BROCKMANN — METHODIK

1. [illegible]

2. [illegible], Kultur u. Technik

Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben.

Mit zahlreichen Beispielen.

Zusammengestellt von

F. J. Brockmann,

vorm. Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Cleve.

Mit fünf Holzschnitten.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1889.

13/I 1890.

[Das Recht der Übersetzung behalten sich Verleger und Verfasser vor.]

Vorrede.

Selten dürfte ein Autor in betreff der Begründung des Erscheinens seiner Schrift so wenig außer Sorgen sein, als wir es bei der Herausgabe des vorliegenden „Versuches einer Methodik für die Auflösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben" sein dürfen. Wir haben nicht nötig, nach kunstreichen Redewendungen zu suchen, die uns als Begründung dienen sollen; so entschieden tritt nämlich die Sachlage für uns ein.

Denn wenn wir uns in der deutschen Litteratur der Mathematik vergebens nach einer Schrift umsehen, in welcher in systematischer Form eine „Methodik für die Behandlung planimetrischer Konstruktionsaufgaben" entwickelt wird, so dürfte jeder Versuch, durch Ausfüllung dieser Lücke den Unterricht fruchtbarer zu machen, von den Fachgenossen entschieden gebilligt werden.

So fruchtbar nämlich auch die einschlägige Litteratur in Leitfäden und Lehrbüchern für den systematischen Unterricht in der Geometrie genannt werden muß, in bezug auf eine systematische Methodik für die Auflösung von Konstruktionsaufgaben müssen wir dieselbe steril nennen. Weist dieselbe auch eine stattliche Anzahl von Aufgabensammlungen auf, so verfolgen doch die uns bekannten alle nur den Zweck, entweder die Schule mit hinreichendem Übungsmaterial zu versehen, indem die Aufgaben dieser Sammlung oft nach Tausenden zählen, oder an einzelnen Beispielen für zusammengestellte Gruppen die Art der Behandlung zu zeigen. Wenn wir auch gern zugeben, daß die Sammlungen der letzten Art (beispielsweise die von Hoffmann [Paderborn, bei Schöningh], oder die von Lieber und von Lühmann [Berlin, bei Simion]) sich schon mehr einer Methodik nähern, so ist dieselbe doch nur als latent darin enthalten zu bezeichnen; von einer wirklich systematischen Methodik kann auch hier keine Rede sein. —

Nun ist es aber eine nicht wegzuleugnende Thatsache, daß die Leistungen unserer Schulen auf dem Gebiete der Konstruktionsaufgaben durchweg zu wünschen übrig lassen. Daher muß es Sache der Schulmathematiker sein, diesen Übelstand in objektivster Weise zu bekämpfen.

Darum haben auch wir in zwei voraufgegangenen Schriften, die kürzlich in demselben Verlage erschienen sind, nämlich in 1) Materialien zu Dreieckskonstruktionen, nebst Anwendung auf fast 400 Aufgaben, und 2) Planimetrische Konstruktionsaufgaben, eine Vorschule zu obigen Materialien, enthaltend 501 Aufgaben nebst deren Lösung, wohlmeinend und in bester Absicht den Kampf gegen genannten unleugbaren Übelstand aufgenommen. In der erstern Schrift haben wir nach entsprechender Erweiterung des gangbaren planimetrischen Systems fast 400 Aufgaben mit Hilfe von aufgestellten Örtern und durch Reduktion mittels Daten und auf eine Anzahl hervorragender Reduktionsaufgaben klar und durchsichtig zur Lösung gebracht, dabei aber der eignen vollen Thätigkeit des Lesers hinreichenden Spielraum gelassen. In der andern Schrift, planimetrische Konstruktionsaufgaben, sind die Lösungen der stattlichen Anzahl von 501 Aufgaben aufgestellt. Dabei haben wir das Prinzip der Lösung, d. i. die Methode, stets so hervorzuheben gesucht, daß dadurch dem aufmerksamen Leser eine Abstraktion der Methodik vermittelt werden könnte. Denn nur durch das sorgfältigste Studium einer nicht zu kleinen Reihe von vorgeführten Auflösungen kann man sich für eine selbständige und erfolgreiche Inangriffnahme vorgelegter Konstruktionsaufgaben genügend vorbereiten.

Soll aber der Schüler einer Aufgabe nicht ratlos gegenüber stehn und der Lehrer stets zielbewußt an die Lösung herantreten, so konnte eine bloß latente Methodik nicht genügen. Es war daher notwendig, die vereinzelt vorkommenden und angewandten Methoden zu einer systematischen Methodik zu vereinigen; eine Aufgabe, die um so schwieriger zu lösen ist, da einerseits nach der Natur der Sache eine allgemeine, für alle Aufgaben durchgreifende Methodik nicht aufgestellt werden kann, andererseits aber bei der Aufstellung die verschiedenartigsten Rücksichten zu nehmen sind.

Zunächst ist nämlich bei der Aufstellung einer systematischen

Methode das Bedürfnis des Durchschnittsschülers gebührend zu berücksichtigen, da ja das Auflösen einer geometrischen Konstruktionsaufgabe nicht etwa ein Monopol des befähigteren, besonders findig angelegten Schülers ist, noch sein soll; vielmehr auch der minder befähigte, nur mit normalen Geistesfähigkeiten ausgerüstete Durchschnittsschüler herangezogen werden kann und soll.

Wenn wir dann an zweiter Stelle auch die Berücksichtigung des Lehrers für notwendig halten, so ist dies damit begründet, daß derselbe in seinem Bildungsgange auf der Universität oft keine Gelegenheit finden konnte, außer mit der höheren Analysis, wie z. B. mit elliptischen und Abelschen Integralen, mit Beta-, Gamma- und Theta-Funktionen, der hypergeometrischen Reihe und anderen sich auch noch mit der Schulmathematik intensiv zu beschäftigen und seine Kenntnisse darin zu vertiefen. Es ist ja in der That leider sehr zu beklagen, daß in dem Bildungsgange der zukünftigen Mathematiklehrer vielfach entweder gar keine, oder doch zu wenig Rücksicht auf ihren späteren Beruf genommen wird. —

Angesichts solcher Schwierigkeiten haben wir allen Grund, um eine nachsichtige Beurteilung des vorliegenden Versuches zu bitten; gleichwohl räumen wir der öffentlichen Kritik gern ein, rückhaltslos zu erklären, in wieweit derselbe als gelungen gelten könne, inwieweit nicht. Jedenfalls beruhigt uns das Bewußtsein, daß diese Arbeit eine Frucht des ungeschwächten Interesses für die Nutzbarmachung des mathematischen Unterrichtes in unsern Schulen ist. Den nötigen Mut zur Abfassung derselben hat uns eine autoritative, günstige Beurteilung unserer „Materialien“ gegeben.

Cleve, 18. Juni 1889.

F. J. Brockmann.

Allgemeine Inhaltsübersicht.

Begriff der planimetrischen Konstruktionsaufgabe. Allgemeines über ihre Lösung.

§ 1. Während in den das planimetrische System aufbauenden Lehrsätzen bewiesen wird, daß in einer Figur, in welcher Linien und Winkel gewissen Bedingungen entsprechen, infolge dieser erfüllten Bedingungen auch noch andere Relationen bestehen, (man denke z. B. an den Pythagoreischen Lehrsatz, durch den bewiesen wird, daß in einem Dreieck, welches einen rechten Winkel hat, das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten zusammen ist) versteht man unter einer planimetrischen Konstruktionsaufgabe die Forderung, eine Figur zu konstruieren, deren Seiten oder Winkel u. s. w. gegebenen Bedingungen entsprechen. (Das Wort Figur ist hier in weiterem Sinne zu fassen, indem die gestellte Forderung sich ebensowohl auf Linien oder Winkel einer nicht geschlossenen als auf geschlossene Figuren beziehen kann.) Beispielsweise wäre es eine planimetrische Konstruktionsaufgabe, wenn die Konstruktion eines Quadrates gefordert würde, welches so groß sein soll, wie zwei gegebene Quadrate zusammen. Die Lösung dieser Aufgabe würde sich unmittelbar durch den Pythagoreischen Lehrsatz ergeben, indem man nur die Seiten der gegebenen Quadrate zu Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks zu machen braucht. Die Hypotenuse dieses Dreiecks würde die Seite des gesuchten Quadrates sein.

Indes so einfach und unmittelbar, daß man nur einen entsprechenden Lehrsatz anzuwenden braucht, gestaltet sich die Lösung nur sehr selten, z. B. bei den Fundamentalaufgaben des Systems. Die Lösung einer beliebigen Aufgabe ist darum im allgemeinen schwieriger, da dieselbe einerseits die sichere und stets gegenwärtige Kenntnis des gangbaren planimetrischen Systems voraussetzt, das in vielen Fällen noch einer entsprechenden Erweiterung bedarf, andererseits aber — und das ist der Hauptgrund der generellen Schwierigkeit — läßt sich der Natur der Sache nach keine allgemein gültige und durchgreifende Methode für die Lösung aufstellen, wie das im Verlaufe unserer Entwickelungen mehr und mehr klar gelegt werden wird.

§ 2. Die für die Lösung aller Aufgaben gültige, also allgemeine, Methodik beschränkt sich nämlich auf das Gesetz, nach welchem jede Lösung, soll sie eine wissenschaftlich strenge sein, vier Teile enthalten muß, nämlich 1) die Analysis, 2) die Konstruktion, 3) den Beweis und 4) die Determination. Wie bei der Aufstellung dieser vier Teile zu verfahren ist oder vielmehr verfahren werden kann, dafür wollen wir versuchen, die gebräuchlichsten und zweckmäßigsten Methoden auseinander zu setzen und diese durch Beispiele illustrieren.

I. Die geometrische Analysis.

§ 3. Die Analysis, der Kern der ganzen Lösung, geht davon aus, daß sie annimmt, es sei das in der Aufgabe Geforderte konstruiert, und entwirft zunächst eine entsprechende Figur, welche zweckmäßig die analytische Figur genannt werden kann. Alsdann sucht man aus dieser Voraussetzung unter Anwendung von zweckmäßigen Hilfskonstruktionen und einschlägiger Lehrsätze Schlüsse auf geometrische Thatsachen zu machen, die entweder unmittelbar konstruiert werden können, so daß sich daraus das Geforderte der Aufgabe als Folge ergiebt, oder doch eine Zurückführung (Reduktion) auf frühere Konstruktionen gestatten.

Um hierbei eine analytische Figur zu erhalten, welche den gestellten Forderungen möglichst entspricht, empfiehlt es sich, die gegebenen Stücke so zu nehmen, wie dieselben in der vorher entworfenen analytischen Figur vorkommen. Besonders hat man sich beim Entwerfen der analytischen Figur vor Zufälligkeiten zu hüten; man soll kein gleichschenkliges oder rechtwinkliges Dreieck entwerfen, wenn ein allgemeines Dreieck gefordert wird, um nicht Verhältnisse und Thatsachen in die Figur zu bringen, welche für den vorliegenden Fall nicht zutreffen und daher nur zu verwirrenden Schlußfolgerungen führen könnten.

§ 4. In den seltensten Fällen jedoch gelangt man durch Auffindung einer bezüglichen geometrischen Thatsache an der analytischen Figur zu einer abgeschlossenen Analysis. In den andern (meisten) Fällen hat man die gebräuchlichen Hilfsmittel für die Analysis anzuwenden, deren es hauptsächlich zwei giebt, nämlich 1) die geometrischen Örter, 2) die Reduktion.

§ 5. Da in den meisten Fällen bei Aufgaben von nicht komplizierter Art die Analysis durch Bestimmung eines oder mehrerer Punkte abgeschlossen werden kann, (auch wenn die Konstruktion eines Kreises oder einer Geraden, eines Dreiecks oder eines Polygons verlangt wird,) so macht man in vielen Fällen von dem Hilfsmittel der geometrischen Örter Gebrauch, was wir als Anwendung der „Methode durch geometrische Örter" bezeichnen wollen.

Unter einem geometrischen Orte (oder schlechtweg Orte) für einen Punkt versteht man im strengen wissenschaftlichen Sinne die Gesamtheit aller Punkte, welche eine verlangte Eigenschaft besitzen; für die geometrische Analysis erweitert man diesen Begriff und versteht unter demselben jede Gerade oder jede Kreisperipherie, in welcher jener Punkt gemäß einer bestimmten Eigenschaft liegen muß. Vermag man aus den Bedingungen der Aufgabe für einen gesuchten Punkt zwei Örter zu bestimmen, so ist der Durchschnittspunkt dieser beiden Örter der gesuchte Punkt, so daß man, wenn beide Örter Gerade sind, einen, wenn aber ein Ort oder beide Örter Kreise sind, zwei Punkte (im allgemeinen) erhält, welche die gestellten Bedingungen erfüllen. — Durch die oben angegebene Erweiterung des Begriffs „geometrischer Ort" gewinnt derselbe erst seine Fruchtbarkeit für die geometrische Analysis, da man in vielen Fällen den Ort eines Punktes im engeren Sinne mit Lineal und Zirkel gar nicht konstruieren kann.

§ 6. Die vorhin in dem erweiterten Begriffe des geometrischen Ortes aufgestellte Beschränkung auf eine Gerade und eine Kreisperipherie ist durchaus nicht willkürlich, sondern eine wissenschaftlich begründete Notwendigkeit. Denn die Geometrie kennt nur zwei Postulate, oder, was dasselbe ist, sie giebt nur zwei Konstruktionen als unmittelbar möglich zu, nämlich 1) zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden, und 2) um einen gegebenen Punkt mit einer begrenzten Geraden als Radius einen Kreis zu beschreiben. Daraus folgt notwendig, daß nur eine Gerade oder eine Kreisperipherie in den geometrischen Konstruktionen als Örter auftreten können. In diesem Sinne ist auch bei den Konstruktionen der Gebrauch zweier mechanischen Hilfsmittel gestattet, des einfachen Lineals und des einfachen Zirkels, welche beiden Instrumente der stete reale Ausdruck jener beiden Postulate sind. Eine Aufgabe, welche sich nicht mit Hilfe dieser Postulate oder der beiden genannten Instrumente lösen läßt, gilt als geometrisch unlösbar, wie z. B. die Dreiteilung eines beliebigen Winkels, die Quadratur des Kreises und die delische Aufgabe, welche fordert, aus der Kante eines gegebenen Würfels die Kante des doppelt so großen Würfels zu konstruieren.

§ 7. Der Ort für einen gesuchten Punkt läßt sich nun entweder aus den Bedingungen der Aufgabe unmittelbar ableiten, oder derselbe muß anderweitig aufgesucht werden. In diesem Falle verbinde man den gesuchten Punkt mit einem bekannten Punkte der analytischen Figur, oder ziehe durch ihn ein Lot oder eine Parallele zu einer bekannten Geraden, betrachte die so gezogenen Geraden als Ort und suche dieselben unter Anwendung einschlägiger Lehrsätze zu konstruieren. Durch den gegebenen Punkt, womit man den gesuchten verbindet, oder durch die gegebenen Geraden, wozu man durch jenen ein Lot oder eine Parallele zieht, ist jedenfalls eine Eigenschaft des gesuchten Ortes gegeben. Zur wirklichen Bestimmung des gesuchten Punktes bedarf es dann nur noch einer zweiten konstruierbaren Eigenschaft.

§ 8. Ist aber in der analytischen Figur kein Punkt unmittelbar gegeben, durch dessen Verbindung mit dem gesuchten Punkte sich ein Ort für diesen ergeben würde, so wähle man dazu einen leicht, etwa mit Hilfe der Elementaraufgaben konstruierbaren Punkt, z. B. die Mitte einer bekannten Strecke, oder den Punkt, welcher eine bekannte Strecke nach bekanntem Verhältnis teilt, oder den Endpunkt einer um sich selbst verlängerten Strecke oder dergl.

§ 9. Als fernerer Weg, entweder unmittelbar einen gesuchten Punkt zu bestimmen, oder doch die Bestimmung eines notwendigen Ortes zu vermitteln', ist die Ausführung der in den Bedingungen der Aufgabe enthaltenen Beziehungen von Linien an der analytischen

Figur zu empfehlen, wie z. B. der Summe oder Differenz zweier Linien, oder ihres Verhältnisses. Letzteres überträgt man, wenn möglich, auf eine andere bekannte Gerade. Bei der Konstruktion der Summe oder Differenz zweier Geraden ist zu unterscheiden, ob dieselben von einem Punkte ausgehen oder nicht. Im erstern Falle stellt man die Summe dar, indem man die eine um die andere über diesen Punkt hinaus verlängert, die Differenz, indem man von diesem gemeinschaftlichen Punkte aus die eine von der andern abträgt. Man kann hierbei auch (geometrisch) die größere von der kleineren abtragen, indem man diese verlängert, bis sie gleich der größeren wird.

Gehen aber die Linien nicht von einem Punkte aus, so mache man dieselben Konstruktionen von einem Punkte aus, in welchem die eine von ihnen durch irgend eine Gerade begrenzt wird, z. B. von einem Fußpunkte der einen, wenn sie eine Senkrechte ist, oder dergl.

Kommt die Summe (oder Differenz) der Quadrate zweier Linien oder ihr Produkt (Rechteck) unter gegebenen Bedingungen vor, so stelle man letzteres durch Übertragung auf andere Linien dar und zwar am besten auf grund des Sehnen- und Sekantensatzes beim Kreise oder mittels Anwendung der Proportionen beim rechtwinkligen Dreiecke, ersteres auf grund des Pythagoreischen Lehrsatzes. Die Differenz zweier Quadrate wird häufig zweckmäßig als das Rechteck aus der Summe und der Differenz der Seiten dargestellt. In besonderen Fällen ist man jedoch der besonderen Darstellung dieser Beziehungen überhoben, wenn sich dieselben nämlich, wie häufig bei Kreis- und Dreiecksaufgaben, schon in der analytischen Figur dargestellt vorfinden, in welchen Fällen nur eine Übertragung erforderlich ist.

§ 10. Hier mögen die Sätze über geometrische Örter eine Stelle finden, welche zur Aufstellung einer Analysis am häufigsten Anwendung finden und bei einer großen Zahl von Aufgaben einfacherer Art zur Vollendung derselben für sich ausreichend sind. Die hauptsächlichsten sind:

1) Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von einem festen Punkte eine gegebene Entfernung haben, ist eine Kreisperipherie, welche mit der gegebenen Ent-

fernung als Radius um den festen Punkt als Mittelpunkt beschrieben ist.

Oder

2) der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche, mit einem gegebenen Radius beschrieben, durch einen festen Punkt gehen, ist eine mit dem gegebenen Radius um den festen Punkt beschriebene Kreisperipherie.

Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus der Definition des Kreises.

3) Der geometrische Ort für die Punkte gleicher Entfernung von zwei festen Punkten ist das in der Mitte der Verbindungslinie der beiden festen Punkte zu dieser errichtete Lot.

Beweis leicht durch Kongruenz.

4) Der geometrische Ort für die Punkte gegebener Entfernung von einer gegebenen Geraden ist eine in der gegebenen Entfernung zu dieser gezogene Parallele.

Beweis. Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

Zusatz. Der parallele Ort kann auf beiden Seiten der gegebenen Geraden liegen.

5) Der geometrische Ort für die Punkte gleicher Entfernung von zwei Geraden ist die den Winkel der Geraden halbierende Gerade.

Beweis leicht durch Kongruenz.

Zusatz. Die Geraden bilden zwei Winkel miteinander.

6) Der geometrische Ort für die Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Hypotenuse als Grundlinie ist die Kreisperipherie, deren Diameter die gegebene Hypotenuse ist.

Beweis. Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter.

7) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Sehnen eines Kreises von gegebener Größe ist die Peripherie eines mit diesem Kreise konzentrischen Kreises, dessen Radius gleich der Entfernung einer Sehne von der gegebenen Größe von dem Mittelpunkte des Kreises ist.

Beweis. Das Lot vom Mittelpunkt auf die Sehne halbiert diese; und O. 6.

8) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche eine Gerade in einem gegebenen Punkte berühren, ist das in diesem Punkte zur Geraden errichtete Lot.

Beweis. Das Lot im Berührungspunkt zur Tangente geht durch den Mittelpunkt.

9) Der geometrische Ort für die Punkte, aus welchen an einen gegebenen Kreis Tangenten von gegebener Größe gezogen werden können, ist eine mit der gegebenen konzentrische Kreisperipherie, deren Radius die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ist, deren Katheten der Radius des gegebenen Kreises und die gegebene Länge der Tangenten sind.

Beweis einfach.

10) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren, ist der durch diesen Punkt gehende und eventuell verlängerte Durchmesser.

Beweis. Wenn zwei Kreise einander berühren, so liegt der Berührungspunkt auf der Centrale.

Zusatz. Zwei Örter!

11) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise mit gegebenem Radius, welche einen andern gegebenen Kreis berühren, ist ein mit dem gegebenen konzentrischer Kreis, dessen Radius entweder gleich der Summe oder der Differenz der beiden Radien ist

Beweis. Ist die Centrale zweier Kreise der Summe oder der Differenz ihrer Radien gleich, so berühren sich die Kreise.

12) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche zwei gegebene konzentrische Kreise berühren, ist ein dritter konzentrischer Kreis, dessen Radius entweder der halben Summe oder der halben Differenz der gegebenen Kreise gleich ist.

Beweis ganz ähnlich wie bei 11.

13) Der geometrische Ort für die Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten eine gegebene ist, ist ein Kreis,

dessen Mittelpunkt die Mitte der Verbindungslinie jener Punkte ist.

Beweis. Die Summe der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist um das halbe Quadrat der dritten Seite größer als das doppelte Quadrat der zur dritten Seite gehörenden Mittellinie.

14) Der geometrische Ort für die Punkte, für welche die Differenz der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten eine gegebene ist, ist ein Lot zu der Verbindungslinie jener Punkte.

Beweis. Die Differenz der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist gleich der Differenz der Quadrate ihrer Projektionen auf die dritte.

15) Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke mit gegebener Grundlinie und gegebenem Winkel an der Spitze ist ein Kreisbogen über der Grundlinie als Sehne, an dessen Peripherie ein Winkel liegt, welcher dem gegebenen Winkel an der Spitze gleich ist.

Beweis. Peripheriewinkel auf demselben Bogen sind gleich.

16) Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von zwei parallelen Geraden gleiche Entfernung haben, ist die in der Mitte zwischen ihnen liegende Parallele, die Mittelparallele.

Beweis leicht.

17) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der von einem gegebenen Punkte aus bis an eine gegebene Gerade gezogenen Geraden ist die zur gegebenen Geraden gezogene Parallele, welche den Abstand des Punktes von ihr halbiert.

Beweis. Die Parallele durch die Mitte einer Dreiecksseite zu einer zweiten halbiert auch die dritte.

18) Der geometrische Ort für die Endpunkte der geraden Linien, welche von einem Punkte aus gezogen durch eine gegebene Gerade halbiert werden, ist die Parallele zur gegebenen Geraden, welche gleichen Abstand von ihr hat, wie der gegebene Punkt.

Beweis wie bei 17.

19) Der geometrische Ort für die Endpunkte der Ge-

raden, welche von einem Punkte aus bis an eine gegebene Gerade gezogen in diesem Punkte halbiert werden, ist die zur gegebenen Geraden im doppelten Abstande des Punktes gezogene Parallele.

Beweis wie vorhin.

20) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise mit gegebenem Radius, welche eine gegebene Gerade unter einer gegebenen Sehne schneiden, ist eine Parallele zur gegebenen Geraden in der Entfernung der gegebenen Sehne vom Mittelpunkte eines mit dem gegebenen Radius beschriebenen Kreises.

Beweis. Sehnen eines Kreises sind gleich, wenn sie gleiche Entfernung vom Mittelpunkte desselben haben.

