alla corda si troveranno in realtà sottoposte ad un cemento medio fra il ventrale e il nodale. Ecco perchè si tende a ricondursi al G' dei cavi unifilari.

Comunque è lecito avere piena fiducia nella (41), perchè questo caso limite, se pur viene praticamente raggiunto, può soltanto importare una diminuzione di pericolo, su quella prevista dalla formula.

Ciò posto, osserviamo che i due coefficienti dipendenti da m , che compariscono nella (41), ν ed $M(\mu - \epsilon)$ variano ben poco: il primo, da 1,238 per $m = 6$ a 1,263 per $m = \infty$; il secondo, da 0,028 per $m = 6$, a 0,042 per $m = \infty$ (cfr. la tabella a pag. 392).

Agendo in favore della sicurezza (e senza troppo largheggiare) possiamo attribuire a questi coefficienti i valori massimi. Avremo così come *definitiva formula pratica per la valutazione del massimo cimento in un cavo cordato a un numero qualunque di fili*

$$(41') \quad G = 1,263 G' \frac{\log_{10} \frac{R}{r'}}{\log_{10} \frac{R}{r'} - 0,042}.$$

Il rapporto G/G' misura l'aumento di cimento, cui dà luogo un conduttore cordato in confronto di un filo rotondo della stessa sezione.

Nel caso più favorevole, supponendo grandissimo lo spessore del dielettrico

$$\left(\frac{R}{r'} = \infty \quad \text{e quindi} \quad \frac{\log \frac{R}{r'}}{\log \frac{R}{r'} - 0,042} = 1 \right),$$

si ha già $G/G' = 1,263$. La formula più esatta (41), attribuendo anche ad m il valore più favorevole 6, darebbe il valore poco diverso $G/G' = 1,238$. Praticamente si ha insomma, pur nella migliore ipotesi, una perdita di tensione del 25% circa.

Appare perciò consigliabile, quando si tratti di cavi per tensioni molto elevate, di rendere rotonda la corda conduttrice, coprendola con un tubo di piombo.

L'ing. JONA lo aveva intuito, e la casa PIRELLI già soleva prendere questa precauzione. Sarebbe stato per altro desiderabile, e anche vantaggioso dal punto di vista economico, di poterne fare a meno, senza dovere in pari tempo ridurre la tensione.

La presenta ricerca ha mostrato che ciò non è possibile, giustificando così con criterio scientifico e permettendo in pari tempo di apprezzare in cifre la convenienza della piombatura.

Padova, 27 Aprile 1905.