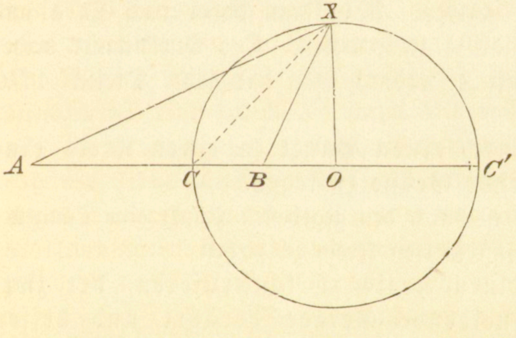
Zusatz. Zwei Örter!

21) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise von gegebenem Radius, welche einen gegebenen Kreis unter einer gegebenen Sehne schneiden, ist ein zum gegebenen konzentrischer Kreis, dessen Radius gleich der Summe oder der Differenz der Abstände der gegebenen Sehne vom Mittelpunkte ist, welche man erhält, wenn man dieselbe in den gegebenen Kreis und in einen mit dem gegebenen Radius beschriebenen Kreis abträgt.

Beweis ergiebt sich leicht.

22) Der geometrische Ort für die Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten ein gegebenes Verhältnis haben, ist ein Kreis, dessen Diameter die Entfernung der beiden Punkte ist, in welchem die Entfernung der festen Punkte innerlich und äußerlich nach jenem Verhältnis geteilt wird.

Fig. 1.



Beweis. Liegen die Punkte C und C' so auf AB, daß

$AC : BC = AC' : BC' = m : n$ ist, und ist X ein Punkt in der Peripherie des Kreises über CC' als Diameter, dessen Mittelpunkt O, so ergiebt sich aus

$AC' : AC = BC' : BC$ zunächst
$AC : 2CO = BC : 2BO$, und hieraus
$AO : CO = CO : BO$.

Nun ist $CO = XO$, also $AO : XO = XO : BO$, woraus folgt, daß $\triangle AXO \sim BXO$, folglich ist $\sphericalangle BXO = A$, also $AXC = BXC$, woraus nach bekanntem Lehrsatze der Planimetrie sich ergiebt, daß $AX : BX = AC : BC = m : n$ ist.

Zusatz. Ist $m = n$, so tritt statt dieses Ortes O. 3 auf.

§ 11. Die Anwendung vorstehender Sätze über die gebräuchlichsten geometrischen Örter, welche wir bei späterer Bezugnahme als O. 1, 2 u. s. w. bezeichnen werden, möge an einigen Aufgaben näher gezeigt werden.

Aufgabe 1. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine Seite desselben und die zu dieser Seite gehörige Höhe und Mittellinie gegeben sind.

Oder ein Dreieck zu konstruieren aus a, h_a und m_a.

Analysis. Da durch die eine gegebene Seite a (oder BC) die beiden Ecken B und C des Dreiecks gegeben sind, wenn man nur eine Gerade $BC = a$ hinlegt, so fehlt zur Konstruktion nur noch die Bestimmung der dritten Ecke A. Nun ist durch die gegebene Höhe h_a die Entfernung des Punktes A von BC, durch die gegebene Mittellinie aber die Entfernung des Punktes A von der Mitte von BC gegeben. Man kann daher nach O. 4 und O. 1 je einen Ort für A konstruieren. Der Durchschnitt beider Örter giebt den Punkt A, wodurch man das ganze Dreieck ABC erhält.

Aufgabe 2. Durch einen Punkt in einen Kreis eine Sehne von gegebener Größe zu legen.

Analysis. Es ist durch den gegebenen Punkt eine Tangente an den nach O. 7 konstruierten Kreis zu ziehen.

Aufgabe 3. Einen Kreis zu konstruieren, der zwei einander durchschneidende Gerade berührt und dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden oder Kreisperipherie liegt.

Analysis. Durch die gegebene Gerade oder Kreisperipherie, worauf der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegen soll, ist unmittelbar ein Ort für den Mittelpunkt gegeben. Ein zweiter Ort ergiebt sich nach O. 5. Der Radius des gesuchten Kreises ist das Lot von dem durch die zwei Örter bestimmten Mittelpunkte auf eine der gegebenen Geraden.

Aufgabe 4. Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

Analysis. Soll der gesuchte Kreis durch P gehen und die Gerade MN in A berühren, so ist nach O. 8 das in A zu MN errichtete Lot ein Ort für den gesuchten Mittelpunkt X. Da nun auch $XP = XA$ sein muß, so erhält man einen zweiten Ort für X nach O. 3.

Aufgabe 5. Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen anderen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt.

Analysis durch Anwendung von O. 10 und 3.

Aufgabe 6. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt.

Analysis durch Anwendung von O. 2 und 4.

Aufgabe 7. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Geraden berührt.

Analysis. Wegen der geforderten Berührung findet O. 5 Anwendung, wegen des gegebenen Radius O. 4.

Aufgabe 8. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und einen andern gegebenen Kreis berührt.

Analysis. Der eine Ort ist nach O. 2 ein Kreis um den gegebenen Punkt mit dem gegebenen Radius; der andere nach O. 1 ein mit dem gegebenen konzentrischer Kreis mit einem Radius, der gleich der Summe zweier bekannten Radien ist.

Aufgabe 9. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Analysis. Durch den gegebenen Radius ist mit Rücksicht auf die Berührung der Geraden für den Mittelpunkt des geforderten Kreises ein Ort nach O. 4 gegeben, mit Rücksicht auf die Berührung des Kreises aber ein solcher nach O. 11.

Aufgabe 10. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu konstruieren, welcher zwei gegebene Kreise berührt.

Analysis. Für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises lassen sich nach O. 11 leicht zwei Örter bestimmen.

Aufgabe 11. Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei parallele Gerade berührt.

Analysis durch Anwendung von O. 16 und O. 2 einfach.

Aufgabe 12. Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und eine Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

Analysis. Die letztere Bedingung giebt einen Ort für den gesuchten Mittelpunkt nach O. 8; Anwendung von O. 3 giebt einen zweiten Ort.

Aufgabe 13. Einen Kreis zu konstruieren, der zwei parallele Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Analysis. Außer nach O. 16 ergiebt sich, da der Radius des gesuchten Kreises leicht abzuleiten ist, für den Mittelpunkt noch ein zweiter Ort nach O. 11.

Aufgabe 14. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und einen andern Kreis unter einer gegebenen Sehne schneidet.

Analysis. Für den gesuchten Mittelpunkt ergiebt sich aus ersterer Bedingung ein Ort nach O. 2, aus der andern nach O. 21.

Aufgabe 15. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade berührt und eine andere unter einer gegebenen Sehne schneidet.

Analysis durch Anwendung von O. 4 wegen der erstern Bedingung; wegen der zweiten Bedingung wende man O. 21 in einer für den vorliegenden Fall leicht erkennbaren Modifikation an.

Aufgabe 16. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der einen von zwei gegebenen Kreisen berührt und den andern unter einer gegebenen Sehne schneidet.

Analysis. Ein Ort für den gesuchten Mittelpunkt wird nach O. 11, der andere nach O. 21 bestimmt.

Aufgabe 17. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei parallele Gerade jede unter einer gegebenen Sehne schneidet und dabei durch einen gegebenen Punkt geht.

Analysis. Wenn man in einem beliebigen Punkte zu den gegebenen Parallelen das gemeinschaftliche Lot zieht und von den Fußpunkten desselben auf jeder Parallele nach beiden Seiten die halbe entsprechende Sehne abträgt, so ist die Entfernung des Mittelpunktes des Kreises, den man durch die vier Endpunkte der abgetragenen Sehnen legen kann, von einem dieser Endpunkte der Radius des gesuchten Kreises und die Parallelle durch dessen Mittelpunkt zu den gegebenen Parallelen der eine Ort für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Der andere Ort ergiebt sich mittels des gefundenen Radius nach O. 2.

Aufgabe 18. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises an diesen eine Sekante zu ziehen, welche von der Peripherie desselben halbiert wird.

1. Analysis. Ist AXY die verlangte Sekante, welche in X halbiert wird, und M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, so läßt sich auf dem Orte MX (für den Punkt X) der Punkt B bestimmen, wenn man MX bis B um sich selbst verlängert. Zieht man dann AB, so ist $AB = MX$. Dadurch erhält man aber für B zwei Örter nach O. 1, da die Entfernungen BA und MB durch den Radius des Kreises gegeben sind. Ist aber B bestimmt, so giebt die Verbindungslinie MB den Punkt X und die ganze Sekante AXY.

2. Analysis. Man erhält auch einen zweiten Ort für X (der eine Ort ist unmittelbar durch den Kreis gegeben), wenn man es mit der Mitte C von AM verbindet, wobei sich ergiebt, daß XC gleich der Hälfte des Radius des gegebenen Kreises ist.

3. Analysis. Eine dritte Ortsbestimmung für X ergiebt sich durch folgende Betrachtung. Schneidet der durch A gezogene Diameter den gegebenen Kreis in D und E, und man verbindet X mit der Mitte F von AD und mit der Mitte G von AE, so ist $XF \parallel YD$, und $XG \parallel YE$, also $\sphericalangle FXG = 1R$. Daraus ergiebt sich für X, da F und G gegeben sind, ein Ort nach O. 6.

4. Analysis. Auch kann man für Y einen zweiten Ort leicht bestimmen. Zieht man nämlich den Diameter YMT und verbindet T mit A, so ergiebt sich, da $\sphericalangle YXT = 1R$ ist, daß AT gleich dem Diameter des gegebenen Kreises. Es ist also T zu bestimmen und TM giebt Y.

Aufgabe 19. Durch einen Punkt in der Peripherie des inneren zweier konzentrischen Kreise in den äußeren eine Sehne zu legen, welche durch die Peripherie des inneren Kreises in drei gleiche Teile geteilt wird.

Ist A der gegebene Punkt und die Sehne $BACD$ so gezogen, daß $BA = AC = CD$ ist, so ergiebt sich folgende

Analysis. Verbindet man den Mittelpunkt M mit A und verlängert diese Verbindungslinie über A um sich selbst bis E, so ist EB gleich dem kleineren Radius, EC gleich dem größeren, woraus nach O. 1 sowohl für B als auch für C ein zweiter Ort bestimmt werden kann, da ja für beide Punkte ein erster Ort durch die Kreisperipherie selbst gegeben ist.

Aufgabe 20. Durch einen Durchschnittspunkt zweier Kreise in den einen eine Sehne zu legen, welche durch die Peripherie des andern halbiert wird.

Ist A der betreffende Durchschnittspunkt der beiden Kreise um M und M_1, so erhält man folgende

1. Analysis. Die Sehne AB möge in den Kreis um M gelegt und in C auf der Peripherie des Kreises um M_1 halbiert sein. Verbindet man M mit C, so ist $\sphericalangle MCA = 1R$, daher ergiebt sich ein Ort für C nach O. 6 als Halbkreis über dem Radius AM als Durchmesser.

2. Analysis. Verlängert man MC, bis sie die Peripherie des Kreises M_1 zum zweiten Male in D schneidet, so ist AM_1D Diameter, da $\sphericalangle ACD = 1R$. Der zweite Ort DM für C ist also konstruierbar.

3. Analysis. Verbindet man C mit der Mitte E von AM, so ist EC gleich $\frac{1}{2}MA$, woraus sich nach O. 1 ein Ort für C bestimmen läßt.

4. Analysis. Verbindet man D (s. 2. Analysis) mit B, so ist $DB = AD =$ Diameter des Kreises M_1, woraus sich nach O. 1 ein Ort für B bestimmen läßt.

Aufgabe 21. Zwischen die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks eine gegebene Strecke so zu legen, daß sie von der Hypotenuse halbiert wird.

Analysis. Liegt die gegebene Strecke $DE = a$ so zwischen den Katheten AB und AC, daß sie durch die Hypotenuse BC in F halbiert wird, und man zieht durch F die Parallelen FG und FH zu AB und AC bis in AC und AB, so ergiebt sich leicht die Kongruenz der Dreiecke FHD und FGE; daraus aber, daß $GE = HF = AG$ ist, woraus sich wiederum die Kongruenz von FAG und FEG ergiebt. Aus dieser Kongruenz folgt aber, daß $FA = \frac{1}{2}a$ ist, woraus sich nach O. 1 für F der zweite Ort ergiebt.

Zusatz. Unmittelbarer ergiebt sich, daß $FA = \frac{1}{2}a$ aus dem Umstande, daß DE Hypotenuse wird und nach dem Satze über den Winkel im Halbkreis die Mitte der Hypotenuse von ihren Endpunkten und dem Scheitel des rechten Winkels gleich weit entfernt ist.

Aufgabe 22. Von zwei Punkten außerhalb eines Kreises an diesen zwei Sekanten zu ziehen, von denen die eine die andere rechtwinklig schneidet und halbiert.

Analysis. Wird von den beiden zu einander rechtwinkligen Sekanten PA und $P'B$ die letztere durch die erste halbiert, so ergiebt sich leicht, daß $PP' = PB$ ist. Hieraus ergiebt sich für B ein zweiter Ort nach O. 1.

Aufgabe 23. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und einer zugehörigen Mittellinie. (Etwa aus a, b und m_b.)

Analysis. Durch a sind die Ecken B und C des Dreiecks gegeben. Für die Mitte D der Seite CA erhält man nach O. 1 zwei Örter, den einen, weil $BD = m_b$, den andern, weil $CD = \frac{1}{2}b$ ist. Ecke A ergiebt sich dann leicht.

Aufgabe 24. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, einem anliegenden Winkel und der Höhe von dem Scheitel dieses Winkels aus. (Aus a, $\sphericalangle B$ und h_b.)

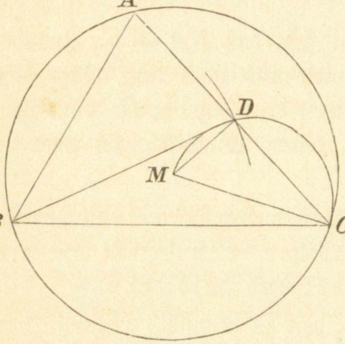
Analysis. Durch die Seite a sind die beiden Ecken B und C des Dreiecks gegeben; durch den Winkel B die Richtung der

Seite BA, welche zugleich der eine Ort für die Ecke A ist; der andere Ort ist die aus C an den um B mit dem Radius h_b beschriebenen Kreis gezogene Tangente.

Aufgabe 25. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem gegenüber liegenden Winkel und einer zu einer andern Seite gehörigen Mittellinie. (Aus a, $\sphericalangle A$ und m_b.)

Analysis. Durch die Seite a sind die beiden Ecken B und C des Dreiecks gegeben. Für die dritte Ecke A erhält man zunächst einen Ort nach O. 15 durch den gegebenen Gegenwinkel A.

Fig. 2.



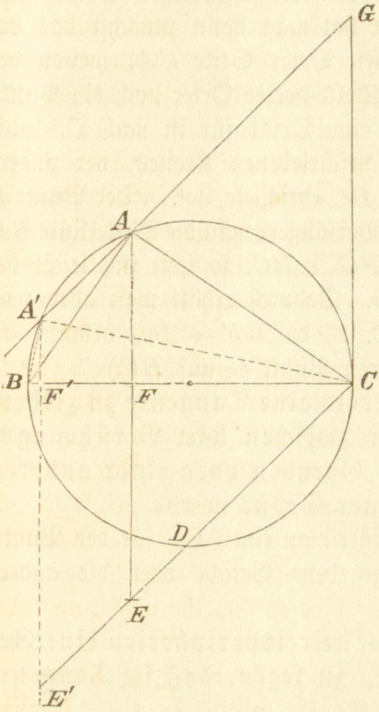
Der zweite Ort für A ist die Seite CA, von welcher nur der eine Punkt C bekannt ist. Es muß also noch ein zweiter Punkt bestimmt werden. Wegen der gegebenen Mittellinie m_b wähle man hierzu den Mittelpunkt D von CA. Man hat sofort als einen Ort dafür die Peripherie des Kreises um B mit dem Radius m_b. Verbindet man nun den Mittelpunkt M des ersten Ortes für A mit C und ebenso mit D, so ist $\sphericalangle MDC = 1R$, woraus sich nach O. 6 ein zweiter Ort für D ergiebt. Dadurch erhält man aber auch CD als zweiten Ort für A.

Aufgabe 26 und 27. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn dazu gegeben sind die Hypotenuse (a) und die Summe (oder Differenz) eines Hypotenusenabschnittes und der Hypotenusenhöhe. (Aus a und $q \pm h_a$.)

Analysis. Da durch die Hypotenuse a die beiden Ecken B und C, und durch den rechten Winkel ein Ort für die dritte Ecke A gegeben ist, so bedarf es nur noch der Bestimmung eines zweiten Ortes für A. Wenn man nach § 9 die gegebene Summe $q + h$ dadurch an der Figur darstellt, daß man das Lot AF über F um $FE = FC$ verlängert und EC zieht, so ist $\sphericalangle FCE = \frac{1}{2}R$, die Linie CE geht also durch die Mitte D des Bogens BC.

zwischen diese (konstruierbare) Linie CE und den ersten Ort für A ist nun eine Gerade senkrecht auf BC so zu legen, daß sie gleich $q+h$ wird. Errichtet man daher in C auf BC ein Lot $CG = q + h$, so ist die Parallele durch G zu CE der zweite Ort für A. Ist statt der Summe die Differenz $q-h$ gegeben, so mache man das Lot $CG' = q - h$ und lege dieses Lot in entgegengesetzter Richtung, nachdem man FA über A um AE gleich der gegebenen Differenz verlängert hat; dann ist die durch G' zu CE gezogene Parallele der zweite Ort für A.

Fig. 3.



Aufgabe 28. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Höhe zu einer andern und der Mittellinie zur dritten Seite. (Aus a, h_b und m_c.)

Analysis. Durch die Seite a sind die beiden Ecken B und C des gesuchten Dreiecks gegeben. Für die dritte Ecke A ist zunächst ein Ort die von C aus an den um B als Mittelpunkt mit h_b als Radius beschriebenen Kreis gezogene Tangente. Von dem zweiten Orte für A, nämlich der Seite BA läßt sich außer B noch ein Punkt, nämlich die Mitte D bestimmen. Für D hat man zwei Örter, einen durch die bekannte Länge $CD = m_b$ nach (O. 1), den andern in der Parallele durch die Mitte E von BC zu der aus C gezogenen Tangente.

Aufgabe 29. Ein Dreieck zu konstruieren aus den auf einer Seite durch die Höhe gebildeten Abschnitten und einer zu einer andern Seite gehörigen Mittellinie. (Etwa aus p und q [den Abschnitten auf a] und m_b)

Analysis. Durch die Abschnitte p und q ist ihre Summe, die Seite a, also die Ecken B und C des gesuchten Dreiecks gegeben; außerdem der Fußpunkt D der zugehörigen Höhe. Als ersten Ort für die dritte Ecke A hat man dann zunächst das Lot in D auf BC; von dem zweiten Orte, Seite CA, wovon der Punkt C bekannt ist, läßt sich mittels zweier Örter noch ein Punkt, die Mitte E, bestimmen. Der eine Ort dafür ist nach O. 1 die Peripherie des um B mit m_b beschriebenen Kreises, der andere das in der Mitte F von DC zu DC errichtete Lot. (Der Punkt E ließe sich auch anders bestimmen. Verlängert man die Mittellinie BE um sich selbst bis F und fällt $FG \perp BC$, so läßt sich leicht beweisen, daß $CG = BD = p$ ist. Dadurch erhält man aber zwei Örter für F, den einen nach O. 1, da $BF = 2m_b$ bekannt ist, und das Lot in dem bestimmbaren Punkt G auf BC.)

Aufgabe 30. An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, so daß das Stück derselben zwischen dem Berührungspunkte und einer gegebenen Geraden oder einer anderen Kreisperipherie von gegebener Größe werde.

Analysis. Nach O. 9 erhält man einen Ort für den Punkt, in welchem die Tangente die gegebene Gerade oder die andere Kreisperipherie schneidet.

Aufgabe 31. Zwischen zwei Kreisperipherien eine Gerade von gegebener Größe so zu legen, daß sie Tangente eines der beiden gegebenen Kreise wird.

Analysis wie zu A. 30.

Aufgabe 32. Innerhalb eines Dreiecks einen Punkt zu bestimmen, so daß die Verbindungslinien mit den Ecken des Dreiecks unter sich gleiche Winkel bilden.

Analysis. Es ergiebt sich leicht, daß jeder dieser Winkel 120^0 betragen muß, wonach man zwei Örter für den gesuchten Punkt nach O. 15 erhält.

Aufgabe 33. In einer Dreiecksseite (BC) einen Punkt X zu bestimmen, so daß die Verbindungslinie DE der von X auf AB und AC gefällten Lote der Seite BC parallel wird.

Analysis. Wenn man außer dem Parallelismus von DE und BC noch berücksichtigt, daß $AEXD$ ein Sehnenviereck ist, und man zieht noch die Diagonale AX, so läßt sich der Winkel AXC oder AXB seiner Größe nach bestimmen und daraus nach O. 15 ein zweiter Ort für X ableiten.

§ 12. Neben der Methode, die Analysis durch geometrische Örter zu bestimmen, ist als zweite Methode die Methode der Reduktion hervorzuheben, welche in allen Fällen anzuwenden ist, in welchen die erstere nicht zum Ziele führt. Diese Methode besteht darin, daß man aus den in der analytischen Figur unmittelbar erkennbaren oder durch zweckmäßige Hilfskonstruktionen erreichbaren Beziehungen entweder die betreffende Aufgabe auf eine frühere direkt reduziert, oder einen Teil der gesuchten Figur, meist in Gestalt eines Hilfsdreiecks, vorab als konstruierbar nachweist, und aus diesem Teile durch schließliche Anwendung von geometrischen Örtern die ganze gesuchte Figur ableitet. Wir engen den Begriff der Methode durch Reduktion dahin ein, daß sie die betreffende Aufgabe entweder direkt auf eine frühere zurückführt, oder doch die vorherige Konstruktion einer Hilfsfigur erfordert. Wo eine Analysis durch bloß mittelbare Ortsbestimmungen aufgestellt ist, wie bei den Aufgaben 28 und 29, rubrizieren wir diese unter die Methode durch geometrische Örter; und heben dies deshalb besonders hervor, weil von manchen Autoren auch in diesen Fällen die Methode der Reduktion erkannt wird.

Der Wege einer solchen Reduktion werden verschiedene betreten. Wir wollen dieselben hier näher besprechen und durch Beispiele illustrieren.

§ 13. Wesentlichen Dienst, namentlich bei Dreieckskonstruktionen, leisten zunächst die sogenannten Data. Unter einem Datum versteht man die Verbindung von drei oder vier planimetrischen Größen, die in der Art voneinander abhängig sind, daß man im ersten Fall (einer Verbindung von drei Größen) aus je zweien derselben ein rechtwinkliges, im andern (einer Verbindung von vier Größen) aus je dreien ein schiefwinkliges Dreieck konstruieren kann, so daß in jenem das dritte, in diesem das vierte Stück mit gegeben erscheint. In beiden Fällen kann man jedes dritte Stück des konstruierbaren rechtwinkligen, oder jedes vierte Stück des schiefwinkligen Dreiecks als mit gegeben betrachten und für die Gewinnung der Analysis verwerten.

Um nur ein Beispiel anzuführen, indem wir uns vorbehalten, die anderweitigen Daten an betreffender Stelle der Anwendung näher hervorzuheben, sei bemerkt, daß beispielsweise eine Dreiecksseite, der gegenüber liegende Winkel und der Radius des umgeschriebenen Kreises, also z. B. a, $\sphericalangle A$ und r ein Datum bilden. Denn aus je zweien dieser Stücke läßt sich das rechtwinklige Dreieck konstruieren, welches man erhält, wenn man den Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises mit einem Endpunkte der Sehne $BC = a$, etwa mit B und mit dem Mittelpunkte D derselben verbindet. Da aber dies Dreieck aus je zwei seiner Stücke, unter welchen indes eine Linie vorkommen muß, konstruiert werden kann, so bilden je zwei solcher Stücke mit jedem anderen Stücke desselben ein Datum. Man kann also in vorliegendem Falle sagen, daß je zwei obiger Stücke auch mit der Entfernung des Mittelpunktes M von der Seite BC ein Datum bilden und diese als gegeben betrachten.

§ 14. Es möge hier besonders darauf hingewiesen werden, daß wir die Beziehungen der in den Bedingungen gegebenen Größen zu andern, welche entweder nach den Gesetzen der allgemeinen Größenlehre oder durch die nach Fundamentalaufgaben möglichen Konstruktionen aus jenen als neue für die Analysis verwendbare Größen abgeleitet werden können, nicht als Data auffassen, sondern vielmehr als notwendige Konsequenz der Gesetze der allgemeinen Größenlehre. Daß man z. B. aus zwei gegebenen Größen ihre Summe oder Differenz, ihr Rechteck, ihr Verhältnis, die Summe oder Differenz ihrer Quadrate, ihre mittlere, dritte und harmonische Proportionale als gegeben ableiten kann, sei hier als selbstverständlich vorausgesetzt, ohne daß wir nötig haben, den Begriff „Datum“ darauf auszudehnen. In gleicher Weise gelte es als selbstverständlich, daß man aus je zweien dieser abgeleiteten Formen die Größen einzeln ableiten kann. Denn eine Kollision mit der algebraischen Analysis findet hierdurch nicht statt, da man die Größen in jedem Falle der Kombination unmittelbar durch rein geometrische Konstruktionen abzuleiten vermag.

§ 15. Unter den hier folgenden Aufgaben, deren Analysis entweder durch direkte Zurückführung auf eine frühere Aufgabe, oder mit Hilfe von Daten gemacht werden soll, kommen auch solche wiederholt vor, deren Analysis schon mittels geometrischer Örter bestimmt worden ist.

Aufgabe 34. Durch einen Punkt in der Peripherie des kleineren zweier konzentrischen Kreise in den größeren eine Sehne zu legen, welche durch die Peripherie des kleineren in drei gleiche Teile geteilt wird. (Vergl. A. 19.)

Analysis. Zieht man den Diameter DOE und verlängert EB über B hinaus um sich selbst bis F, so ist die verlangte Sehne $DCAB$ Mittellinie im Dreieck EFD zur Seite EF und, da $BA = \frac{1}{2} AD$ ist, A der Durchschnitt der drei Mittellinien. Es ist also, da auch OAF eine Mittellinie des Dreiecks ist, $AF = 2 . AO$, also Punkt F bestimmbar. Von diesem Punkte F ist nun an den größeren Kreis eine Sekante zu legen, welche in der Peripherie desselben halbiert wird. Das geschieht aber nach A. 18.

Aufgabe 35. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus der Höhe und der Differenz der Abschnitte, welche die Höhe auf der Hypotenuse bildet.

Analysis. Ist AD die Höhe des Dreiecks und man macht $CE = BD$, so ist DE die gegebene Differenz und Dreieck ADE durch seine Katheten gegeben. Da nun die Mitte F von DE zugleich Mitte von BC ist, so ist durch $AF = FC = FB$ je ein Ort für B und C gegeben, wofür die Gerade DE der andere Ort ist.

Aufgabe 36. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Höhe, der zugehörigen Mittellinie und dem Radius des umgeschriebenen Kreises. (Aus h_a, m_a und r.)

Analysis. Ist AD die Höhe h_a und AE die Mittellinie m_a, so ist Dreieck ADE gegeben. Dann hat man für den Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises zwei Örter, nämlich das Lot in E zu ED und nach O. 2 einen Kreis um A mit r. Durch den Kreis aber werden die Punkte B und C bestimmt.

Aufgabe 37. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Höhe zu einer andern und der Differenz der Winkel an dieser andern Seite. (Aus c, h_a, $B - C$.)

Analysis. Sei AD die Höhe h_a, und AE der Winkelhalbierer w_a; dann läßt sich zeigen, das h_a, w_a und $\frac{1}{2}(B - C)$ ein Datum bilden. Bezeichnen wir nämlich $\sphericalangle BAD$ durch α, $\sphericalangle DAE$ durch δ und $\sphericalangle CAE$ durch β, so ist zunächst $\alpha + \delta = \beta$

oder $\delta = \beta - \alpha$. Nun ist aber $\beta = R - C - \delta$, $\alpha = R - B$, also $\beta - \alpha = B - C - \delta$, woraus sich ergiebt $\delta = \frac{1}{2}(B - C)$. Durch das konstruierbare Dreieck ADE ist also die winkelhalbierende Transversale w_a als ein mit gegebenes Stück bestimmt. Konstruiert man $\triangle ADE$ aus der Kathete $AD = h_a$ und $\sphericalangle \delta = \frac{1}{2}(B - C)$, so ist außer DE ein zweiter Ort nach O. 1 durch C gegeben, ebenso dadurch, daß $\sphericalangle \beta = \alpha + \delta$ ist, ein zweiter Ort für C.

Zusatz. Wäre statt h_a die w_a oder auch statt $B - C$ die w_a gegeben, so würde sich auf grund obigen Datums die Aufgabe mit Hilfe des Hilfsdreieckes ADE lösen lassen.

Aufgabe 38 und 39. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus der Hypotenuse und der Summe (oder Differenz) der Katheten. (Aus a und $b \pm c$.)

Analysis. Ist ABC das gesuchte Dreieck und man macht AD auf der Verlängerung von CA und AD' auf AC selbst gleich AB, so ist die Lösung direkt auf die Konstruktion des Dreiecks BCD oder BCD' reduziert. Im ersteren Dreiecke ist nämlich gegeben $BC = a$, $CD = b + c$ und $\sphericalangle D = 45^0$, im andern $BC = a$, $CD' = b - c$ und $\sphericalangle D' = 1\frac{1}{2} R$. Für A hat man in beiden Fällen nach O. 3 einen zweiten Ort.

Aufgabe 40 und 41. Ein Quadrat zu konstruieren, wovon die Summe (oder Differenz) der doppelten Seite und der Diagonale gegeben ist. (Gegeben $2a \pm e$.)

Analysis. Verlängert man die Diagonale AC über jeden Endpunkt um die Seite des Quadrates, so daß $AE = AB$ und $CF = CB$ ist, so ist das Dreieck EFB durch die Seite $EF = 2a + e$ und die anliegenden Winkel, deren jeder $\frac{1}{4} R$ beträgt, gegeben. Für die Punkte A und C ergiebt sich je ein zweiter Ort nach O. 3. — Stellt man im andern Falle die gegebene Differenz $2a - e$ dadurch dar, daß man AB um sich selbst bis F verlängert, und $AE = AC$ abschneidet, so ist $\triangle EFB$ gegeben durch die Seite $EF = 2a - e$ und die anliegenden Winkel. Es ist nämlich $\sphericalangle EFC = \frac{1}{2} R$ und $\sphericalangle FEC$ das Supplement von $67\frac{1}{2}^0$. Für B ergiebt sich wiederum ein zweiter Ort nach O. 3; für A ist ein zweiter Ort das Lot in C auf CF.

Aufgabe 42 und 43. Einen Rhombus zu konstruieren, von welchem die Seite und die Summe (oder Differenz) der beiden Diagonalen gegeben sind. (Aus a, $e \pm f$.)

Analysis. Wird in beiden Fällen auf die Konstruktion eines der vier rechtwinkligen Dreiecke reduziert, in welche der Rhombus durch die Diagonalen zerlegt wird. Man kennt davon außer der Hypotenuse die Summe (oder Differenz) der halben Diagonalen, also $\frac{1}{2}(e+f)$ oder $\frac{1}{2}(e-f)$. Folglich A. 38 und 39.

Aufgabe 44. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der zugehörigen Höhe und der Differenz der durch die Höhe auf der Gegenseite gebildeten Abschnitte. (Aus A, h_a und $p-q$.)

Analysis. Ist D der Fußpunkt der Höhe h_a, und man trägt $CE = q$ von CB ab, so ist $ED = p - q$. Verbindet man nun die Mitte F von DE mit A, so ist $FD = \frac{1}{2}(p-q)$, und $\triangle AEF$ gegeben, daher $p-q$, h_a und m_a ein Datum bilden. Verlängert man dann die hierdurch gegebene Mittellinie AF über F um sich selbst bis G, so ist $ABGC$ ein Parallelogramm und also $\sphericalangle ABG$ das Supplement von A gegeben. Dadurch erhält man aber im Dreieck AGB nach O. 15 einen zweiten Ort für die Ecke B.

Aufgabe 45 und 46. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem gegenüber liegenden Winkel und der Summe (oder Differenz) der den Winkel einschließenden Seiten. (Aus a, $\sphericalangle A$ und $b \pm c$.)

Analysis. Verlängert man CA über A hinaus um $AD = c$ (oder schneidet von A aus $AD' = c$ von AC ab) und verbindet D und D' mit B, so sind die Dreiecke BCD und BCD' durch zwei Seiten und einen Gegenwinkel gegeben, nämlich $BC = a$, $DC = b + c$, $\sphericalangle D = \frac{1}{2}A$; und $D'C = b - c$, $\sphericalangle BD'C = 1R + \frac{1}{2}A$. Für A erhält man in beiden Fällen einen zweiten Ort nach O. 3.

Aufgabe 47 und 48. Ein Dreieck zu konstruieren aus der Summe (oder Differenz) zweier Seiten und den beiden Gegenwinkeln. (Aus $b \pm c$, B und C.)

Analysis. Da durch die zwei Winkel B und C auch der dritte A gegeben ist, so führt die Analysis auf dieselben beiden Hilfsdreiecke, wie die vorhergehende.

Aufgabe 49 und 50. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus einer Kathete und der Summe (oder

Differenz) der Hypotenuse und der andern Kathete. (Aus b und $a \pm c$.)

Analysis. Verlängert man die Kathete AB über B um $BD = BC$ (oder schneidet von B aus auf der Verlängerung von BA über A ein Stück $BD' = BC$ ab), so erhält man in beiden Fällen durch Verbindung von D und D' mit C ein rechtwinkliges Hilfsdreieck ADC (oder $AD'C$) konstruierbar aus seinen Katheten, aus welchem der Übergang zum gesuchten Dreiecke mit Hilfe eines zweiten Ortes für B nach O. 3 sehr leicht ist.

Anmerkung. Es wäre in vorliegendem Falle unzweckmäßig, die Hypotenuse um die Kathete zu verlängern, oder letztere von der Hypotenuse abzutragen, da in beiden Fällen der rechte Winkel für die Analysis verloren gehen würde.

Aufgabe 51. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der zugehörigen Höhe und der Differenz der Abschnitte, welche diese Höhe auf der dem Winkel gegenüber liegenden Seite bildet. (Aus A, h_a und $p - q$.)

Analysis. Beschreibt man um A mit AC als Radius einen Kreis, der CB in E schneidet, so ist $BE = p - q$. Betrachtet man nun BEA als Hilfsdreieck, da die beiden Ecken B und E durch $p - q$ unmittelbar gegeben sind, so ist für die dritte Ecke zunächst ein Ort durch die gegebene Höhe h_a gegeben. (Vergl. O. 4.) In dem zweiten Orte für A, nämlich der Seite CA läßt sich der Punkt G bestimmen, in welchem das in E zu BC errichtete Lot die Seite AC trifft. Es liegt nämlich dieser Punkt auf dem um A mit AC beschriebenen Kreise und es ist daher $EG = 2h_a$. Verbindet man nun diesen konstruierbaren Punkt mit B, so ist, da $\sphericalangle BAG = 2R - A$ durch $\sphericalangle A$ gegeben ist, für A ein zweiter Ort nach O. 15 gegeben.

Aufgabe 52. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Höhe und der zugehörigen Mittellinie, wenn die hierzu gehörige Seite doppelt so groß sein soll als eine der beiden andern. (Aus h_a, m_a, wenn $a = 2b$.)

Analysis. Ist ABC das verlangte Dreieck, und in demselben $AD = m_a$, $AE = h_a$, so ist Dreieck ADE unmittelbar gegeben, und DE ein Ort für C. Da aber gemäß der Bedingung $a = 2b$ Seite $AC = DC$ sein soll, so ist für C ein zweiter Ort nach O. 3 gegeben.

Aufgabe 53. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Radius des umgeschriebenen Kreises, einer Höhe und der Differenz der beiden nicht zugehörigen Winkel. (Aus r, h_a und $B - C$.)

Analysis. Die Höhe h_a, der zugehörige Winkelhalbierer und die Differenz der beiden anderen Winkel bilden ein Datum (s. A. 37). Es ist daher der Winkelhalbierer AE durch das Dreieck ADE (D Fußpunkt der Höhe h_a) gegeben. Verbindet man nun A mit dem Mittelpunkt M des umgeschriebenen Kreises, so ist $\sphericalangle EAM = DAE$. Denn $\sphericalangle BAE = CAE$ und $\sphericalangle BAD = CAM$, weil ihre Komplemente als Peripheriewinkel auf demselben Bogen AC einander gleich sind. Dadurch ist aber ein Ort für den Mittelpunkt M gegeben, ein anderer durch r nach O. 1.

Aufgabe 54. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind eine Höhe, der entsprechende Winkelhalbierer und die Differenz der durch die Höhe gebildeten Abschnitte der betreffenden Seite. (Aus h_a, w_a, $p - q$ auf a.)

Analysis. Zieht man $AD \parallel BC$ bis in die Peripherie des umgeschriebenen Kreises, so ist $AD = p - q$; ferner $\sphericalangle ACD = B - C$, $DH = h_a$. Da nun $B - C$ durch h_a und w_a gegeben ist (vergl. A. 37), so ist das Hilfsdreieck ADC konstruierbar. Der um ADC konstruierbare Kreis ist ein zweiter Ort für B; der erstere ist die Parallele durch C zu AD.

Aufgabe 55. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der Differenz ihrer Projektionen auf die dritte Seite. (Aus b, c, $p - q$.)

Analysis. $\triangle ADC$ (Fig. wie vorhin) ist durch seine drei Seiten gegeben.

Aufgabe 56. Ein Dreieck zu konstruieren aus der Differenz der durch eine Höhe auf einer Seite gebildeten Abschnitte, der Differenz der an dieser Seite anliegenden Winkel und einer der beiden anderen Seiten. (Aus $p - q$, $B - C$ und b [oder c.])

Analysis. Wiederum ist (vergl. vorige Analysis) das Dreieck ADC unmittelbar gegeben.

Aufgabe 57. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Radius des umgeschriebenen Kreises, der Differenz zweier

Winkel und einer anliegenden Seite. (Aus r, $B - C$ und b.)

Analysis. Wiederum Dreieck ADC gegeben, da der Radius, $\sphericalangle ACD$ und Seite AD ein Datum bilden. (Vergl. § 13.)

Aufgabe 58. Die vorige Aufgabe mit der Änderung, daß statt $B - C$ die Differenz $p - q$ gegeben ist.

Analysis wiederum durch das Dreieck ADC.

Aufgabe 59. Zwischen die Seiten AB und BC die Gerade $XY = a$ so zu legen, daß $AX : CY = p : q$ wird.

Analysis. Macht man $AY' \# XY$ und zieht YY', so muß auch $DB : BC = p : q$ sein. Dadurch ist aber CD zu konstruieren als ein Ort für Y', ein zweiter Ort wird durch die gegebene Länge a nach O. 1 bestimmt.

Aufgabe 60. In ein Viereck einen Rhombus zu beschreiben, dessen Seiten den Diagonalen des Vierecks parallel werden.

Analysis. Sind X, Y, Z und T die Ecken des eingeschriebenen Rhombus in den Seiten AB, BC, CD und DA, so ergiebt sich leicht, daß jede Seite in diesen Punkten nach dem Verhältnis der Diagonalen geteilt werde.

Aufgabe 61. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises an diesen eine Sekante zu ziehen, welche durch die Peripherie nach dem goldenen Schnitt geteilt wird.

Analysis. Ist O der Mittelpunkt des gegebenen Kreises und AXY die verlangte Sekante, so muß

entweder $\qquad AY : AX = AX : XY$

oder $\qquad AY : XY = XY : AX$

sein, je nachdem das äußere oder das innere Stück der Sekante der größere Abschnitt sein soll. Im erstern Falle läßt sich der Durchschnitt der Parallele XB zu OY mit AO, sowie die Länge der Parallele bestimmen; im andern Falle ergiebt sich, daß die Sehne XY der von A an den Kreis gezogenen Tangente gleich ist.

Aufgabe 62. Von zwei Punkten außerhalb eines Kreises an diesen durch einen gemeinschaftlichen Punkt der Peripherie zwei Sekanten so zu ziehen, daß die Verbindungslinie der andern Endpunkte der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte parallel wird.

Analysis. Der Durchschnitt einer in einem der Endpunkte der einen Sekante an den Kreis gelegten Tangente mit der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte läßt sich mittels einer Proportion bestimmen.

Anmerkung. Es sei bemerkt, daß man auf diese Aufgabe eine Berührungsaufgabe: Durch zwei Punkte einen Kreis zu legen, der einen gegebenen Kreis berührt reduzieren kann.

Aufgabe 63. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der Halbierungslinie des eingeschlossenen Winkels. (Aus b, c und w_a.)

Analysis. Mit Hilfe der Parallele durch B zu AC bis in die verlängerte w_a (in D) kann man diese Verlängerung als 4. Proportionale konstruieren. Dann das Dreieck ABE (E Endpunkt der Verlängerung), aus diesem ABD und endlich ABC.

Aufgabe 64. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Höhe, Mittellinie und einem Winkelhalbierer, welche alle drei von derselben Ecke ausgehen. (Aus h_a, m_a, w_a.)

Analysis. Sind D, E und F die Fußpunkte von h_a, m_a und w_a, so sind die Dreiecke ADE und ADF gegeben. Für den Mittelpunkt M des dem gesuchten Dreiecke umgeschriebenen Kreises ist ein Ort das in E zu DE errichtete Lot, der andere bestimmt sich dadurch, daß $\sphericalangle MAF = FAD$ ist. Der Radius ist AM, und der Kreis bestimmt die Punkte B und C.

Aufgabe 65. Von der Spitze eines Dreiecks zur Grundlinie eine Gerade so zu ziehen, daß sie die mittlere Proportionale zu den von ihr gebildeten Abschnitten der Grundlinie wird.

Analysis. Ist AD die verlangte Gerade, welche über D bis in den um ABC beschriebenen Kreis verlängert diesen in E trifft, so muß $AD = DE$ sein. Verbindet man daher den Mittelpunkt M jenes Kreises mit D, so ist $MD \perp AE$, daher für D gemäß O. 6 ein zweiter Ort zu bestimmen, während die gegebene Seite BC der erste Ort für D ist.

Aufgabe 66. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Differenz der anliegenden Winkel und der Summe der beiden andern Seiten. (Aus a, $B - C$, $b + c$.)

Analysis. Beschreibt man um A mit der kleineren Seite c einen Kreis, welcher die Seite b in D, ihre Verlängerung in E schneidet, und man verbindet D mit B, so ist $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}(B - C)$. Verbindet man ferner E mit B, so ist $\sphericalangle DBE = 1\,R$ und das Hilfsdreieck CBE durch zwei Seiten, nämlich $CE = b + c$, $CB = a$, und den der größern dieser gegenüber liegenden Winkel, $\sphericalangle CBE = 1\,R + \frac{1}{2}(B - C)$, gegeben. Für A erhält man dann in einfachster Weise einen zweiten Ort außer der Seite CE nach O. 3.

Aufgabe 67. Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel und der Summe der beiden ungleichen Höhen. (Aus $\sphericalangle A$ [oder B] und $h_a + h_b$.)

Analysis. Verlängert man die Höhe BE (h_b) über E bis F, so daß $EF = AD$ (h_a) wird, und zieht FG bis in BC senkrecht zu BF, so ist $\sphericalangle FBG = \frac{1}{2}A$. Aus dem planimetrischen Satze, daß sich die Höhen eines Dreiecks umgekehrt wie die zugehörigen Seiten verhalten, ergiebt sich durch die Proportion $BC : CG = BE : EF$, daß $CG = CA$ ist. Deshalb hat man, wenn Dreieck BFG konstruiert ist, für A einen Ort in der Halbierungslinie des $\sphericalangle FGB$, welcher $= \sphericalangle C$ ist. Nun ist $\sphericalangle ABF$ das Komplement von A, und dadurch ein zweiter Ort für A gegeben. Das Lot von A auf BF bestimmt C.

Aufgabe 68. Statt der Summe der beiden ungleichen Höhen möge ihre Differenz gegeben sein.

Analysis. Wenn man von E aus auf EB das Stück $EF = AD$ abträgt, so ist GB die gegebene Differenz, und wiederum, wenn $FG \perp FE$ gezogen wird (F in BC), das Dreieck GBF gegeben. Für A ergeben sich zwei Örter, einer, weil GA den Nebenwinkel von $\sphericalangle G$ halbiert, der andere durch $\sphericalangle AGC$, welcher sich bestimmen läßt.

§ 16. Wenn in der analytischen Figur die gegebenen Stücke nicht so zusammen liegen, daß sie einen konstruierbaren Teil der gesuchten Figur bilden, so kann man einen solchen häufig dadurch erhalten, daß man die betreffenden Linien in andere Lagen bringt, welche den ursprünglichen parallel sind. Bei einer solchen Verlegung von Geraden bleiben, was ein großer Vorteil ist, die etwa gegebenen Winkel zwischen denselben unverändert erhalten. Mit etwa vorkommenden Kreisen kann eine derartige Verlegung oder Verschiebung in zweifacher Weise vorgenommen werden. Entweder wird unter Beibehaltung des Radius der Mittelpunkt des Kreises auf einer Geraden von bestimmter Richtung verschoben, oder man verschiebt unter Beibehaltung der Lage des Mittelpunktes die Peripherie gewissermaßen parallel mit sich, indem man den Radius größer oder kleiner nimmt, wobei auch, wenn man den Radius Null werden läßt, der Fall eintritt, daß der ganze Kreis auf seinen Mittelpunkt reduziert wird. Diese letzte Art der Verschiebung eines Kreises ist identisch mit der Hilfskonstruktion konzentrischer Kreise. Verwandt mit dieser Methode ist auch die Umlegung eines Teils der analytischen Figur, um eine bequemere Lage der gegebenen Stücke zu einander zu erhalten. Diese Methode der Verschiebung von Geraden und Kreisen, sowie der Umlegung findet übrigens so häufig mit Vorteil Anwendung und bringt willkommene Erleichterung durch Reduktion, daß sie verdient, als eine Methode der Reduktion unter dem Namen Methode der Parallelverschiebung und der Umlegung besonders hervorgehoben zu werden. Die Art ihrer Anwendung möge an einer Anzahl von Beispielen näher erörtert werden.

Aufgabe 69. Ein Paralleltrapez zu konstruieren, dessen vier Seiten gegeben sind.

Analysis. Verschiebt man eine der nicht parallelen Seiten parallel mit sich so, daß sie von dem einen Endpunkte der andern ausgeht — zieht man zu diesem Zwecke z. B. $CE \parallel DA$, so ist Dreieck EBC durch seine drei Seiten gegeben.

Aufgabe 70. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Mittellinien und der dritten Höhe. (Aus m_b, m_c und h_a.)

Analysis. Verlegt man die Höhe AD in den Fußpunkt der einen Mittellinie, etwa nach F, dem Fußpunkte von m_b, so wird das Lot $FH = \frac{1}{2} h_a$ und Dreieck BFH ist unmittelbar gegeben.

Aufgabe 71. Von den Endpunkten einer Sehne nach einem Punkte der Kreisperipherie zwei Gerade zu ziehen, welche auf einer zweiten Sehne zwischen sich ein Stück von gegebener Länge abschneiden.

Analysis. Sind die Geraden AX und BX so durch CD

gezogen, daß $FG = a$ ist, und man zieht $AH \# FG$, so ist Punkt H bekannt und $HG \parallel AX$. Daher ist $\sphericalangle HGB$ gleich dem Peripheriewinkel X, welcher durch die Sehne AB gegeben ist und durch ihn über HB einen Kreisbogen als zweiten Ort für G.

Aufgabe 72. Ein Trapez zu konstruieren aus seinen Diagonalen, dem Winkel derselben und einer Seite.

Analysis. Verlegt man die Diagonale DB nach CE, wo $CE \parallel DB$ ist, so ist Dreieck ACE gegeben, da $\sphericalangle ACE$ das Supplement des Winkels der Diagonalen oder auch diesem Winkel selbst gleich ist. Das Trapez selbst ist mit Hilfe der gegebenen Seite, welche es auch sei, in einfachster Weise abzuleiten.

Aufgabe 73. Ein Trapez zu konstruieren aus den Diagonalen und den parallelen Seiten.

Analysis durch dieselbe Verschiebung, wie vorhin.

Aufgabe 74. Ein Trapez zu konstruieren aus den Diagonalen und den nicht parallelen Seiten.

Analysis. Es sei $ABCD$ das verlangte Paralleltrapez, AB und CD die parallelen Seiten. Bringt man nun durch Parallelverschiebung DA und DB in die Lage CE und CF, so liegen die vier gegebenen Linien zusammen. Es ist dann $AE = DC = BF$ und man würde das verlangte Trapez leicht erhalten, wenn man durch die vier um C mit den gegebenen Linien als Radien beschriebenen konzentrischen Kreise eine Gerade so legen könnte, daß $AE = BF$ würde. Wenn die Gerade die Kreise beziehungsweise zum zweiten Male in den Punkten E', A', B', F' schneidet, und man berücksichtigt, daß je zwei Abschnitte der Geraden, welche zwischen denselben Peripherien liegen, einander gleich sind, so müßte $EA = B'F'$ sein. Bestimmt man nun für den Punkt E in Bezug auf den äußersten Kreis, für Punkt A in Bezug auf den Kreis durch B die (innere) Potenz, so ist jene $EF \,.\, EF'$, diese $AB' \,.\, AB$; da nun $EF = AB$ ist, so verhält sich $EF' : AB'$ wie die Potenzen der Punkte E und A in den bezeichneten Kreisen. Nun sind diese Potenzen für einen beliebigen Punkt der Peripherien für die bezeichneten Kreise konstant, da die kleinsten Sehnen konstant sind. Man erhält also das Verhältnis dieser Potenzen durch zwei Gerade ausgedrückt, wenn man durch einen beliebigen Punkt in jeder der Peripherien eine Sehne so legt, daß der eine

Abschnitt der einen einem Abschnitte der andern gleich wird. In kurzer Bezeichnung erhalten wir also $EF' : AB' = m : n$ oder $2AE + AB' : AB' = m : n$. Daraus aber ergiebt sich $AE : AB' = \frac{1}{2}(m - n) : n$. Hiernach kann man aber bei beliebiger Annahme des Punktes A den Punkt E und B' und so die ganze Gerade bestimmen.

Aufgabe 75. Ein Parallelogramm zu konstruieren aus seinen Seiten und dem Winkel der Diagonalen.

Analysis. Verlegt man DB parallel mit sich nach CF, so ist Dreieck ACF gegeben, da AF die Summe der gegebenen Seiten, die Mittellinie CB eine dieser Seiten und $\sphericalangle ACF$ durch den Winkel der Diagonalen bekannt ist. Für C hat man einen Ort nach O. 1, da B und BC gegeben, den andern nach O. 15, da $\sphericalangle ACF$ bekannt ist.

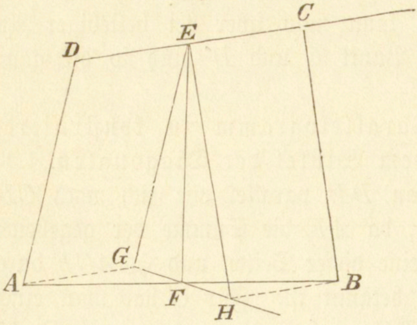
Aufgabe 76. Ein Viereck zu konstruieren, von welchem die Seiten und die Verbindungslinie der Mitten seiner Diagonalen der Länge nach gegeben sind.

Analysis. Ist $ABCD$ das verlangte Viereck, E und F die Mitten der Diagonalen BD und AC, und man zieht EG (G in BC) parallel zu CD, $FG \parallel AB$ (FG muß nämlich ebenfalls die Mitte G von BC treffen), und in gleicher Weise durch E und F die Parallelen EH und FH zu AD und BC, so sind die beiden Dreiecke EFG und EFH durch ihre drei Seiten gegeben. Nun wird $HG \parallel AC$, also ist die Parallele durch F zu HG ein Ort für C, ein anderer die Parallele durch G zu FH. C bestimmt B, da $CG = GB$, dieses A, da $BH = HA$ ist. Auch für die vierte Ecke ergeben sich leicht zwei Örter, nämlich die Parallele durch A zu HE und eine andere durch C zu GE.

Aufgabe 77. Ein Viereck zu konstruieren aus seinen Seiten und der Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten.

Analysis. Verschiebt man die beiden andern Seiten, etwa DA und CB, parallel bis an die Mitte E der einen Seite (DC), so daß $EG \# DA$ und $EH \# CB$ ist, so ist, wenn F die Mitte von AB ist, die Verbindung von G mit F, und F mit H eine einzige Gerade, da sich aus der Kongruenz der Dreiecke AGF und BHF die Gleichheit von $\sphericalangle AFG$ und BFH ergiebt. Aus derselben Kongruenz folgt auch, daß $FG = FH$, also EF eine Mittellinie des Dreiecks EGH ist, von welchem außerdem noch die Seiten $EG = DA$ und $EH = CB$ gegeben sind. Für das Dreieck EGH ergiebt sich aber eine einfache Analysis durch Umlegung. Verlängert man nämlich EF über F um sich selbst bis J, so ist Dreieck EJH durch seine drei Seiten gegeben.

Fig. 4.



Zusatz. Man kann in den Fällen, wo eine Mittellinie zu den Bestimmungsstücken eines Dreiecks gehört, die Verlängerung dieser über ihren Fußpunkt um sich selbst als eine ziemlich sicher erfolgreiche Hilfskonstruktion bezeichnen.

Aufgabe 78 und 79. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der Summe (oder Differenz) der einschließenden Seiten und der aus dem Scheitel des gegebenen Winkels gezogenen Mittellinie. (Aus A, $b \pm c$ und m_a.)

Analysis wird gemäß Zusatz zu A. 77 auf ein Dreieck reduziert, von welchem statt der Mittellinie die dritte Seite gegeben ist, dessen Analysis in A. 77 ausgeführt ist.

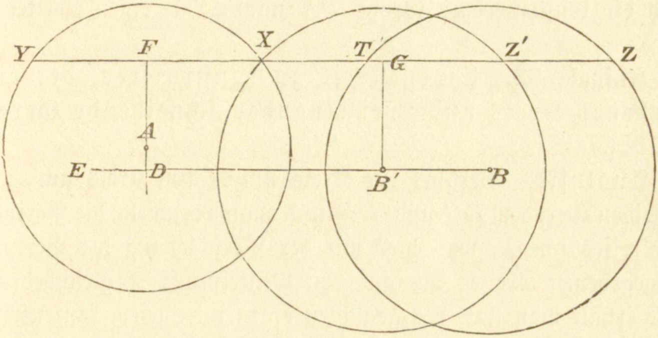
Aufgabe 80. Ein Parallelogramm zu konstruieren aus einer Seite und den beiden Höhen.

Analysis durch Parallelverschiebung der einen Höhe in den einen Endpunkt der gegebenen Seite.

Aufgabe 81. Durch zwei auseinander liegende Kreise in gegebener Richtung eine Gerade zu ziehen, so daß die entstehenden Sehnen eine gegebene Summe bilden.

Analysis. Verschiebt man den Mittelpunkt B des einen Kreises so, daß seine Entfernung von der gesuchten Geraden dieselbe bleibt, also parallel der die Richtung der gesuchten Geraden angebenden Geraden, so bleibt die Größe der Sehne in demselben ungeändert. Es empfiehlt sich also, durch eine solche Verschiebung die gegebenen Kreise in eine Lage zu einander zu bringen, welche der Lösung dieser Aufgabe günstiger ist. Eine solche ist aber die, wo sich dieselben auf der Gesuchten durchschneiden. Heißt nun YX die Sehne im Kreise um A, TZ die im Kreise um B, und man verschiebt den Mittelpunkt auf der die Richtung der Gesuchten angebenen Geraden bis in B', so daß der Kreis durch X geht und die Sehne XZ' erhält, so ist $XZ' = TZ$, also die Summe $YX + XZ' = YX + TZ$. Fällt man nun von dem Mittelpunkte A und dem neuen Mittelpunkte B' Lote auf die gesuchte

Fig. 5.



YZ, so liegt zwischen deren Fußpunkten F und G eine Strecke, welche der halben gegebenen Summe gleich ist. Da nun das Lot von A auch die BE etwa in D rechtwinklig trifft, welcher Punkt bestimmt werden kann, so ist auch DB' gleich jener halben Summe und der neue Mittelpunkt B' hierdurch gegeben. Konstruiert man dann um B' den verschobenen Kreis, so hat man zur Erhaltung der Gesuchten YZ durch den Durchschnittspunkt X beider Kreise das Lot zu dem Lote zu ziehen, welches man von A auf die ihrer Richtung nach gegebene BE errichtet hat.

Aufgabe 82. Von einem Punkte, der außerhalb zweier getrennt liegenden Kreise liegt, eine Gerade durch diese zu legen, daß die in denselben entstehenden Sehnen einander gleich werden.

Analysis. Könnte man den einen Kreismittelpunkt unter Beibehaltung seiner Entfernung von der gesuchten Geraden so verschieben, daß die gleichen Sehnen aufeinander fielen, so wäre die Aufgabe durch die gemeinschaftliche Sehne in der neuen Lage gelöst.

Das geht aber auf folgende Weise. Verschiebt man den Mittelpunkt N des einen Kreises auf einer Geraden, welche parallel der gesuchten Geraden PD ist, welche im Kreise um M die Sehne AB, im andern die gleich große Sehne CD bildet, bis X, so daß die Sehne CD mit AB zusammenfällt, so ist, wenn man MX zieht, $\sphericalangle MXN = 1R$, wodurch ein Ort für X nach O. 6, nämlich der Halbkreis über der Centrale MN als Diameter gegeben ist. Nun ist die Tangente von P an den Kreis um M gleich der Tangente an den Kreis um X, dessen Radius gegeben ist. Man erhält also durch die konstruierbare Größe PX nach O. 1. einen zweiten Ort für X.

Aufgabe 83. Einen Kreis zu konstruieren, der einen gegebenen Kreis und zwei einander schneidende Geraden berührt.

Analysis. Berührt der Kreis um X den Kreis um A und die beiden Geraden BC und BD und man verschiebt die Peripherie des Kreises um X, was hier mit der Verschiebung der Peripherie des gegebenen Kreises bis auf den Mittelpunkt A gleichbedeutend ist, so erhält man statt des gesuchten einen mit diesem konzentrischen Kreis, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei Gerade, welche von den gegebenen um den Radius des gegebenen Kreises entfernt sind, berührt. Durch die Verschiebung der Kreisperipherie ist also eine Reduktion auf eine einfachere Aufgabe gewonnen.

Aufgabe 84. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei andere berührt und zwar den einen in einem gegebenen Punkte.

Analysis. Berührt der Kreis um X den Kreis um A in B und außerdem den Kreis um C, so wird, wenn man die Peripherie desselben bis in C verschiebt, dieser konzentrische Kreis, außer daß er durch C geht, noch einen um A mit einem Radius, welcher der Differenz der gegebenen beiden Radien gleich ist, beschriebenen Kreis in einem bestimmbaren Punkte berühren. Also wiederum eine Reduktion auf eine einfachere Aufgabe.

Aufgabe 85. Ein Viereck zu konstruieren aus seinen Winkeln und zwei gegenüber liegenden Seiten.

Analysis. Verschiebt man die eine der gegebenen Seiten, AB etwa an die andere als DE, so ist Dreieck DCE gegeben, da $\sphericalangle CDE = A + D - 2R$ gegeben ist, wenn $A + D > 2R$ ist, oder $\sphericalangle CDE = 2R - (A + D)$ für den Fall, daß $A + D < 2R$ ist. Ist $A + D = 2R$, so ist die Lösung sehr einfach.

Aufgabe 86. Durch zwei aus einander liegende Kreise in gegebener Richtung eine Gerade zu legen, so daß die entstehenden Sehnen eine gegebene Differenz bilden.

Analysis. (Vergl. A. 81.) Verschiebt man den Mittelpunkt B des kleineren Kreises in der gegebenen Richtung bis B', so daß DB' gleich der halben gegebenen Differenz ist, so ist $B'X$ gleich dem Radius dieses Kreises, also X direkt bestimmbar.

Aufgabe 87. Ein Paralleltrapez zu konstruieren aus den nicht parallelen Seiten, einer Diagonale und dem Verhältnis der parallelen Seiten.

Analysis. Verlegt man die Seite AB nach DE, so sind die drei konzentrischen Kreise um D mit DC, DE und DB gegeben. Man hat in diese eine Sehne BEC zu legen, daß $BE : BC$ das gegebene Verhältnis ist. (S. Nachtr. 14.)

Aufgabe 88. Ein Viereck zu konstruieren aus drei Seiten und den beiden Winkeln an der vierten Seite.

Analysis. Sind DA, AB und BC die gegebenen drei Seiten und D und C die gegebenen Winkel, und man fällt von A und B die Lote AE und BF auf die vierte Seite, so sind durch die konstruierbaren Dreiecke ADE und BCF, in welchen außer der Hypotenuse aus den gegebenen Winkeln D und C sich je ein Winkel ableiten läßt, die beiden parallelen Seiten AE und BF eines Trapezes gegeben, von dem man noch die Seite AB kennt. Dies erhält man durch das Dreieck ABG, in welchem $BG = BF - AE$ ist.

Aufgabe 89. Ein Trapez zu konstruieren aus seinen Diagonalen, der Verbindungslinie der Mitten der nicht parallelen Seiten und einem Winkel.

Analysis. Ist EF die gegebene Verbindungslinie, DB und AC die Diagonalen, B der gegebene Winkel, und man bringt die Diagonale BD in die parallele Lage AK, so wird, wenn man EF bis G in AK verlängert, sich beweisen lassen, daß GH (H Durchschnitt mit AC) gleich EF ist. Es ist also $\triangle AGH$ gegeben, da AG und AH die Hälften der betreffenden Diagonalen sind. Für B ist ein Ort durch $\sphericalangle B$ gegeben nach O. 15, wenn man zuvor

AH bis C um sich selbst verlängert, der andere ist die Parallele durch A zu GH. Durch das so bestimmte B erhält man einen Ort für D als Parallele durch B zu AG. Schließlich hat man AG um sich selbst bis K zu verlängern, und KC ist der zweite Ort für D.

Aufgabe 90. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei andere und eine gegebene Gerade berührt.

Analysis. Verschiebt man die Peripherie des gesuchten Kreises bis in den Mittelpunkt des einen der gegebenen Kreise, so ist dieser neue Kreis ein solcher, welcher durch einen gegebenen Punkt geht, eine Gerade und einen Kreis berührt, und der sich als Hilfskreis einfacher konstruieren läßt, als der verlangte. Apollonisches Berührungsproblem!

Aufgabe 91. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der Differenz der gegenüber liegenden Winkel. (Aus b, c und $B - C$.)

Analysis mittels Umlegung. Legt man das Dreieck ABC so, daß C' in B, und B' in C zu liegen kommt, wobei die Ecke A' in der durch A zu BC gezogenen Parallele liegt, so ist $\triangle AB'A'$ unmittelbar durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gegeben. Es ist nämlich $\sphericalangle AB'A' = B - C$.

Aufgabe 92. In einen gegebenen Kreis ein Viereck zu beschreiben, wovon man zwei gegenüber liegende Seiten und die Summe der beiden andern Seiten kennt.

Analysis durch Umlegung. Bringt man nämlich $\triangle ACD$ in die Lage ACD', so daß $AD' = CD$ und $CD' = AD$ ist, so liegen beide Paare Seiten, die gegebenen und die nicht gegebenen, mit ihren Endpunkten an einander. Das Dreieck ABD' läßt sich dann unmittelbar konstruieren und die Ecke C bestimmen. Legt man dann das Dreieck ACD' wieder um, so daß $AD = CD'$ und $CD = AD'$ wird, so ist $ABCD$ das verlangte Viereck.

Aufgabe 93. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel und der zugehörigen Höhe und Mittellinie. (Aus $\sphericalangle A$, h_a und m_a.)

Analysis durch Umlegung in die Lage $A'BC$, wo A' an der andern Seite von BC liegt, und $AB = AC$, $A'C = AB$

wird. Es ist dann $ABA'C$ ein Parallelogramm und also $AA' = 2m_\alpha$; ferner $\sphericalangle ABA' = 2R - A$.

Aufgabe 94. Ein Quadrat zu konstruieren, wovon zwei Gegenecken auf einer gegebenen Geraden in gegebenen Punkten liegen, die beiden andern aber in die Peripherie zweier gegebenen Kreise fallen sollen.

Analysis durch Umlegung. Sind nämlich A und B die gegebenen Ecken in der Geraden MN, X und Y die Ecken auf den Peripherien der Kreise um O und O', so ist $XY \perp AB$. Wenn man daher den Kreis O' mit seinem Mittelpunkt in den Gegenpunkt von O' in bezug auf MN verlegt, so wird derselbe den Kreis O in X durchschneiden.

Aufgabe 95. In einen Kreis ein Viereck einzuschreiben, wenn man von demselben zwei gegenüber liegende Seiten und das Verhältnis der beiden andern kennt.

Analysis durch Umlegung wie bei A. 92.

Aufgabe 96. Ein Tangentenviereck $ABCD$ zu konstruieren aus zwei an einander stoßenden Seiten (AD und AB) und den beiden anliegenden Winkeln (von denen keiner eingeschlossen ist).

Analysis durch Umlegung. Legt man nämlich das Dreieck ADC an die andere Seite der den Winkel A halbierenden Geraden, so wird $D'C'$ in der neuen Lage Tangente bleiben und man erhält ein konstruierbares Dreieck, wovon man die Seite $D'B$ und die beiden anliegenden Winkel kennt. Dadurch aber erhält man auch den dem Vierecke einzuschreibenden Kreis als einen äußern Berührungskreis dieses Dreiecks.

§ 17. Eine Umlegung dieser Art, wie sie schon bei Aufgabe 94 vorkam, pflegt man ihrer besonderen Natur wegen „Umlegung durch Drehung um eine Axe" zu nennen. In A. 94 war die gegebene Gerade, hier die den Winkel A halbierende Gerade die Axe. Die Vorteile für die Lösung ergeben sich hierbei aus der symmetrischen Lage der ursprünglichen und der durch Drehung erhaltenen Figur zur Drehungsaxe.

In vielen Fällen ergeben sich verwendbare Vorteile für die Lösung einer Aufgabe durch die Drehung einer Figur (d. h. eines Systems von Geraden und Kreisbogen) in weiterem Sinne. Wir verstehen darunter die Drehung einer Figur in bezug auf einen gegebenen Punkt in der Weise, daß die Verbindungslinie eines jeden Punktes der Figur mit dem gegebenen Punkte um einen bestimmten Winkel (den Drehungswinkel δ), selbstverständlich in demselben Sinne, gedreht wird, und die Entfernungen zweier entsprechenden Punkte vom gegebenen Punkte vor und nach der Drehung in einem konstanten Verhältnis stehen.

Man übersieht die sich hierbei ergebenden Vorteile am sichersten, wenn man den Drehungswinkel δ zunächst gleich Null nimmt. Für diesen Fall reduziert sich die ganze Operation auf die Konstruktion eines Systems, welches in bezug auf den gegebenen Punkt ähnlich liegt, wie das gegebene, wobei man eine direkt ähnliche und eine umgekehrt ähnliche Lage unterscheidet, je nachdem der dem Punkte A des gegebenen Systems entsprechende Punkt A' des neuen mit diesem an derselben oder entgegengesetzten Seite des gegebenen Punktes P liegt.

Da hierbei jede Länge PA' des neuen Systems aus der entsprechenden Länge PA des gegebenen nach der Proportion $PA' : PA = m : n$ gewonnen wird, so daß $PA' = \frac{m}{n} \cdot PA$ ist, so kann man diese Konstruktion passend eine Multiplikation des Systems mit $\pm \frac{m}{n}$ nennen, je nachdem eine direkt oder umgekehrt ähnliche Lage erhalten wird.

Ist die multiplizierte Figur ein Kreis, so lassen sich die durch eine solche Multiplikation sich ergebenden Vorteile am besten übersehen und in ihrer allgemeinen Gültigkeit am einfachsten beweisen. Durch die konstruktive Ausführung einer solchen ergiebt sich zugleich, was unter Multiplikation eines Punktes in bezug auf einen gegebenen zu verstehen ist.

Man kann nämlich von je zwei Kreisen in der Ebene jeden als durch Multiplikation des andern entstanden denken. Hierbei heißen homologe Punkte beider Kreise je zwei, welche auf demselben Ähnlichkeitsstrahl liegen; homologe Gerade werden außer den Verbindungslinien homologer Punkte (Ähnlichkeitsstrahlen) je zwei Gerade genannt, von denen die eine zwei Punkte des einen Kreises, die andere die homologen Punkte des anderen verbindet (homologe

Linien der ersten und der zweiten Art!); homologe Winkel endlich heißen die Winkel, welche je eine homologe Gerade der ersten und zweiten Art mit einander bilden.

Alsdann ergiebt sich mit Hilfe bekannter Lehrsätze sehr leicht der Beweis für folgende beiden Thatsachen:

1) Homologe Gerade (der zweiten Art) sind parallel.

2) Homologe Winkel sind einander gleich.

Auf grund dieser Thatsachen ist dann ferner leicht zu erkennen, daß zur Multiplikation einer Geraden nur ein Punkt derselben zu multiplizieren ist, da die Richtung derselben nicht geändert wird, und daß ein Kreis durch Multiplikation seines Mittelpunktes und eines Punktes seiner Peripherie multipliziert wird.

Findet nun in der oben näher bezeichneten Weise noch eine wirkliche Drehung der Figur um den Winkel δ statt, welche Operation, wenn $\frac{m}{n} = f$ gesetzt wird, symbolisch einfach als Multiplikation mit f_δ in bezug auf einen gegebenen Punkt bezeichnet werden kann, so ist leicht zu erkennen, daß auch für diesen Fall obige beiden Thatsachen bestehen bleiben; denn zum Beweise derselben hat man nur auf die geänderte Lage des Ähnlichkeitspunktes Rücksicht zu nehmen.

Die hierdurch begründete Auflösungsmethode mag als Methode der Umlegung durch Drehung bezeichnet werden.

Aufgabe 97. In ein Dreieck einen Halbkreis so zu beschreiben, daß derselbe eine Seite in einem gegebenen Punkte berührt und mit seinen Endpunkten auf den beiden andern Seiten liegt.

Analysis. Es sei P der gegebene Berührungspunkt in der Seite AB und XPY das dem gesuchten Halbkreise entsprechende rechtwinklige Dreieck, wovon X in AC, Y in BC liegt. Multipliziert man eine der beiden Seiten AC oder BC, etwa BC in bezug auf P mit -1 (man macht $PB' = PB$ und durch B' die Parallele $B'D$ zu BC), so ist, wenn man YP bis Y' in dieser Parallele verlängert, $\measuredangle Y'XP = YXP = XPM$ (M Mittelpunkt des Halbkreises) d. h. $XY' \parallel PM$. Wenn man daher PM nach beiden Seiten bis zu den Durchschnitten F und G mit der Seite AC und der Parallele DB' verlängert, so hat man zur

Bestimmung des Punktes X in das Dreieck GDF ein rechtwinkliges Dreieck so zu beschreiben, daß der Scheitel des rechten Winkels in P fällt, und die Hypotenuse $XY' \parallel FG$ werde. Diese Aufgabe wird aber durch die später zu behandelnde Ähnlichkeitsmethode gelöst, weshalb wir auf A. 125 verweisen.

Aufgabe 98. In ein Kreissegment ein einem gegebenen ähnliches Dreieck so zu beschreiben, daß eine Ecke in einen gegebenen Punkt der Sehne fällt.

Analysis. Man berücksichtige die gegebene Form des zu konstruierenden Dreiecks dadurch, daß man den Winkel, dessen Scheitel in den gegebenen Punkt der Sehne fallen soll, sowie das Verhältnis der denselben einschließenden Seiten als gegeben betrachtet. Ist dieser Winkel $= \alpha$ und das Verhältnis der Schenkel desselben $\frac{m}{n} = f$, so multipliziere man den Kreis M, wozu das gegebene Segment gehört, in bezug auf den gegebenen Punkt P der Sehne AB mit f_α, indem man zunächst $\sphericalangle BPC = \alpha$ und $PC = f \,.\, PB$ macht; alsdann mache man $\sphericalangle MPM' = \alpha$ und $PM'' = f \,.\, PM'$. Dann ist M'' Mittelpunkt und $M''C$ Radius des durch die Multiplikation erhaltenen Kreises. Derselbe schneidet den Bogen des Segmentes in X; macht man nun noch $\sphericalangle XPY = \alpha$, so ist XPY das verlangte Dreieck.

Der Beweis folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke MPB und $M''PC$, und $PM''X$ und PMY. (M und M'' sind homologe Winkel.)

Zusatz. Soll PXY gleichseitig werden, so vereinfacht sich die Konstruktion wesentlich.

Aufgabe 99. Ein Dreieck mit einer Ecke in einen gegebenen Punkt und mit den beiden andern Ecken auf zwei Kreisperipherien zu legen, so daß es einem gegebenen ähnlich wird.

Analysis. Liegt das Dreieck AXY, dessen Eckpunkt A gegeben ist, mit den Ecken X und Y auf den Peripherien der Kreise um M und N und ist einem gegebenen Dreieck ähnlich, oder, was dasselbe ist, ist $\sphericalangle A$ gegeben und ebenso das Verhältnis $AX : AY = m : n$, so kommt die ganze Lösung auf die Bestimmung des Punktes X (oder Y) hinaus. Dreht man nun AN in die Lage AP, so daß $\sphericalangle NAP =$ dem gegebenen Winkel A ist, so ist auch $\sphericalangle PAX = NAY$. Bestimmt man nun AN' so, daß $AN' : AN = m : n$ ist, so muß, damit die Dreiecke $AN'X$ und ANY ähnlich werden, auch $N'X : NY = m : n$ sein. Da nun NY als Radius des Kreises N gegeben ist, so läßt sich $N'X$ bestimmen und dadurch der Punkt X selbst. Zieht man dann AX und macht $\sphericalangle XAY = PAN$, so ist AXY das verlangte Dreieck. Denn es ist $\sphericalangle N'AX = NAY$, ferner $AN' : AN = m : n$, desgleichen $N'X : NY = m : n$, folglich $\triangle N'AX \sim NAY$, also $AX : AY = AN' : AN = m : n$. Da aber $\sphericalangle XAY$ dem gegebenen gleich ist, so entspricht das Dreieck AXY den gestellten Bedingungen.

§ 18. Durch die vorhergehenden Aufgaben zeigt sich, daß die Methode der Parallelverschiebung zum Zwecke einer Reduktion mit besonderem Vorteil bei Vierecksaufgaben angewandt werden kann. Es wird daher zweckmäßig sein, eine allgemeine, in sehr vielen Fällen nutzbringende Verschiebung beim (ordinären) Vierecke noch besonders in Kürze hervorzuheben. Man verschiebt zwei Seiten bis in die gegenüber liegende Ecke und die zu dieser Ecke gehörende Diagonale bis in die Nachbarecken. Dadurch erhält man ein Parallelogramm, in welchem viele Stücke des Vierecks in einfacherer und unmittelbarerer Verbindung mit einander vorkommen. So sind die Seiten des entstehenden Parallelogramms die Diagonalen des ursprünglichen Vierecks, die von obiger Ecke des Vierecks zu den Ecken des Parallelogramms laufenden Linien sind die Seiten des Vierecks. Die Diagonalen des Parallelogramms sind doppelt so groß wie die die Mitten der gegenüber liegenden Seiten des Vierecks verbindenden Geraden. Auch Winkel des Vierecks kommen in dem Parallelogramm vor; z. B. sind die Winkel des Parallelogramms die Winkel zwischen den Diagonalen des Vierecks. Selbst der Inhalt des Parallelogramms steht in einfachster Beziehung zum Inhalt des Vierecks, indem es doppelt so groß ist.

§ 19. Eine für die Reduktion häufig mit Vorteil anzuwendende Methode ist ferner die sogenannte **Ähnlichkeits-Methode**. Sie findet in den Fällen Anwendung, in welchen man zwar nicht auf einen vollständig konstruierbaren Teil der gesuchten Figur reduzieren, wohl aber aus den Bedingungen der Aufgabe eine Figur ableiten kann, welcher der gesuchten Figur oder einem Teile derselben ähnlich ist. Ganz besonders empfiehlt sich diese Methode, wenn zur Konstruktion einer Figur außer einer Länge nur Winkel oder Verhältnisse von Längen gegeben sind. Durch letztere erhält man bei einer beliebig gewählten Länge eine Figur, welche der gesuchten ähnlich ist und aus welcher durch die Einführung der gegebenen Länge meist mittels Parallelen in einfachster Weise die gesuchte Figur abgeleitet werden kann. Wäre beispielsweise die Konstruktion eines Dreiecks verlangt aus zwei Winkeln und irgend einer daran vorkommenden Länge (Seite, Höhe, Mittellinie, einem Winkelhalbierer, einem zugehörigen Radius u. s. w.), so zeichne man vorerst ein beliebiges Dreieck, welches die gegebenen Winkel enthält. Dies beliebige Dreieck ist dem gesuchten ähnlich. Zieht man dann in demselben die der gegebenen entsprechende Linie und macht sie dieser gleich, so läßt sich in einfachster Weise meist durch Parallelen (nur wenn der Radius des umgeschriebenen Kreises die gegebene Länge ist, ist die Ableitung etwas anders) das gesuchte Dreieck ableiten. Außer diesem zur allgemeinen Charakteristik angeführten Beispiele mögen zur näheren Darlegung der Methode noch einige Beispiele folgen.

Aufgabe 100. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem gegenüber liegenden Winkel und dem Verhältnis der beiden andern Seiten. (Aus a, A und $b:c$.)

Analysis. Sieht man zunächst von der gegebenen Länge a ab und konstruiert ein Dreieck $A'B'C'$, worin $\sphericalangle A' = A$ und $A'C' : A'B' = b : c$ ist, so ist $\triangle A'B'C'$ dem gesuchten ABC ähnlich. Man hat nur in dies Dreieck die gegebene Länge entsprechend einzuführen, indem man etwa $B'C = a$ macht, und durch C die Parallele CA bis in $B'A'$ zu ziehen. Dann ist $\triangle AB'C$ das verlangte.

Aufgabe 101. Zwischen zwei Radien eine Tangente so an den Kreis zu legen, daß sie im Berührungspunkte nach einem gegebenen Verhältnis ($m:n$) geteilt wird.

Analysis. Sind MA und MB die Radien und wird die Tangente CD im Berührungspunkte X so geteilt, daß $CX : DX = m : n$ ist, so wird jede zu CD parallel gezogene, von denselben Radien begrenzte Gerade $C'D'$ in ihrem Durchschnittspunkte X' mit MX nach demselben Verhältnis geteilt. Eine solche Gerade

$C'D'$ läßt sich aber konstruieren, wenn man das beliebige Stück MD' abschneidet und X' durch zwei Örter bestimmt. Der eine ist der Halbkreis über MD', da $\sphericalangle MX'D' = 1\,R$ sein muß, der andere die Parallele zu MA aus einem Punkte E in der beliebigen MD', welche diese nach dem gegebenen Verhältnisse $m:n$ teilt. MX' giebt dann den Berührungspunkt X und die durch X zu $C'D'$ gezogene Parallele die verlangte Tangente.

Aufgabe 102. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der zugehörigen Höhe und dem Verhältnis der durch die Höhe auf der Gegenseite gebildeten Abschnitte. (Aus A, h_a und $p:q$.)

Analysis. Betrachtet man h_a als den Radius und $\sphericalangle A$ als den Centriwinkel eines Kreises, so ist diese Aufgabe von der vorigen nicht verschieden. Etwas anders gestaltet sich folgende Analysis. Eine beliebige Parallele zu BC, etwa $B'C'$, wird von der Höhe AD nach demselben Verhältnis geteilt. Man kann also zwei Linien $B'D'$ und $D'C'$, welche das gegebene Verhältnis haben, aneinander legen und, nachdem man das Lot in D' zu $B'C'$ errichtet hat, mittels O. 15 den Punkt A bestimmen. Dann mache man AD gleich der gegebenen Höhe u. s. w.

Aufgabe 103. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der zugehörigen Höhe und Mittellinie. (Aus A, h_a und m_a.)

Analysis. Ist D der Fußpunkt der Höhe h_a, E die Mitte von BC, so ist durch den Winkel A und den durch das konstruierbare Dreieck AED gegebenen Winkel AED (zwischen der Mittellinie und der zugehörigen Seite) ein Dreieck gegeben, welches dem gesuchten ähnlich ist.

Aufgabe 104. Von einem Punkte einer Kreisperipherie aus eine Sehne zu ziehen, welche eine andere so schneidet, daß die Entfernungen ihres anderen Endpunktes vom Durchschnittspunkte und dem einen Endpunkte der gegebenen Sehne ein gegebenes Verhältnis haben.

Analysis. Ist von A aus die Sehne AD so durch die gegebene Sehne BC, welche in E geschnitten wird, gezogen, daß $DE:DC = m:n$ ist, so ist durch den Bogen AC der Winkel EDC und durch Hinzunahme des gegebenen Verhältnisses $DE:DC$

das Dreieck DEC seiner Form nach konstruierbar. Konstruiert man nun ein solches in der richtigen Lage, so erhält man Punkt D in einfachster Weise.

Aufgabe 105. Zwischen zwei Dreiecksseiten eine Parallele zur dritten zu legen, so daß dieselbe die mittlere Proportionale werde zwischen den Abschnitten einer der beiden Seiten.

Analysis. Ist $DE \parallel BC$, dann ist $AD : AB = DE : BC$ oder $AD^2 : AB^2 = DE^2 : BC^2$. Ist nun $DE^2 = AD \,.\, DB$, so folgt $AD : DB = AB^2 : BC^2$, was sich konstruieren läßt. (S. Nachtrag 10.)

Aufgabe 106. In ein Dreieck ABC eine Gerade XY zwischen AC und BC so zu legen, daß $BX = XY = YC$ wird.

Analysis. Verbindet man B mit Y und zieht durch den beliebigen Punkt D dieser Verbindungslinie die Parallelen DE und DF zu XY und YC, so läßt sich das Viereck $BEDF$ konstruieren, da $\sphericalangle B$ gegeben ist und $BE = ED = DF$ ist. Die Diagonale BD bestimmt dann den Punkt Y, durch welchen $YX \parallel ED$ zu legen ist.

Aufgabe 107 und 108. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel und den Summen, welche jede der einzelnen Seiten mit der dritten macht; speziell ein rechtwinkliges Dreieck aus der Summe der Hypotenuse und jeder Kathete. (Allgemein aus A, $a + b$, $a + c$.)

Analysis. Stellt man die gegebenen Summen unter Beibehaltung des gegebenen Winkels dar (vergl. Anm. zu Analysis von A. 49 und 50), so erkennt man die Identität dieser beiden Aufgaben mit der vorhergehenden.

Aufgabe 109. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Radius des umgeschriebenen Kreises und dem Verhältnis der drei Seiten zu einander. (Aus r und $a : b : c$.)

Analysis. Durch das gegebene Verhältnis der drei Seiten ist ein Dreieck $A'B'C'$ gegeben, welches dem gesuchten ABC ähnlich ist. Konstruiert man dies und beschreibt darum einen Kreis, dessen Mittelpunkt O sei, so hat man nur die Radien OA', OB' und OC' bezüglich bis A, B und C zu nehmen, so daß

$OA = OB = OC = r$ ist, um das gesuchte Dreieck ABC zu erhalten.

Aufgabe 110. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Verhältnis einer zweiten Seite zum Radius des umgeschriebenen Kreises und dem Gegenwinkel der dritten Seite. (Aus a, $b : r$ und C.)

Analysis. Ein dem Dreiecke MDA, in welchem M der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises und D die Mitte von B ist, ähnliches Dreieck, welches konstruiert werden kann, giebt den $\sphericalangle DMA = B$. Dadurch sind aber alle Winkel des Dreiecks bekannt.

Aufgabe 111. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Radius des umgeschriebenen Kreises und dem Verhältnis einer andern Seite zu ihrer Höhe. (Aus a, r und $b : h_b$.)

Analysis. Errichtet man in A und C Lote auf b und a, welche sich in F schneiden, so ist $\triangle CAF \sim BCD$, wobei BD die Höhe h_b ist. CF läßt sich aber durch eine Proportion aus der Ähnlichkeit dieser Dreiecke bestimmen, und, nachdem F bestimmt, lassen sich für Punkt A zwei Örter angeben und zwar nach O. 6 und O. 1 durch den gegebenen Radius.

Aufgabe 112. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und den Verhältnissen jeder der beiden anderen Seiten zu ihrer Höhe. (Aus a, $b : h_b$ und $c : h_c$.)

Analysis. Außer dem Punkte F (in voriger Analysis) bestimmt man in ähnlicher Weise in dem Lote in B auf BC den Punkt E und hat dann für A zwei Örter, beide nach O. 6.

Aufgabe 113. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem Verhältnis der dritten Seite zu ihrer Höhe. (Aus a, b und $c : h_c$.)

Analysis wie bei den vorhergehenden Aufgaben.

Aufgabe 114. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem Verhältnis der dritten Seite zu einer der Höhen, welche zu einer der gegebenen Seiten gehört. (Aus a, c, $b : h_a$.)

Analysis. Durch die Proportion $b : h_a = a : h_b$ läßt sich die Höhe h_b bestimmen.

Aufgabe 115. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren aus dem Verhältnis der Quadrate der Katheten und der Höhe auf die Hypotenuse. (Aus $b^2 : c^2$ und h_a.)

Analysis. Da das Verhältnis $b^2 : c^2 = p : q$ ist, so läßt sich ein Dreieck $A'C'B'$, ähnlich dem gesuchten, in einfacher Weise konstruieren.

Aufgabe 116. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der zugehörigen Mittellinie und dem Verhältnis einer der beiden andern Seiten zu ihrer Höhe. (Aus a, m_a und $b : h_b$.)

Analysis wie bei A. 109. Ein zweiter Ort für A ergiebt sich nach O. 1 durch m_a.

Aufgabe 117. Ein Dreieck zu konstruieren aus seinem Umfange, dem Verhältnis zweier Höhen und dem Verhältnis der dritten Seite zum Radius des umgeschriebenen Kreises. (Aus $a + b + c$, $h_a : h_b$ und $c : r$.)

Analysis. Durch $c : r$ ist der Winkel C gegeben und durch $h_a : h_b$ das Verhältnis $b : a$. Es ist daher ein Dreieck $CEF \sim ABC$ gegeben. Stellt man an diesem Dreiecke den Umfang dar, indem man EF über E und F bis G und H um EC und FC verlängert, so hat man nur GH bis J zu verlängern, so daß $GJ = a + b + c$ wird und durch eine Parallelle JK zu CG bis in CH den Punkt K zu bestimmen, durch welchen eine Parallele KL zu GH ein Dreieck LKC giebt, aus welchem ABC in einfachster Weise abzuleiten ist.

Aufgabe 118. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und dem Verhältnis einer andern Seite zu ihrer Höhe. (Aus a, h_a und $b : h_b$.)

Analysis wie A. 114.

Aufgabe 119. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Flächeninhalt und dem Verhältnis einer andern Seite zu ihrer Höhe. (Aus a, F, $b : h_b$.)

Analysis. Aus F und a bestimmt sich h_a; dadurch ist diese Aufgabe auf die vorhergehende reduziert.

Aufgabe 120. Ein Viereck zu konstruieren aus einer Seite, dem Verhältnis zweier andern Seiten und den Winkeln. (Aus a, $b : c$, A, B, C.)

Analysis führt leicht auf ein konstruierbares ähnliches Viereck, woraus das gesuchte durch Einführung der gegebenen Seite leicht abgeleitet werden kann.

Aufgabe 121. Ein Sehnenviereck zu konstruieren, wovon gegeben sind eine Seite, das Verhältnis zweier Nachbarseiten und die Winkel. (Aus a, $b:c$ und A und B.)

Analysis. Durch den Winkel C und das Verhältnis $b:c$ ist zunächst ein Dreieck $CB'D'$ gegeben, welches man durch die bekannten Winkel D und B zu einem Sehnenviereck $CB'A'D'$ vervollständigen kann, welches dem gesuchten ähnlich ist. Legt man nun zwischen CB' und CA' die Gerade $BA = a$ und parallel zu $B'A'$, so vollendet die Parallele AD zu $A'D'$ das gesuchte Sehnenviereck $ABCD$.

Aufgabe 122. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Verhältnis zweier Seiten und den zugehörigen Mittellinien. (Aus $a:b$, m_a und m_b.)

Analysis. Zieht man $CF \parallel m_b$ bis in m_a, so ist $AF = \frac{4}{3} m_a$, $CF = \frac{2}{3} m_b$, und $CD:AC = \frac{1}{2} a : b$. Man hat also leicht für C zwei Örter, einen durch das bekannte FC nach O. 1, den andern durch das bekannte Verhältnis $CD:AC$ nach O. 22.

Aufgabe 123. Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und dem Verhältnis der zugehörigen Mittellinien. (Aus a, b und $m_a : m_b$.)

Analysis. Zieht man $AF \parallel m_b$ bis in a, so ist $CF = 2a$, $DF = 1\frac{1}{2} a$ und $DA:FA = m_a : 2m_b$. Unter Hinzunahme von $CA = b$ ergeben sich für A zwei Örter und zwar nach O. 1 und O. 22.

Aufgabe 124. Ein Paralleltrapez zu konstruieren aus den Diagonalen desselben und den Winkeln an einer Grundlinie.

Analysis. Schneiden die verlängerten Seiten AD und BC einander in F, so ist durch die Winkel A und B die Form des Dreiecks ABF gegeben. Berücksichtigt man ferner, daß die Verbindungslinie von F mit dem Durchschnittspunkte E der Diagonalen jede der parallelen Seiten halbiert, und daß sich $AE:BE$ verhält wie die Diagonalen, so läßt sich auch leicht ein Dreieck $A'B'E'$ konstruieren, welches dem Dreiecke ABE ähnlich ist. Daraus aber ist das gesuchte Trapez einfach abzuleiten.

Zusatz. Daß jede Parallele zu AB von FE halbiert wird, zeigt sich am einfachsten, wenn man, was leicht geschehen kann, beweist, daß die Parallele durch E in der That von jener Linie halbiert wird.

Aufgabe 125. In ein Dreieck ABC ein Dreieck DEF so zu beschreiben, daß der Scheitel des gegebenen Winkels F in einen gegebenen Punkt fällt und DE einer gegebenen Geraden parallel wird.

Analysis. Ist DEF das verlangte Dreieck, von welchem der Punkt F auf AB gegeben und DE der Geraden L parallel ist, so ziehe man durch eine Ecke der AB, etwa A, die AH parallel zu L bis in die Gegenseite BC und durch A und H Parallelen zu EF und DF, welche sich in G schneiden. Dieser Punkt G auf der Geraden CF läßt sich durch den Winkel $AGH = F$ bestimmen und dann durch die Parallelen FE und FD zu AG und HG die Punkte E und F.

Zusatz. Soll das Dreieck mit einer Ecke in einem gegebenen Punkte liegen, während die beiden andern auf zwei Geraden liegen, so ziehe man, wenn die beiden Geraden einander schneiden, durch den Punkt eine beliebige, dieselben schneidende Gerade, im andern Falle eine dritte Parallele, wodurch eine Reduktion auf A. 125 erhalten wird.

II. Die Konstruktion und der Beweis.

§ 20. Der zweite Teil einer streng wissenschaftlichen Lösung einer Konstruktionsaufgabe, die Konstruktion, hat die durch die Analysis als konstruierbar festgesetzten Punkte, Geraden oder Kreise wirklich durch eine Zeichnung darzustellen. Je nachdem die Analysis blos durch geometrische Örter oder durch Reduktion aufgestellt ist, sind im erstern Falle die in der Analysis gefundenen Örter wirklich zu zeichnen und die erforderlichen Punkte dadurch festzustellen; im andern Falle ist die Zeichnung etwa gefundener Hilfsfiguren wirklich auszuführen und daran die Feststellung der erforderlichen Punkte noch mit Hilfe von geometrischen Örtern wirklich zu bewirken. Der Weg der Konstruktion muß offenbar der umgekehrte der Analysis sein, indem diese von den zu bestimmenden

Punkten und Linien ausgehend zu einem aus den Bedingungen der Aufgabe konstruierbaren Punkte oder Linie zu gelangen sucht, jene, ausgehend von der Konstruktion des zuletzt in der Analysis als konstruierbar gefundenen Punktes (oder Linie), in umgekehrter Ordnung die gesuchten Punkte bestimmen muß.

Im dann folgenden dritten Teile, dem Beweise, ist der Nachweis zu liefern, daß durch die Konstruktion eine Figur erhalten ist, welche die in der Aufgabe gestellten Bedingungen erfüllt, daß also erhaltene Linien und Winkel die vorgeschriebene Größe haben. Der Beweis schließt sich unmittelbar an die Konstruktion an, und macht darum alle Schlüsse in umgekehrter Folge, wie in der Analysis.

Um die Teile einer Lösung nicht noch mehr auseinander zu reißen, als es durch die Trennung der Analysis schon notwendig wurde und durch die im folgenden Kapitel getrennte Behandlung des vierten Teiles (der Determination) noch ferner notwendig wird, sollen im folgenden Konstruktion und Beweis einer Reihe der vorhergehenden Analysen nacheinander und verbunden angeschlossen werden. Wir werden dabei diejenigen Analysen unberücksichtigt lassen, bei denen sich die Konstruktion und der Beweis so zu sagen ganz unmittelbar ergeben, und etwa vorkommende Elementarkonstruktionen als bekannt voraussetzen.

Zu Aufgabe 25.

Konstruktion. An einem Endpunkt der hingelegten Seite $BC = a$, etwa in B, lege man den Winkel $CBE = A$, errichte in B auf BE ein Lot, desgleichen ein Lot zu BC in deren Mitte F. Um den Durchschnitt M dieser beiden Lote beschreibe man mit MB als Radius einen Kreis, so ist dieser der eine Ort für A. Dann verbinde man M und C, beschreibe über MC als Diameter einen Kreis und um B einen Kreis mit m_b als Radius. Der Durchschnitt D beider Kreise ist die Mitte der Seite CA. Die Verbindungslinie CD schneidet verlängert den ersten Ort in A, und $\triangle ABC$ ist das verlangte.

Beweis. BE ist Tangente und BC Sehne des Kreises um M; es ist also, da $\sphericalangle CBE$ gleich $\sphericalangle A$ gemacht ist, jeder Peripheriewinkel an diesem Bogen, dessen Schenkel durch B und C gehen, diesem Winkel gleich. BC ist gleich a gemacht und CA

in D halbiert, da $MD \perp CA$ ist; es ist also BD Mittellinie und gemäß der Konstruktion gleich m_b.

Zu Aufgabe 70.

Konstruktion. Nachdem das rechtwinklige Dreieck BFH, worin die Hypotenuse $FB = m_b$ und die Kathete $FH = \frac{1}{2} h_a$ ist, konstruiert worden, bestimme man in FB den Punkt S so, daß $FS = \frac{1}{3} m_b$. Dann ziehe man durch F zu BH eine Parallele und beschreibe um S mit einem Radius $= \frac{1}{3} m_c$ einen Kreis, der die Parallele in G durchschneidet, ziehe GS und verlängere diese Linie bis in C (in BH), und ziehe endlich CF und BG bis zum Durchschnitt A. Dann ist $\triangle ABC$ das verlangte Dreieck.

Beweis. Weil $GF \parallel BH$ gezogen, ist $GS : SC = FS : SB$, also, da $GS = \frac{1}{3} m_c$, $GC = m_c$. Weil ferner $FG : BC = FS : SB$, so ist $FG = \frac{1}{2} BC$, woraus folgt, daß G und F die Mitten von AB und AC, also $BF = m_b$ und $CG = m_c$ wirklich Mittellinien sind; endlich ist $AD = 2FH = h_a$.

Zu Aufgabe 74.

Konstruktion. Nachdem man gemäß der Analysis das Verhältnis $EF' : AB' = m : n$ gefunden und daraus unter Berücksichtigung, daß $B'E = AF'$ werden soll, das Verhältnis $EB' : B'A = p : q$ festgestellt hat, ziehe man den beliebigen Radius CA, teile diesen in G nach dem gefundenen Verhältnis $p : q$ und bestimme die Länge von GB' durch die Proportion $GB' : CE = q : p + q$. Mit dem gefundenen GB' beschreibe man um G einen Kreis, welcher den Punkt B' bestimmt, wodurch man die gesuchte Gerade erhält. Den Durchschnitt B verbinde man mit C, ziehe durch C zur konstruierten Geraden eine Parallele, auf welcher man endlich mittels einer Parallele durch A zu CE den Punkt D bestimmt. Dann ist $ABCD$ das verlangte Paralleltrapez.

Beweis. Die Seiten AD und CB, sowie die Diagonale CB kommen in dem Viereck, welches, da $CD \parallel AB$ gezogen, ein Paralleltrapez ist, vor, und zwar CB und CA unmittelbar als Radien zweier konzentrischer Kreise, AD als Seite eines Parallelogramms, in welchem die Gegenseite CE gleich der gegebenen Seite genommen ist. Es bleibt bloß zu beweisen übrig, daß die Diagonale $DB = CF$ ist; denn CF ist als die gegebene Länge der Diagonale zum Radius genommen. Nun ist aber gemäß der

Konstruktion $AE = BF = CD$, also auch $DB = CF$, weil auch $CD \parallel AE$ ist.

Zu Aufgabe 76.

Konstruktion. Man konstruiere die Dreiecke EFG und EFH, deren Seiten man kennt, ziehe durch G und F Parallelen zu FH und GH, welche sich in C schneiden. Die Parallele durch H zu FG bestimmt die Ecke A und die Parallelen durch A und C zu EH und GH den Punkt D. CG und AH bestimmen endlich den Punkt B und $ABCD$ ist das verlangte Viereck.

Beweis. Durch F, G und H sind die Parallelen AC zu HG, AB zu FG und BC zu FH gezogen, also sind $FGBH$, $FGHA$ und $FHGC$ Parallelogramme. Also ist $FG = HB = AH$; folglich $AB = 2FG$. In gleicher Weise ergiebt sich, daß $BC = 2FH$, und F die Mitte von AC. Weil ferner $CD \parallel EG$ und $AD \parallel EH$, so folgt, daß $DC = 2EG$ und $AD = 2 . EH$ und außerdem E die Mitte von BD ist. Nun ist EF gemäß der Konstruktion die gegebene Entfernung der Mitten der Diagonalen und die Seiten FG, FH, EG und EH der Reihe nach die halben gegebenen Seiten, weshalb das Viereck die gegebenen Stücke enthält.

Zu Aufgabe 77.

Konstruktion. Man konstruiere das Dreieck EGH, worin EG und EH zweien Gegenseiten des Vierecks gleich sind. Dann nimmt man F als Mitte von HB und beschreibt das Dreieck FBH, worin FB und HB bezüglich die Hälften der gegebenen Seiten AB und CD sind. Dann bestimmt man durch Parallelen durch E zu HB und durch B zu EH den Punkt C, und endlich durch Verlängerung von CE und BF über E und F um sich selbst die Punkte D und A. $ABCD$ ist alsdann das verlangte Viereck.

Beweis. Nach der Konstruktion ist EF gleich der gegebenen Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten, die Punkte E und F aber wirklich die Mitten von CD und AB. Ferner ist $EHBC$ ein Parallelogramm, also $EH = BC$, $HB = EC = \frac{1}{2} CD$. Ferner ist $AGED$ ein Parallelogramm, also $AD = EG$. Da nun die Seiten FB und HB gleich den Hälften der entsprechenden gegebenen Seiten genommen worden sind, so ergiebt sich, daß das Viereck die gegebenen Stücke wirklich enthält.

Zu Aufgabe 81.

Konstruktion. Durch den Mittelpunkt B ziehe man eine Gerade BL parallel zu der gegebenen Richtung, fälle darauf von dem Mittelpunkte A des anderen Kreises das Lot AC und nehme auf der Geraden CB' gleich der halben gegebenen Summe. Dann beschreibt man von B' mit dem Radius des gegebenen Kreises B einen Kreis, der den Kreis A in X durchschneidet. Der Kreis B' ist die durch Verschiebung erhaltene neue Lage des Kreises B. Endlich zieht man durch X ein Lot auf AC, so ist diese Gerade die gesuchte.

Beweis. Es ist $CB' = \frac{1}{2}s$, also die Summe der Sehnen in den Kreisen A und B' gleich s. Da nun der Punkt B die gleiche Entfernung von der zu AC senkrecht durch X gezogenen Geraden hat, wie B', so bleibt auch in dieser Lage die Sehne von derselben Größe und die Summe beider Sehnen gleich s d. i. gleich der gegebenen Summe.

Zu Aufgabe 82.

Konstruktion. Über der Centrale MN beschreibe man einen Halbkreis, dann von P an den Kreis M eine Tangente. Aus dieser Tangente und dem Radius des Kreises N als Katheten konstruiere man ein rechtwinkliges Dreieck und mit dessen Hypotenuse um P als Mittelpunkt einen Kreis, welcher den Halbkreis über MN in X durchschneidet. Dann beschreibe man um X mit dem Radius des Kreises N einen Kreis, welcher den Kreis M in A und B schneidet. Dann ist PAB die Richtung der gesuchten Geraden.

Beweis. Weil die Tangenten von P an die Kreise um M und X gemäß der Konstruktion einander gleich sind, so ist PAB eine Gerade, also AB die gemeinsame Sehne. Durch Verschieben des Kreismittelpunktes X nach N bleibt aber die Sehne ungeändert da $XN \perp XM$ ist, also Sehne $AB = CD$.

Zu Aufgabe 85.

Konstruktion. Man konstruiere $\triangle EDC$, worin ED und DC den gegebenen Gegenseiten und $\sphericalangle EDC = A + D - 2R$ ist. Dann bestimme man durch $\sphericalangle D$ und $\sphericalangle C$ je einen Ort für A und B, die Parallele durch E zu DA bestimmt dann B, und $BA \parallel ED$ giebt A. Dann ist $ABCD$ das verlangte Viereck.

Beweis. Die beiden gegebenen Gegenseiten sind in dem Viereck

enthalten, da $AB = DE$ ist. Ferner sind in D und C die entsprechenden gegebenen Winkel angelegt. Nun ist
$\sphericalangle EDC = A + D - 2R = D - (2R - A) = D - ADE$,
also $\sphericalangle A$ ein gegebener Winkel, folglich auch der vierte Winkel B der gegebene.

Zu Aufgabe 87.

Konstruktion. Um den beliebigen Punkt D beschreibe man drei konzentrische Kreise, wovon der innerste und äußerste als Radien die gegebenen nicht parallelen Seiten haben mögen, der mittlere als Radius die im Viereck von D ausgehende Diagonale. Bezeichnet man die parallelen Seiten BC und DA durch b und d, so ist, wenn man $EF \parallel BD$ zieht, $DF : FC = d : b - d$, ebenso $EF : BD = CF : CD = b - d : b$. Durch diese Proportion läßt sich in dem beliebigen Radius DC der Punkt F bestimmen und auch die Länge von EF, da aus dem gegebenen Verhältnis $b : d$ leicht das hier nötige Verhältnis $d : b - d$ oder $b : b - d$ abgeleitet werden kann. Durch das gefundene EF bestimmt man den Punkt E in der Peripherie des innersten Kreises mittels eines Kreisbogens um F und erhält dann das Trapez in einfachster Weise als das verlangte.

Beweis. Da B, E und C auf der Peripherie der konzentrischen Kreise liegen, so sind die gegebenen Seiten und die eine Diagonale von selbst in dem Trapeze enthalten. Es ist ferner
$BE : EC = DF : FC = d : b - d$ und $EF : BD = d - b : b$,
woraus sich ergiebt, daß $BE : BC = d : b$. Da nun $BE = AD$, so haben auch die parallelen Seiten das gegebene Verhältnis.

Zu Aufgabe 89.

Konstruktion. Man konstruiere Dreieck AHG, worin AH und AG die halben Diagonalen und HG ($= EF$) die gegebene Verbindungslinie der Mitten der nicht parallelen Seiten ist. Schneidet nämlich die Verbindungslinie EF die Diagonale BD in J, so ist nach einem bekannten Lehrsatze der Planimetrie $EJ = HF$, und da $JF = FG$ ist, auch $EF = HG$. Dann verlängere man AH über H um sich selbst bis C und bestimme durch einen Kreisbogen über AC mit Rücksicht auf den gegebenen Winkel B und durch eine Parallele durch A zu HG den Punkt B; verlängere AG über G um sich selbst bis K und mache $KD = AB$, dann ist $ABCD$ das verlangte Trapez.

Beweis. $AC = 2\,AH$, $AD = 2\,AF$, also EF die gegebene Mittellinie. Ebenso sind H und J die Mitten von AC und BD, daher haben auch die Diagonalen die gegebenen Längen. Endlich ist $\sphericalangle B$ gleich dem gegebenen und $AB \parallel CD$, also das Viereck ein Paralleltrapez.

Zu Aufgabe 100.

Konstruktion. Man konstruiere Dreieck $A'B'C'$, worin $\sphericalangle A'$ der gegebene Winkel und $A'C' : A'B' = b : c$ ist. Dann mache man $B'C = a$ und ziehe durch C die Parallele CA zu $C'A'$, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. $\triangle ABC \sim A'B'C'$, also $AC : AB = A'C' : A'B' = b : c$, $BC = a$ und $\sphericalangle A = A'$.

Zu Aufgabe 101.

Konstruktion. Über dem beliebigen Stück MD' des Radius MB beschreibe man einen Halbkreis, teile MD' in E so, daß $ME : ED' = m : n$ (d. h. das gegebene Verhältnis) ist, ziehe durch E eine Parallele zu MA, welche den Halbkreis in X' schneidet; verlängere MX' bis in die Peripherie des Kreises, bis X, und lege in diesem Punkte die Tangente CXD an den Kreis, welche die verlangte sein wird.

Beweis. Es ist $CX : XD = C'X' : X'D' = ME : ED' = m : n$.

Zu Aufgabe 105.

Konstruktion. In B erreichte man auf BA das Lot $BF = BC$, ziehe von B das Lot BG auf AF, und durch G die Parallele GD (bis in AB) zu BF. Die durch D zu BC gezogene Parallele DE ist die gesuchte.

Beweis. Es ist $AD : DE = AB : BC$

oder $AD^2 : DE^2 = AB^2 : BC^2 = AG : GF = AD : DB$,

also $AD^2 : DE^2 = AD : DB$, woraus folgt $DE^2 = AD \,.\, DB$.

Zu Aufgaben 107 und 108.

Konstruktion. Man konstruiere $\triangle ADE$ aus $AD = a + c$, $AE = a + b$ und dem gegebenen Winkel A. Dann schneide man von DA und EA die beliebigen, aber gleichen Stücke $DF = EG$ ab, beschreibe um F mit FD einen Kreis und verschiebe EG parallel mit sich bis in die Lage HJ, in welcher H in der Peripherie des um F beschriebenen Kreises liegt; verlängere dann die Diagonale

DH, bis sie AE in C schneidet, und ziehe $CB \parallel FH$; dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. $DF = FH = HJ$, also auch, da $BC \parallel FH$ und $HJ \parallel AE$ ist, $DB = BC = CE$. Da nun $AD = a + c$, $AE = b + c$ gemacht ist, ist $AB = c$, $AC = b$.

Zu Aufgabe 109.

Konstruktion. Man konstruiere das beliebige Dreieck $A'B'C'$, in welchem die Seiten das gegebene Verhältnis haben, beschreibe darum einen Kreis, dessen Mittelpunkt M sei, und mache MA' MB' und MC' durch Verlängerung, resp. Verkürzung gleich dem gegebenen Radius. Hierdurch erhält man die neuen Ecken A, B, C und dadurch das verlangte Dreieck ABC.

Beweis. Weil $MA = MB = r$ ist, so ist $MA' : MB' = MA : MB$, also $AB \parallel A'B'$. Ebenso zeigt man, daß $BC \parallel B'C'$ und $AC \parallel A'C'$ ist. Die Seiten AB, BC und CA haben also dasselbe Verhältnis wie $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ d. h. das gegebene, Ferner ist $MA = MB = MC$ gleich dem gegebenen Radius r gemacht.

Zu Aufgabe 111.

Konstruktion. Aus der Proportion $a : CF = h_b : b$ konstruiere man zunächst CF; dann errichte man auf a in C ein Lot gleich CF und beschreibe über CF als Diameter einen Halbkreis; bestimme dann mittels des gegebenen Radius den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises. Der Durchschnitt desselben mit dem Halbkreise ist A und das Dreieck ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. $MA = MB = MC = r$. Weil ferner $\sphericalangle FAC = 1R$ ist (Winkel im Halbkreis), so ist $\triangle CAF \sim CBD$, woraus sich durch eine Proportion in Rücksicht auf die Konstruktion, wodurch CF erhalten wurde, ergiebt, daß $b : h_b$ das gegebene Verhältnis ist. Endlich ist $CB = a$ gemacht.

Zu Aufgabe 113.

Konstruktion. In A und B auf b und c errichtete Lote schneiden einander in E. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABE und ACD läßt sich die Länge von AE konstruieren; dann konstruiere man $\triangle CAE$, worin $CA = b$ und $\sphericalangle CAE$ ein rechter Winkel ist. Dann beschreibe man über AE als Diameter einen

Halbkreis und um C einen Kreis mit a. Der Durchschnitt beider ist die Ecke B und ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke ABE und ACD ergiebt sich, daß $c : h_c$ das gegebene Verhältnis ist, wenn man die Konstruktion von AE berücksichtigt. Es ist aber auch $AC = b$, und $CB = a$.

Zu Aufgabe 115.

Konstruktion. Über einer beliebigen Geraden $B'C'$, die in D' nach dem gegebenen Verhältnisse $p : q$ geteilt wird, beschreibe man einen Halbkreis und errichte in D' auf $B'C'$ das Lot, welches den Halbkreis in A schneidet. Macht man nun auf AD' das Stück AD gleich der gegebenen Höhe und zieht durch D eine Parallele zu $B'C'$, welche die Katheten AB' und AC' in B und C schneidet, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. $\sphericalangle A = 1R$. $AD = h_a$. Ferner $B'D' : D'C' = p : q$, folglich auch $BD : CD = p : q = AB^2 : AC^2$.

Zu Aufgabe 120.

Konstruktion. Zwei beliebige Linien $D'C'$ und $B'C'$, welche das gegebene Verhältnis haben, setze man unter dem gegebenen Winkel aneinander, und lege in D' und B' an $D'C'$ und $B'C'$ die gegebenen Winkel an. Dadurch erhält man ein Viereck $B'C'D'A$, welches dem gesuchten ähnlich ist. Macht man nun auf AB' das Stück AB gleich der gegebenen Seite und zieht durch B eine Parallele zu $B'C'$, welche die Diagonale AC' in C schneidet, und durch C eine Parallele $C'D'$ bis in den Durchschnitt D mit der (verlängerten) Seite AD', so ist $ABCD$ das verlangte Viereck.

Beweis. Gemäß der Konstruktion hat AB die gegebene Länge a, $B'C'$ und $D'C'$ haben in gleicher Weise das gegebene Verhältnis, also auch die Parallelen BC und CD. Endlich sind auch die Winkel des Vierecks die gegebenen.

Zu Aufgabe 121.

Konstruktion und Beweis ganz ähnlich wie zu A. 111.

Zu Aufgabe 122.

Konstruktion. Man mache $AF = \frac{3}{4} m_a$; FD auf $FA = \frac{1}{3} m_a$, teile AD innerlich und äußerlich in E und G nach dem Verhältnis $\frac{1}{2} a : b$; beschreibe über EG als Diameter einen Kreis und um F einen Kreis mit einem Radius gleich $\frac{2}{3} m_b$. Der Durchschnitt dieser beiden Kreise ist die Ecke C. Dann verbinde man C mit D und verlängere CD bis B, so daß $DB = CD$ wird, und verbinde B mit C. Dann ist Dreieck ABC das verlangte.

Beweis. Wegen des Kreises über EG ist $CD : AC = \frac{1}{2}a : b$, also $CB : CA = a : b$. Ferner ist $AF = \frac{2}{3}m_a$, $DF = \frac{1}{3}m_a$, also $AD = m_a$ und gemäß der Konstruktion D die Mitte von CB. Macht man nun auf DA das Stück $DH = DF$, so ist BHJ Mittellinie zu b. Da nun $BH = CF = \frac{2}{3}m_b$ ist, so ist $BJ = m_b$.

Zu Aufgabe 123.

Konstruktion. Auf $CF = 2a$ mache man $CD = \frac{1}{2}a$, teile DF innerlich und äußerlich (in G und H) nach dem Verhältnis $m_a : 2m_b$ und beschreibe über GH als Durchmesser einen Kreis. Ein zweiter Kreis um C mit einem Radius gleich b schneide den erstern in A. Nehmen wir dann die Mitte E von AC und ziehen dadurch die Parallele EB zu AF, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Es ist $AD : AF = m_a : 2m_b$, E die Mitte von AC, also auch B die Mitte von CF, also $CB = a$; ferner $CA = b$; $EB = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}.\ 2m_b = m_b$; also $m_a : m_b$ das gegebene Verhältnis.

Zu Aufgabe 124.

Konstruktion. Man konstruiere das beliebige Dreieck $A'B'F'$, worin die Winkel A' und B' die gegebenen sind. Dann bestimme man in der Mittellinie $F'G$ den Punkt E' so, daß das Verhältnis $A'E' : B'E'$ gleich dem Verhältnis der gegebenen Diagonalen ist. Alsdann mache man $A'E'K$ und $B'E'K$ den Diagonalen gleich. Die Verbindungslinie KL schneide $B'F'$ und $A'F'$ in H und J. Endlich zieht man durch H die Parallele HA zu KA' und verbindet A mit L, dann ist $AB'HL$ das verlangte Trapez.

Beweis. $\sphericalangle B'$ ist gleich einem der gegebenen Winkel gemacht; $\sphericalangle A$ ist $= \sphericalangle A'$, welcher dem andern Winkel gleich gemacht ist. $B'L$ ist die eine gegebene Diagonale, AH die andere, da sie als Gegenseite in einem Parallelogramm gleich $A'K$ ist.

Anschaulicher dürfte folgende

Konstruktion sein. Schneidet die KL (s. vorige Konstruktion) die Mittellinie $F'G$ in G' und man macht $LD = DJ$, $HC = CK$ und zieht durch D und C die Parallelen DA und CB, so ist $ABCD$ das verlangte Trapez.

Beweis. Es ist $DC \parallel AB$, weil $A'E' : A'K = B'E' : B'L$, das Viereck ist also ein Paralleltrapez. Da nun G' die Mitte von JH und auch von KL ist, so sind die vier Stücke LD, DJ, HC und CK unter einander gleich, folglich gemäß der Konstruktion $AC = A'K$, $BD = B'L$.

III. Die Determination.

§ 21. Der vierte Teil einer vollständigen wissenschaftlichen Lösung einer Konstruktionsaufgabe, die Determination (welches Wort nach seiner Etymologie soviel bedeutet als „Einschließung in bestimmte Grenzen" oder „nähere Bestimmung"), untersucht, ob die Aufgabe unter den gegebenen Bedingungen allgemein löslich ist, oder nicht, ob mehrere Lösungen möglich sind, ob unter speziellen Bedingungen die Lösung eine Modifikation erleidet, und stellt die Bedingungen etwaiger Modifikationen, die Bedingungen der allgemeinen oder mehrfachen Auflösungsmöglichkeit, sowie die Bedingungen der Auflösungsunmöglichkeit zusammen. Dadurch werden in der That, entsprechend dem etymologischen Begriffe des Wortes, die genauen Grenzen festgesetzt, innerhalb welcher sich die Aufgabe allgemein, einfach oder mehrfach, modifiziert oder gar nicht lösen läßt.

Die hierzu notwendige Untersuchung liefert eine Menge lehrreicher und bildender Momente betreffend die Einsicht in den inneren Zusammenhang zwischen gegebenen und gesuchten Größen, sowie zwischen den gegebenen allein. Aus diesem Grunde muß die Determination als ein hervorragend wichtiger Teil der Auflösung bezeichnet werden.

§ 22. Um diese verschiedenen Ziele der Determination zu erreichen, hat man durch Berücksichtigung einschlägiger Lehrsätze zunächst die Frage nach der allgemeinen Lösungsmöglichkeit zu beantworten, insbesondere, die ganze Konstruktion durchgehend, beim Ziehen irgend einer Geraden, oder beim Beschreiben irgend eines Kreises festzustellen, ob sich die Geraden unter den gegebenen Bedingungen der Aufgabe in jedem Falle ziehen und die Kreise in jedem Falle beschreiben lassen. Ferner ist festzustellen, ob die etwa konstruierten Örter den erforderlichen Durchschnitt ergeben, ob ein Durchschnitt oder mehrere Durchschnitte, wobei namentlich die Bedingungen aufgestellt werden müssen, welche die gegebenen Größen unter sich zu erfüllen haben, damit jene Linien und Kreise möglich sind, und daß die konstruierten Örter einen oder mehrere Durchschnitte haben. — Da, wie wir bereits erkannt, nur Gerade und Kreise als Örter vorkommen dürfen und zwei Gerade nur einen Durchschnitt haben können, so ist in dem Falle, in welchem die beiden Örter für einen gesuchten Punkt Gerade sind, nur ein Punkt als gesuchter Punkt möglich; ist aber einer der beiden Örter ein Kreis, oder sind beide Kreise, so sind zur Festsetzung der Anzahl der Durchschnittspunkte oder der Unmöglichkeit eines Durchschnittes die bekannten Sätze über die Lage einer Geraden zu einem Kreise, oder zweier Kreise zu einander (letzteres durch Vergleichung der Summe und Differenz ihrer Radien mit der Centrale) eingehends zu diskutieren.

§ 23. In bezug auf konstruierbare Örter ist zu untersuchen, ob sich, entsprechend den gegebenen Bedingungen, ein Ort oder mehrere Örter für einen gesuchten Punkt konstruieren lassen, woraus eventuell eine mehrfache Lösung hervorgeht. So läßt sich eine Parallele zu einer Geraden in einem gegebenen Abstande auf beiden Seiten derselben konstruieren; auch ist die Halbierungslinie des Nebenwinkels von den Schenkeln des ursprünglichen Winkels in jedem Punkte gleich weit entfernt; ein Kreisbogen läßt sich nach beiden Seiten einer gegebenen Sehne ziehen, und eine Gerade läßt sich in zwei Punkten nach einem gegebenen Verhältnis teilen. Besonders ist hierbei zu untersuchen und festzustellen, ob die durch verschiedene Durchschnitte zweier Örter sich ergebenden Punkte gesuchte Figuren liefern, die wirklich verschieden sind, oder bei bestehender Kongruenz sich nur durch die Lage unterscheiden. Im letzten Falle darf man nur von einer Lösung der Aufgabe reden.

§ 24. Zur Aufstellung einer erschöpfenden Determination empfiehlt es sich, die gesuchten Linien in ihrer Abhängigkeit von den gegebenen Linien und Winkeln auf algebraischem Wege durch eine Gleichung auszudrücken, wozu, wenn Winkel gegeben oder gesucht sind, auch die Lehrsätze der Goniometrie und Trigonometrie anzuwenden sind, und dann die erhaltene Gleichung in bezug auf ihre Ein- oder Mehrdeutigkeit, Möglichkeit und Unmöglichkeit der Konstruktion zu diskutieren.

§ 25. Um das Verfahren bei der Aufstellung der Determination etwas näher zu erläutern, wodurch wir zugleich eine Anzahl von Lösungen erhalten, welche, entsprechend dem planimetrischen Gesetze, streng in ihre vier Teile gegliedert erscheinen, soll hier noch die Determination einigen Lösungen hinzugefügt werden, deren drei erste Teile im Vorstehenden bereits aufgestellt sind.

Zu Aufgabe 25.

Determination. Ist der gegebene Winkel ein hohler, d. h. kleiner als $2R$, so läßt sich in jedem Falle aus ihm und der gegebenen Seite a der dem gesuchten Dreiecke umgeschriebene Kreis konstruieren. Nur in dem Falle, daß die gegebene Mittellinie m_b eine gewisse Größe nicht erreicht oder eine andere überschreitet, findet ein Durchschnitt des um B mit m_b beschriebenen Kreises und des über dem Radius MC beschriebenen Halbkreises nicht statt, so daß man also ein Dreieck ABC nicht erhält. Verbindet man nämlich B mit dem Mittelpunkt O von MC, welche Verbindungslinie den Halbkreis zuerst in D', und zum zweiten Male in D'' schneidet, so bezeichnet BD' den kleinsten, BD'' den größten Wert, den m_b haben darf, wenn ein Dreieck möglich sein soll. Bezeichnet man diesen kleinsten Wert mit x, so ist, da der Halbkreis über MC die Seite BC in ihrer Mitte E durchschneidet (denn $ME \perp EC$), für diesen minimalen Wert $x(x+r) = \frac{1}{2}a^2$; d. h. dieser Wert ist die um den halben Radius des umgeschriebenen Kreises verminderte Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten jener halbe Radius und die halbe Diagonale des über der Seite a beschriebenen Quadrates sind. Der maximale Wert ist um jenen halben Radius größer als jene Hypotenuse. Diese Resultate ergeben sich, wenn man die quadratische Gleichung $x(x+r) = \frac{1}{2}a^2$ nach x auflöst. Hierbei kann man auch für r setzen $\frac{\frac{1}{2}a}{\sin A}$. Für jeden Wert für m_b innerhalb dieser zulässigen Grenzwerte ergiebt der Kreis mit m_b als Radius zwar zwei Durchschnitte, wenn man den ganzen Kreis über MC als Durchmesser beschreibt, indessen ist nur der eine zu verwenden, da der andere als Winkel an der Spitze nicht den gegebenen Winkel A, sondern dessen Supplement ergäbe. Man erhält also nur eine Lösung.

Zusatz. Auch wenn der gegebene Winkel $A = 1R$ ist, erhält man nur eine Lösung, da das zweite, hier auch zulässige Dreieck dem ersten kongruent ist und nur eine andere Lage hat.

Zu Aufgaben 26 und 27.

Determination. (S. Fig. 3.) Auch der zweite Durchschnitt A' ist eine entsprechende Spitze, sowohl bei gegebener Summe als bei gegebener Differenz. Damit die Parallele durch G zu CE den Kreis über BC wenigstens berühre, also eine Spitze A des gesuchten Dreiecks ergebe, muß $s \leqq \frac{1}{2} r \,.\, \cot \frac{1}{4} R$ sein. Für die gegebene Differenz ist genau dieselbe Limitation zu machen.

Zu Aufgabe 70.

Determination. Das Dreieck BFH ist immer möglich, wenn nur $m_b > \frac{1}{2} h_a$ ist. Auch läßt sich dann jederzeit durch F die Parallele zu BH ziehen und in FB der Punkt S bestimmen. Damit aber der um S mit dem Radius $\frac{1}{3} m_c$ beschriebene Kreis diese Parallele wenigstens einmal treffe, so muß $\frac{1}{3} m_c \geqq \frac{1}{6} h_a$ oder $m_c \geqq \frac{1}{2} h_a$ sein. Es muß also eine Mittellinie größer als die halbe Höhe sein; und die andere mindestens gleich der halben Höhe. In diesem Falle erhält man nur ein Dreieck; ist aber die andere auch größer als die halbe Höhe, zwei Dreiecke.

Zu Aufgabe 77.

Determination. Es ergiebt sich die Möglichkeit eines Vierecks immer, wenn $\triangle EGH$ konstruiert werden kann. Dies Dreieck ist aber immer möglich, wenn die doppelte Entfernung der Mitten E und F kleiner ist, als die Summe der beiden andern Vierecksseiten.

Zu Aufgabe 81.

Determination. Die Lösung der Aufgabe ist möglich, so lange das Dreieck MXN möglich ist, dessen Ecke N der Mittelpunkt des verschobenen Kreises in seiner neuen Lage ist. Bezeichnet s die gegebene Summe der entstehenden Sehnen, R und r die Radien der gegebenen Kreise, so sind in dem Dreiecke MXN die Seiten MX und NX durch r und R, die Seite MN durch $\frac{1}{2} s$ zu bezeichnen. Aus den für die Seiten eines Dreiecks bestehenden Beziehungen ergiebt sich also für die gegebene Summe der Sehnen, daß dieselbe kleiner als $2(R + r)$, und größer als $2(R - r)$ sein muß. Liegt daher die gegebene Summe außerhalb dieser Grenzen, so ist die Lösung unmöglich. Dazu sei bemerkt, daß das Maximum $2(R + r)$ für die Sehnen nur dann eintreten kann, wenn die Gerade in der Richtung der Centrale der beiden Kreise gezogen werden soll. Für diese Lage ist aber das Minimum die Sehne im größeren Kreise, welche verlängert Tangente an dem kleinern ist. Bildet aber die Richtung der gesuchten Geraden mit der Centrale der Kreise in ihrer ursprünglichen Lage den Winkel φ, und bezeichnet c diese Centrale, so ist für die Möglichkeit, in der geforderten Richtung durch beide Kreise eine Gerade zu legen, erforderlich, daß dieser Winkel kleiner sei, als der, den die gemeinschaftliche innere Tangente mit der Centrale macht. Da der Sinus dieses Winkels $= \frac{R + r}{c}$ ist, so muß $\sin \varphi < \frac{R + r}{c}$ sein. Jede Gerade, welche einen größeren Winkel mit der Centrale macht, kann nur einen der beiden Kreise treffen. Das Maximum der Sehnensumme einer zur Centrale geneigten Geraden, die beide Kreise schneidet, wird aber erreicht, wenn diese Gerade durch den innern Ähnlichkeitspunkt geht, das Minimum ist die Sehne des größeren Kreises, welche verlängert den anderen berührt.

Zu Aufgabe 82.

Determination. Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten die Tangente von P an den einen Kreis und der Radius des andern Kreises sind, muß mindestens gleich der kürzesten Entfernung jenes Punktes von dem Halbkreise über MN und darf höchstens gleich der größten Entfernung desselben von dem Halbkreise sein. Liegt die Hypotenuse außerhalb dieser Grenzen, so findet kein Durchschnitt des Kreises um P mit dem Halbkreise statt, und es läßt sich also dann der Mittelpunkt des verschobenen Kreises in seiner neuen Lage nicht bestimmen.

Zu Aufgabe 85.

Determination. Sind die Nachbarwinkel A und D größer als $2R$, so ergiebt sich der Winkel $CDE = A + D - 2R$; sind sie kleiner als $2R$, so wird $\sphericalangle CDE = 2R - (A + D)$; in beiden Fällen ist also das Hilfsdreieck CDE zu konstruieren und das Viereck daraus abzuleiten. Ist aber $A + D = 2R$, so wird das Viereck ein Paralleltrapez, zu dessen Konstruktion sich in der Seite DC der Punkt E bestimmen läßt, so daß $DE = AB$ ist, woraus sich das Trapez wiederum leicht ableiten läßt.

Zu Aufgabe 89.

Determination. Damit das das ganze Trapez bedingende Dreieck AGH konstruiert werden könne, muß die gegebene Verbindungslinie der Mitten der nicht parallelen Seiten des Trapezes kleiner als die halbe Summe der gegebenen Diagonalen sein.

Zu Aufgabe 100.

Determination. Die Aufgabe kann immer gelöst werden, wenn nur der gegebene Winkel $A < 2R$ ist.

Zu Aufgabe 105.

Determination. Die Lösung ist immer möglich.

Zu Aufgabe 108.

Determination. Heißt x die Hypotenuse des gesuchten Dreiecks, s und s' die gegebenen Summen, so erhält man nach dem Pythagoreischen Lehrsatze für die Hypotenuse leicht den Ausdruck $x = s + s' \pm \sqrt{2s \,.\, s'}$. Es ist offenbar, daß zur Konstruktion nur das negative Vorzeichen der Wurzel genommen werden darf. Wiewohl nun der Ausdruck $s + s' - \sqrt{2s \,.\, s'}$ für jeden beliebigen Wert von s und s' einen reellen Wert ergeben würde, so ist doch der Wert für x nach den Sätzen über Dreiecksseiten zu limitieren. Nach dem Satze über die Differenz zweier Dreiecksseiten in ihrer Beziehung zur dritten muß nun sein $s - s' < s + s' - \sqrt{2s \,.\, s'}$, woraus sich ergiebt $s < 2s'$, d. h. die Aufgabe kann immer gelöst werden, so lange die eine der gegebenen Summe kleiner ist, als die doppelte andere.

Zusatz. Für die Aufgabe 107 läßt sich die Determination mit Hilfe des Cosinussatzes, aber bei weitem nicht so einfach, bestimmen.

Zu Aufgabe 109.

Determination. Die Lösung der Aufgabe ist immer möglich.

Zu Aufgabe 111.

Determination. Damit die Lösung dieser Aufgabe möglich sei, muß $r \overline{\overline{>}} \frac{1}{2} a$ sein.

Zu Aufgabe 112.

Determination. Wenn die beiden Halbkreise über BF und AE einen oder zwei Punkte gemeinsam haben sollen, wodurch die Dreiecksecke A bestimmt wird, so muß ihre Centrale gleich oder größer als BC (oder Seite a) sein; oder es muß a gleich oder kleiner als die Summe der Radien sein. Nun ist der

Radius des Halbkreises über CF aber $\frac{1}{2}\frac{m}{n}\cdot a$, wenn das Verhältnis $b:h_b$ durch $m:n$ gegeben ist; in gleicher Weise ist der Radius des Halbkreises über BE, wenn das Verhältnis $c:h_c = p:q$ gegeben ist, $= \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{q}\cdot a$. Es ergiebt sich also als Bedingung für die Möglichkeit der Lösung: $2a \overline{\overline{<}} \frac{m}{n}\cdot a + \frac{p}{q}\cdot a$ oder $2 \overline{\overline{<}} \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$. Ebenso muß $2a \overline{\overline{>}} \frac{m}{n}\cdot a - \frac{p}{q}\cdot a$ oder $2 \overline{\overline{>}} \frac{m}{n} - \frac{p}{q}$ sein, welche beiden Bedingungen sich so ausdrücken lassen. Es muß $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} \overline{\overline{<}} 2 \overline{\overline{<}} \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ sein. Für den Fall $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} < 2 < \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ erhält man einen doppelten Durchschnitt und zwei verschiedene Lösungen.

Zu Aufgabe 113.

Determination. Für die Möglichkeit der Lösung ist es notwendig, daß der um C mit b beschriebene Kreis den Kreis über AE treffe, daß also b wenigstens so groß sei, wie die um den Radius $\frac{1}{2}AE$ verminderte Entfernung des Punktes C von der Mitte O der Linie AE. Drückt man diese Beziehung analytisch aus, indem man das gegebene Verhältnis wie vorhin durch $\frac{m}{n}$ bezeichnet, so ergiebt sich nach leichter Entwicklung die Bedingnisgleichung $4n^2 + 4mn + m^2 \overline{\overline{>}} 4n^2 + m^2$ Diese ist aber immer erfüllt, und man erhält daher immer zwei verschiedene Dreiecke.

Zu Aufgabe 116.

Determination. Wollte man durch Verlängerung der gegebenen Mittellinie eine Reduktion versuchen, so würde man finden, daß sich die Aufgabe in sich selbst reduziert, also ein anderer Weg einzuschlagen ist. — Für die Möglichkeit der Lösung muß die gegebene Mittellinie wenigstens so groß sein, als die kleinste Entfernung der Mitte F der Seite BC von dem Kreise über CE, und darf die entsprechende größte Entfernung nicht überschreiten. Analytisch würden sich, wenn man den kleinsten Wert von m_a mit x bezeichnet, die Bedingungen der Möglichkeit der Lösung ergeben durch die Gleichung: $x\left(x + \frac{m}{n}\cdot a\right) = \frac{1}{4}a^2$.

Zu Aufgabe 124.

Determination. Die gegebenen Winkel müssen, je nachdem sie der größern oder der kleinern der parallelen Seiten anliegen sollen, zusammen kleiner oder größer als $2R$ sein; desgleichen müssen die gegebenen Diagonalen verschiedener Größe sein. Wären die gegebenen Winkel zusammen gleich $2R$, so erhielte man statt eines Paralleltrapezes in einfachster Weise ein Parallelogramm, indem man leicht ein Dreieck als Hälfte desselben aus einer Seite (einer gegebenen Diagonale), dem gegenüberliegenden Winkel und der zugehörigen Mittellinie (der Hälfte der andern Diagonale) konstruieren könnte. Sind aber die Diagonalen gleich, so müssen auch die gegebenen Winkel gleich sein, und das gesuchte Paralleltrapez wird ein gleichschenkliges.

IV. Übungsbeispiele.

§ 26. Im folgenden haben wir eine Anzahl Aufgaben zur Übung zusammengestellt und dieselben so ausgewählt, daß sie sämtlich nach einer der auseinandergesetzten Methode in einfacher Weise aufgelöst werden können. Die von uns etwa beigefügten Winke zur Lösung beschränken sich auf den Hinweis auf die anzuwendende Methode; die Ausführung ist in jedem Falle dem Leser überlassen. Wo es in einzelnen Fällen zweckmäßig erschien, sind kurze Bemerkungen, betreffend die Determination, hinzugefügt.

Aufgabe 126. In einen gegebenen Kreis ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, dessen Katheten je durch einen gegebenen Punkt gehen.

Lösung mit Hilfe von O. 6. — Man erhält im allgemeinen zwei verschiedene rechtwinklige Dreiecke.

Aufgabe 127. In einen gegebenen Kreis ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, von welchem man einen spitzen Winkel und einen Punkt der einen Kathete kennt.

Lösung mit Hilfe von O. 15, nachdem man den gegebenen Punkt der Kathete mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises verbunden hat. — Zwei Dreiecke!

Aufgabe 128. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem die Hypotenusenhöhe, zwei Punkte der Hypotenuse und je ein Punkt der Katheten gegeben sind.

Lösung mittels O. 6. — Zwei Dreiecke!

Aufgabe 129. Einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene gleiche Kreise umschließend oder von außen berührt.

Lösung durch Verschiebung der Peripherie des gesuchten Kreises in die Mittelpunkte der gegebenen. (Vergl. § 16.)

Aufgabe 130. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und der zugehörigen Höhe und Mittellinie. (Aus a, h_a, m_a.)

Lösung mittels O. 4 und O. 1.

Aufgabe 131. An einen Kreis eine Tangente zu legen, welche vom Berührungspunkte bis an eine Gerade (oder bis an die Peripherie eines Kreises) von gegebener Länge sei.

Lösung mittels O. 9.

Aufgabe 132. Einen Punkt zu bestimmen, von welchem aus die an zwei Kreise gezogenen Tangenten gegebene Längen haben.

Lösung mittels O. 9.

Aufgabe 133. In ein Dreieck ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Höhe gegeben ist, so einzuschreiben, daß seine Grundlinie der einen Dreiecksseite parallel wird.

Lösung. Die Spitze muß in der Dreiecksseite liegen, welcher die Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks parallel werden soll. Übrigens hilft O. 4.

Aufgabe 134. Innerhalb eines Dreiecks einen Punkt zu bestimmen, dessen Verbindungen mit den Ecken das Dreieck in drei gleiche Teile teilen.

Lösung. Soll $AOB = AOC$ sein, so müssen, da die Grundlinie AO beiden Dreiecken gemeinschaftlich ist, die Lote aus B und C auf AO einander gleich sein. Das ist nur möglich, wenn AO verlängert die Mitte von BC trifft. Daher liegt der gesuchte Punkt auf jeder der drei Mittellinien.

Aufgabe 135. Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem eine Seite, die zugehörige Höhe und das Verhältnis der beiden andern Seiten gegeben sind. (a, h_a, $b : c$.)

Lösung. Für die dritte Ecke des gesuchten Dreiecks erhält man je einen Ort nach O. 4 (durch h_a) und nach O. 22 durch $b:c$. — Im allgemeinen zwei Dreiecke!

Aufgabe 136. Einen Punkt zu bestimmen, von dem aus drei Kreise unter gleichem Winkel erscheinen.

Lösung. Verbindet man den gesuchten Punkt mit den drei Mittelpunkten und diese mit den Berührungspunkten der aus jenem Punkte an die Kreise gezogenen Tangenten, so entstehen drei ähnliche Dreiecke, woraus sich ergiebt, daß die Abstände des gesuchten Punktes von den Mittelpunkten der Kreise sich verhalten wie die Radien. Daher O. 22.

Aufgabe 137. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem gegenüber liegenden Winkel und der zugehörigen Höhe. (Aus a, A und h_a.)

Lösung durch O. 15 und O. 4. — Im allgemeinen zwei Dreiecke!

Aufgabe 138. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn statt der zugehörigen Höhe der vorigen Aufgabe die zugehörige Mittellinie gegeben ist.

Lösung. Statt O. 4 tritt O. 1 ein.

Aufgabe 139. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der Halbierungslinie desselben und dem Radius des eingeschriebenen Kreises. (Aus A, w_a und ϱ.)

Lösung. Man bestimmt den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises mit Hilfe von O. 4.

Aufgabe 140. Statt der Halbierungslinie des Winkels sei die seines Nebenwinkels und statt des Radius des eingeschriebenen Kreises der Radius eines äußeren Berührungskreises gegeben, der eine der den Winkel einschließenden Seiten zwischen ihren Endpunkten berührt.

Lösung genau wie vorhin.

Aufgabe 141. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Gegenwinkel und der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten. (Aus a, A und $b^2 + c^2$.)

Lösung durch O. 13 und O. 15.

Aufgabe 142. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite und den beiden nicht zugehörigen Höhen. (Aus a, h_b und h_c.)

Lösung durch O. 6 und O. 1.

Aufgabe 143. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Gegenwinkel und der Differenz der Quadrate der beiden andern Seiten. (Aus a, A und $b^2 - c^2$.)

Lösung durch O. 15 und O. 14.

Aufgabe 144. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten. (Aus a, h_a und $b^2 + c^2$.)

Lösung durch O. 4 und O. 13.

Aufgabe 145. Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus einer Seite, einem anliegenden Winkel und den Diagonalen.

Lösung. Ist $AB = a$ und $\sphericalangle A$ gegeben, so ist durch Hinzunahme der gegebenen Diagonale BD das Dreieck ABD gegeben. Zur Bestimmung der vierten Ecke benutzt man entweder, da durch $\sphericalangle A$ auch sein Supplement C gegeben ist, O. 15 und O. 1, oder man bestimmt den Radius des Kreises um das Dreieck ABD, welcher Kreis ein Ort für C ist, und wendet noch O. 1 an. — Im allgemeinen zwei verschiedene Vierecke. Unter Umständen auch vier!

Aufgabe 146. Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus einem Winkel, den beiden Diagonalen und dem Winkel, welchen die eine Diagonale mit dem einen Schenkel des gegebenen Viereckswinkels macht.

Lösung. Ein Stück des Vierecks ist unmittelbar gegeben; dadurch der zugehörige Kreis. Die vierte Ecke ergiebt sich durch O. 1. — Zwei Vierecke!

Aufgabe 147. Ein Parallelogramm zu konstruieren aus einer Seite und den beiden Diagonalen.

Lösung durch Reduktion auf ein Dreieck, dessen drei Seiten gegeben sind. — Determination!

Aufgabe 148. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der zugehörigen Mittellinie und einer nicht zugehörigen Höhe. (Aus a, m_a und h_b.)

Lösung durch Reduktion auf ein rechtwinkliges Dreieck, wovon die Hypotenuse und eine Kathete bekannt sind. Dann O. 1.

Aufgabe 149. Ein Dreieck zu konstruieren aus der zu derselben Seite gehörigen Höhe und Mittellinie und dem Verhältnis dieser Seite zu einer andern.

Lösung durch Reduktion auf ein rechtwinkliges Dreieck; dann Anwendung von D. 22.

Aufgabe 150. Ein Viereck zu konstruieren aus zwei Nachbarseiten, dem eingeschlossenen Winkel, der von dem Scheitel ausgehenden Diagonale und einem fernern, dem gegebenen nicht gegenüber liegenden Winkel.

Lösung durch Reduktion auf ein Dreieck, von welchem zwei Seiten und ein Gegenwinkel gegeben sind, dann D. 1. — Unter Umständen zwei verschiedene Vierecke!

Aufgabe 151 und 152. Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus den beiden Diagonalen, dem Radius des zugehörigen Kreises und der Summe (oder Differenz) zweier benachbarten Seiten.

Lösung durch Reduktion mittels eines Datums, wenn man in den gegebenen Kreis die Diagonale als Sehne einlegt, welche dem Winkel der Seiten gegenüber liegt, deren Summe (oder Differenz) gegeben ist. Dieser Winkel ist dann durch ein Datum gegeben und ermöglicht die Konstruktion eines Dreiecks, dessen Grundlinie jene als Sehne eingelegte Diagonale ist, deren Gegenwinkel bekannt und dessen eine Seite die gegebene Summe (oder Differenz) ist. Schließlich wird zur Bestimmung der vierten Ecke noch D. 1 angewandt.

Aufgabe 153. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der Differenz der einschließenden Seiten und der Differenz ihrer Projektion auf die dritte Seite. (Aus A, $b - c$, $p - q$.)

Lösung durch Reduktion auf ein Dreieck, von welchem zwei Seiten und ein Gegenwinkel bekannt sind. Man erhält dies Hilfsdreieck, wenn man um A mit c einen Kreis beschreibt, der b in D, a in E schneidet. In demselben ist $CD = b - c$, $CE = p - q$, $\sphericalangle DEC = \frac{1}{2} A$. Letzteres erkennt man durch das Sehnenviereck $BEDF$, worin F der Durchschnitt der verlängerten CA mit dem um A beschriebenen Kreise ist. — Zwei Dreiecke!

Aufgabe 154. Durch zwei Punkte einen Kreis zu beschreiben, der eine durch den ersten Punkt gehende Gerade in einem Punkte schneidet, dessen Verbindungslinie mit einem dritten Punkte Tangente an dem Kreise wird.

Lösung. Sind A, B, C die drei gegebenen Punkte, und schneidet ein durch A und B konstruierter Kreis die Gerade durch A in D so, daß DC Tangente an diesem Kreise ist, so ist $\sphericalangle CDB = \sphericalangle BAD$, also O. 15. — Zwei Kreise!

Aufgabe 155. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkelhalbierer, dem Verhältnis der Summe der den betreffenden Winkel einschließenden Seiten zur dritten Seite und der Differenz der beiden andern Winkel. (Aus w_a, $b + c : a$ und $B - C$.)

Lösung. Ist AD der Winkelhalbierer w_a, so ist $DC : DB = b : c$ oder $DC : a = b : b + c$ oder $DC : b = a : b + c$. Da nun, wenn $AE \perp BC$ ist, der Winkel EAD bekannt und also $\triangle AED$ zu konstruieren ist, so hat man für C, wofür ED der eine Ort ist, einen zweiten nach O. 22.

Aufgabe 156. Ein Viereck zu konstruieren, von welchem die Projektionen des Durchschnittes der Diagonalen auf die vier Seiten gegeben sind und die Winkel der Gegenseiten.

Lösung. Der Winkel zwischen zwei auf zwei gegenüber liegende Seiten gefällten Loten setzt sich aus den Supplementen zweier Viereckswinkel zusammen, oder ist auch das Supplement des Winkels, den jene gegenüber liegenden Seiten miteinander bilden. Also O. 15.

Aufgabe 157. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem zugehörigen Winkelhalbierer und der Summe der beiden andern Seiten. (Aus a, w_a und $b + c$.)

Lösung. Ist AD der Winkelhalbierer w_a und die Verlängerungen von CA und BA über A hinaus, nämlich AE und AF, bezüglich gleich c und b, so ergiebt sich leicht aus den Winkeln E und F, daß EB und FC beide zu AD parallel sind. Dann ergiebt sich aber $BD : BA = a : b + c$ und ebenso $CD : CA = a : b + c$. Durch den Durchschnitt der beiden hierdurch gewonnenen Kreise als Örter für B und C ist dann zur Bestimmung dieser Punkte eine Gerade $= a$ zwischen die Peripherien so zu legen, daß zu den entstehenden Sehnen beider Kreise gleiche Peripheriewinkel gehören. (Vergl. Nachtrag 15.)

Aufgabe 158. In ein Viereck ein Parallelogramm zu beschreiben, dessen Mittelpunkt der Lage nach gegeben ist.

Lösung. Man hat durch den gegebenen Mittelpunkt zwischen die Schenkel zweier Winkel je eine Gerade zu legen, welche in jenem Punkte halbiert werden. (S. Nachtrag 1.)

Aufgabe 159. Durch zwei konzentrische Kreise eine Gerade so zu legen, daß die kleinere Sehne halb so groß wird wie die größere.

Lösung durch Reduktion, indem man vom Mittelpunkte das Lot auf die Sehne und im Endpunkte der kleineren Sehne das Lot auf ihr errichtet bis in einen zum entsprechenden Endpunkte der größeren Sehne gehörigen Radius.

Aufgabe 160. Ein Parallelogramm zu konstruieren, von welchem zwei Gegeneckpunkte gegeben sind, und dessen beiden andern Gegenecken auf der Peripherie eines gegebenen Kreises liegen sollen.

Lösung leicht, wenn man bedenkt, daß die Verbindungslinie der Mitte einer Sehne mit dem Kreismittelpunkte auf der Sehne senkrecht steht.

Aufgabe 161. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel und zwei Mittellinien.

Für die Analysis ist zu unterscheiden, ob eine der beiden Mittellinien zu dem gegebenen Winkel gehört oder nicht. Ist nämlich $\sphericalangle A$, m_a und m_b gegeben, und man legt $BE = m_b$ hin, so hat man für A einen Ort durch den gegebenen $\sphericalangle A$ nach O. 15. Da ferner der Durchschnittspunkt S der beiden Mittellinien bekannt ist, so giebt die bekannte Länge $AS = \frac{2}{3} m_a$ den zweiten Ort. Wegen der zwei Durchschnitte beider Örter erhält man zwei Punkte A und daraus zwei verschiedene Dreiecke, welche leicht abzuleiten sind, die die gegebene Mittellinie enthalten; aber das eine enthält statt des Winkels A sein Supplement. Ist dagegen $\sphericalangle A$, m_b und m_c gegeben, so löst man durch Reduktion. Durch den Winkel A hat man für A einen Ort als Kreisbogen über der Sehne $BD = m_b$. Beschreibt man dann um den bekannten Durchschnittspunkt S mit einem Radius $= \frac{2}{3} m_c$ einen Kreisbogen, so hat man durch D zwischen beide Peripherien eine Gerade zu legen, die in D halbiert wird. (Vergl. Nachtrag 2.)

Aufgabe 162. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Verhältnis der beiden andern und dem Radius des umgeschriebenen Kreises. (Aus a, $b:c$ und r.)

Lösung. Der umgeschriebene Kreis mit der Seite BC als Sehne in demselben ist gegeben. Ein zweiter Ort für A ist die Verbindungslinie des Mittelpunktes des Bogens BC mit dem Punkte D, in welchem BC nach dem Verhältnis $b:c$ geteilt wird.

Aufgabe 163. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Mittellinie und den Verhältnissen derselben zu jeder der nicht zugehörigen Höhen. (Aus m_a, $m_a:h_b$ und $m_a:h_c$.)

Lösung nach der Ähnlichkeitsmethode auf die Aufgabe zu reduzieren: Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels zwischen diese Schenkel eine Gerade zu legen, welche in dem Punkte halbiert wird. (Nachtrag 2.) Fällt man nämlich vom Fußpunkte D der gegebenen Mittellinie m_a die Lote DE und DF auf b und c, so läßt sich aus den rechten Winkeln E und F und den Verhältnissen $AD:DE = m_a:\frac{1}{2}h_b$ und $AD:DF = m_a:\frac{1}{2}h_c$ eine Figur $AE'D'F'$ konstruieren, an welcher $AD'E' \sim ADE$ und $AD'F' \sim ADF$ ist. Der Winkel A wird aber dadurch bestimmt, und es kann der Punkt D auf AD' bestimmt werden, durch den BC so zu legen ist, daß $BD = CD$ wird.

Aufgabe 164. Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem der Schwerpunkt (der Durchschnitt der Mittellinien) und eine Ecke der Lage nach, und für dessen beiden andern Ecken je eine Gerade oder eine Kreisperipherie als Ort gegeben sind.

Lösung durch Reduktion. Durch die Ecke A und den Schwerpunkt S ist auch der Fußpunkt D der einen Mittellinie gegeben, durch welchen eine Gerade zwischen die gegebenen Örter zu legen ist, welche in D halbiert wird. (Nachtrag 1 oder 2.)

Aufgabe 165. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, der zugehörigen Höhe und dem Verhältnis der von dieser Höhe auf der Gegenseite gebildeten Abschnitte. (Aus A, h_a und $p:q$.)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode, indem man zunächst ein beliebiges Dreieck $B'C'A$ konstruiert, welches den gegebenen

Winkel A enthält, und deren Abschnitte $B'D'$ und $C'D'$ das gegebene Verhältnis $p:q$ haben.

Aufgabe 166. In einen Halbkreis ein Viereck, ähnlich einem gegebenen, so einzutragen, daß zwei Ecken desselben auf dem Diameter liegen.

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode mit Hilfe eines in gleicher Lage um das gegebene Viereck beschriebenen Halbkreises.

Aufgabe 167. In ein Dreieck einen Rhombus einzubeschreiben, der mit dem Dreiecke einen Winkel gemeinsam hat.

Lösung durch Halbierung dieses gemeinsamen Winkels, wodurch man in der Gegenseite die Gegenecke des Rhombus erhält.

Aufgabe 168. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältnis der zugehörigen Höhe zu einer andern und der dritten Höhe. (Aus $\sphericalangle A$, $h_a : h_b$ und h_c.)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode. Ein rechtwinkliges Dreieck $AB'E'$, worin $B'E'$ der Höhe h_b entspricht, und A der gegebene Winkel ist, ist seiner Form nach gegeben. Bestimmt man nun nach der Proportion $h_a : h_b = AD' : B'E'$ die AD' als vierte Proportionale, so erhält man auch ein Dreieck $AB'D'$, und durch Verlängerung von AE' und $B'D'$ ein Dreieck $AB'C'$, welches dem gesuchten ähnlich ist.

Aufgabe 169. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der zugehörigen Mittellinie und dem Verhältnis der nicht zugehörigen Höhen. (Aus a, m_a und $h_b : h_c$.)

Lösung durch Reduktion; denn durch $h_b : h_c$ ist $c : b$ gegeben.

Aufgabe 170. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Mittellinie zur zugehörigen Seite und zu einer andern, sowie der dritten Seite. (Aus $m_a : a$, $m_a : b$ und c.)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode. Aus den gegebenen beiden Verhältnissen $m_a : a$ und $m_a : b$ läßt sich nämlich das Verhältnis $a : b$ bestimmen, so daß von dem Dreieck ADC, in welchem $AD = m_a$ ist, das Verhältnis der drei Seiten bekannt ist.

Aufgabe 171. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Höhe zur zugehörigen und zu einer nicht zugehörigen Mittellinie, und der dritten Mittellinie. (Aus $h_a : m_a$, $h_a : m_b$ und m_c.)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode. Ein dem Dreiecke ADE, worin $AD = h_a$ und $AE = m_a$ ist, ähnliches Dreieck $AD'E'$ ist nämlich gegeben, und aus diesem mit Hilfe des zweiten Verhältnisses $h_a : m_b$ leicht ein Dreieck $AB'C'$ abzuleiten, das dem gesuchten ähnlich ist.

Aufgabe 172. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Seite zu den nicht zugehörigen Mittellinien und der dritten Mittellinie. (Aus $a : m_b$, $a : m_c$ und m_a.)

Lösung mittels Reduktion durch Örter. Für den Durchschnittspunkt S der drei Mittellinien sind zwei Örter bekannt.

Aufgabe 173. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Höhe zu den nicht zugehörigen Mittellinien und der dritten Mittellinie. (Aus $h_a : m_b$, $h_a : m_c$ und m_a.)

Lösung durch Parallelverschiebung der Höhe in den Durchschnitt S der Mittellinien; alsdann die Ähnlichkeitsmethode.

Aufgabe 174. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Verhältnis einer Seite zur Halbierungslinie eines anliegenden Winkels, der Differenz der beiden andern Winkel und der andern am halbierten Winkel anliegenden Seite. (Aus $c : w_a$, $B - C$ und b.)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode und Ort 22, da durch die gegebene Winkeldifferenz ein dem Dreiecke ADE, in welchem D und E die Fußpunkte von h_a und w_a sind, ähnliches Dreieck $AD'E'$ gegeben ist. Das entsprechende C' erhält man nach O. 22 aus obigem Verhältnis in Verbindung mit dem konstruierten AE'. Dadurch aber findet man dann leicht ein Dreieck $AB'C'$, welches dem gesuchten ähnlich ist.

Aufgabe 175. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältnis der zugehörigen Höhe zum Umfange und dem Radius des eingeschriebenen Kreises. (Aus $\sphericalangle A$, $h_a : \frac{1}{2}s$ und ϱ.)

Lösung durch Reduktion und Ähnlichkeitsmethode. Stellt man nämlich den Umfang des Dreiecks als DE durch Verlängerung der Seite BC über B um $BD = BA$, und über C um $CE = CA$ dar, so ist $\sphericalangle DAE = 1R + \frac{1}{2}A$ und die Aufgabe reduziert auf die andere: Ein Dreieck aus einem Winkel, der zugehörigen Höhe und der Grundlinie zu konstruieren, indem man nämlich über einer beliebigen als Umfang angenommenen Linie $D'E'$ ein Dreieck $A'D'E'$ konstruiert, welches den Winkel $A' = A$ und eine Höhe $A'F$ enthält, welche man nach der Proportion $\frac{1}{2}s : h_a = \frac{1}{2}D'E' : A'F$ konstruiert. Bestimmt man hieraus das dem gesuchten entsprechende Dreieck $A'B'C'$, so findet man aus diesem mittels des eingeschriebenen Kreises leicht das gesuchte $A'BC$.

Aufgabe 176. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Mittellinie zu der zugehörigen und einer nicht zugehörigen Seite und der dritten Seite. (Aus $m_a : a$, $m_a : b$ und c.)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode, da ein dem Dreieck ADC, in welchem D der Fußpunkt von m_a ist, ähnliches Dreieck durch das Verhältnis seiner Seiten gegeben ist.

Aufgabe 177. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Seite zu ihrer zugehörigen Höhe und Mittellinie, und dem Radius des umgeschriebenen Kreises. (Aus $a : h_a$, $a : m_a$ und r.)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode, nachdem man aus den gegebenen beiden Verhältnissen das Verhältnis $h_a : m_a$ bestimmt hat.

Aufgabe 178. Ein Dreieck zu konstruieren aus den Verhältnissen einer Seite zu den Radien des ein- und umgeschriebenen Kreises und einer Höhe. (Aus $a : r$, $a : \varrho$ und h_a.)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode, da durch das Verhältnis $a : r$ resp. $\frac{1}{2}a : r$ der Winkel A gegeben ist. Konstruiert man einen die Schenkel des Winkels berührenden Kreis und legt an diesen zwischen die beiden Tangenten eine dritte a', welche, wenn der Radius des konstruierten Berührungskreises ϱ' ist, aus der Proportion $\varrho : a = \varrho' : a'$ abzuleiten ist, so erhält man ein Dreieck $AB'C'$, welches dem gesuchten ähnlich ist. Die hierzu erforderliche Kenntnis der Lösung der

Aufgabe 179. Zwischen zwei Tangenten eines Kreises eine dritte so zu legen, daß das begrenzte Stück eine gegebene Länge erhalte wird vermittelt durch die geometrische Thatsache, daß das Stück einer gemeinschaftlichen inneren Tangente zwischen den gemeinschaftlichen äußeren der Länge einer äußern zwischen den beiden Berührungspunkten gleich ist.

Aufgabe 180. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältnis der zugehörigen beiden Radien und der dem Winkel entsprechenden Höhe. (Aus $\sphericalangle A$, $r : \varrho$ und h_a.)

Lösung durch Reduktion auf A. 176. Denn durch $\sphericalangle A$ ist das Verhältnis $r : a$ gegeben; aus der Verbindung dieses Verhältnisses mit dem gegebenen $r : \varrho$ kann man aber auch $\varrho : a$ ableiten.

Aufgabe 181. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältnisse seiner Halbierungslinie zum Umfange und dem Radius des umgeschriebenen Kreises. (Aus $\sphericalangle A$, $w_a : \frac{1}{2}s$ und r.)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode. Beschreibt man nämlich den äußeren Berührungskreis an das gesuchte Dreieck, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels A in F und G trifft, so ist bekanntlich $AF = AG =$ dem halben Umfang des gesuchten Dreiecks. Es ist also, wenn D der Fußpunkt des Winkelhalbierers w_a ist, allezeit ein Dreieck $AD'G' \sim ADG$ zu konstruieren, da von demselben ein Winkel $(= \frac{1}{2}A)$ und das Verhältnis von $AD' : AG'$ (das Verhältnis des Winkelhalbierers zum halben Umfang) gegeben ist. Aus diesem erhält man aber mittels einer Tangente von D' aus an den in G' und F' berührenden Kreis ein Dreieck $AB'C'$, welches dem gesuchten ähnlich ist.

Aufgabe 182. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältnis der zugehörigen Mittellinie zur Summe der den Winkel einschließenden Seite und einer winkelhalbierenden Transversale. (Aus $\sphericalangle A$, $m_a : b + c$ und w_a oder w_b oder w_c.)

Lösung durch Reduktion nach der Ähnlichkeitsmethode. Man verlängert nämlich die Mittellinie AD über D hinaus bis E um sich selbst, verbindet E mit C und verlängert AC bis F um $CF = CE$. Dann ist im Dreieck AEF das Verhältnis $AE : AF$ bekannt, nämlich $2m_a : b + c$, ferner der Winkel F aus A bestimmbar. Man kann daher zunächst ein Dreieck $AE'F' \sim AEF$

konstruieren und erhält durch die Verbindung der Mitte D' von AE' mit dem Punkte, in welchem das in der Mitte von $E'F'$ zu dieser Linie errichtete Lot AF' schneidet, leicht ein dem gesuchten ähnliches Dreieck $AB'C'$.

Aufgabe 183. Statt des Verhältnisses $m_a : b + c$ möge das Verhältnis $m_a : b - c$ gegeben sein.

Lösung der vorhergehenden ganz analog, wenn man $CF' = CE$ von CA abschneidet.

Aufgabe 184. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkel, dem Verhältnis der Gegenseite zur zugehörigen Höhe und der Summe der den Winkel einschließenden Seiten. (Aus $\sphericalangle A$, $a : h_a$ und $b + c$.)

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode. Über einer beliebigen $B'C'$ als Sehne beschreibe man einen Kreisbogen für den Peripheriewinkel $= A$, bestimme dann aus der Proportion $a : h_a = B'C' : x$ die entsprechende Höhe AD', wodurch man ein Dreieck $AB'C'$ erhält, welches dem gesuchten ähnlich ist. Um hieraus das gesuchte Dreieck abzuleiten, hat man noch AB zu bestimmen. Das erhält man aber durch die Proportion $AC' + AB' : b + c = AB' : AB$. Eine Parallele durch B zu $B'C'$ vollendet das Dreieck ABC.

Aufgabe 185. Statt der Summe $b + c$ soll die Differenz $b - c$ gegeben sein.

Lösung der vorigen ganz analog.

Dem aufmerksamen Leser kann es nicht entgangen sein, daß bei vielen der vorhergehenden Aufgaben die Lösung auf die Konstruktion eines Dreiecks reduziert werden konnte, das dem gesuchten Dreieck ähnlich war, und daß man aus diesem meist in einfachster Weise das gesuchte Dreieck ableiten konnte. Darum dürfen wir auch die Ähnlichkeitsmethode eine fruchtbare Methode der Reduktion nennen. —

Wenn man in den vorhergehenden Aufgaben unter Beibehaltung der Stücke oder Bedingungen, aus welchen das ähnliche Hilfsdreieck abgeleitet werden konnte, an Stelle des dritten Stückes, welches zur definitiven Bestimmung der Größe des gesuchten Dreiecks diente und stets eine Länge war, irgend eine andere am Dreiecke vorkommende Länge oder eine Kombination solcher Längen, in Gestalt von Summe oder Differenz, als gegeben annimmt, so erhält man statt jeder einzelnen Aufgabe so viele, als wie viele verschiedene dritte Stücke man als gegeben annimmt. Auf diese Weise kann man aus den vorhergehenden Aufgaben leicht mehrere hundert aufstellen, wenn man von den zahlreichen Geraden, welche an einem Dreiecke vorkommen, und deren Kombinationen irgend eine als drittes gegebenes Stück annimmt. Die Aufstellung einer Reihe dieser Aufgaben und ihre Lösung ist zur Übung sehr zu empfehlen.

§ 27. Es soll hier noch eine zweite Gruppe von Übungsbeispielen folgen, die mehr gemischter Natur sind, während in der vorhergehenden Gruppe Dreieckskonstruktionen und Konstruktionen anderer geschlossener Figuren prävalierten. Zur Lösung derselben sind nur in den Fällen ausführlichere Andeutungen gemacht, in welchen sich entweder größere Schwierigkeiten zeigten, oder die Art der Lösung ein hervorragendes Interesse darbot.

Aufgabe 186. Einen Rhombus zu konstruieren, von welchem zwei Seiten auf zwei gegebenen Parallelen liegen, und dessen beiden anderen Seiten jede durch einen gegebenen Punkt gehen sollen.

Zur Lösung berücksichtige man, daß ein Rhombus zwei gleiche Höhen hat. Da die eine gegeben, so giebt die Tangente aus einem der gegebenen Punkte an den um den andern mit dieser Höhe als Radius beschriebenen Kreis die Lage der dritten Seite. — Zwei Auflösungen!

Aufgabe 187. Auf einer von zwei Parallelen ist ein Punkt gegeben, ein anderer außerhalb derselben. Man soll ein Parallelogramm konstruieren, wovon zwei Gegenseiten auf den Parallelen liegen und eine Ecke in dem auf der einen Parallelen gegebenen Punkte; die Gegenseite dieser Ecke soll durch den andern Punkt gehen und das Parallelogramm einen gegebenen Umfang erhalten.

Lösung. Ist $ABCD$ das gesuchte Parallelogramm, und liegen AB und CD auf den Parallelen, A in dem gegebenen Punkte, und geht BC durch den andern Punkt P, und man verlängert AB um $BE = BC$, so ist AE der halbe Umfang, also E bekannt; ferner ist $\triangle BEC$ gleichschenklig, und daher die Höhe von E gleich der Höhe von C, also gegeben. Eine Tangente durch P an einen um E zu beschreibenden Kreis giebt dann den Punkt B; aber nur die eine.

Aufgabe 188. Das unter gleichen Bedingungen hinsichtlich seiner Lage zu konstruierende Parallelogramm soll eine gegebene Seitendifferenz haben.

. Lösung mittels der andern Tangente.

Aufgabe 189. Das Verhältnis der Seiten des zu konstruierenden Parallelogramms soll gegeben sein.

Lösung. Aus dem Seitenverhältnis ergiebt sich das Verhältnis der Höhen, von denen die eine bekannt ist. Ein Kreis um A und eine Tangente von B an diesen vollenden die Lösung.

Aufgabe 190. Einen Kreisbogen so zu teilen, daß die zu den Teilen gehörigen Sehnen ein gegebenes Verhältnis haben.

Lösung einfach.

Aufgabe 191. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Höhe, der zugehörigen Mittellinie und dem zugehörigen Winkelhalbierer. (Aus h_a, m_a und w_a.)

Lösung mittels des umgeschriebenen Kreises.

Aufgabe 192. Durch zwei Punkte einen Kreis zu beschreiben, der einen andern so schneidet, daß die gemeinsame Sehne Tangente eines zweiten gegebenen Kreises wird.

Lösung. Der Durchschnitt der gemeinschaftlichen Sehne mit der Verbindung der gegebenen Punkte ist das Potenzzentrum des einen gegebenen, des gesuchten und jedes dritten durch die gegebenen Punkte gehenden und den ersten Kreis berührenden Kreises. Dieser Durchschnittspunkt läßt sich also in einfachster Weise bestimmen. Die Tangente aus diesem Punkte an den andern gegebenen Kreis schneidet den ersten unter der gemeinschaftlichen Sehne, und ein Kreis durch die gegebenen Punkte und jene Durchschnittspunkte, was immer möglich ist, ist der gesuchte. — Zwei Kreise!

Aufgabe 193. Ein Dreieck, kongruent einem gegebenen, so zu konstruieren, daß zwei Seiten desselben durch gegebene Punkte gehen und die Halbierungslinie des eingeschlossenen Winkels Tangente eines gegebenen Kreises werde.

Lösung. Beschreibt man über der Verbindungslinie der Punkte B' und C', durch welche die Seiten AB und AC des gesuchten Dreiecks gehen sollen, als Sehne einen Kreis, der über $B'C'$ einen Peripheriewinkel gleich dem bekannten Winkel A faßt, so ist die Mitte des Bogens $B'C'$ (auf der anderen Seite) ein Punkt des Winkelhalbierers, welcher also, da er auch Tangente an einem gegebenen Kreise sein soll, seiner Lage nach bestimmt ist.

Aufgabe 194. In einen gegebenen Kreis ein Viereck zu beschreiben, das zugleich ein Tangentenviereck ist, wenn von demselben eine Diagonale und der Winkel der Diagonalen gegeben ist.

Lösung. Legt man die gegebene Diagonale AC in den Kreis, so kennt man, da die Richtung der andern Diagonale BD gegeben ist, die Mitten der zu BD gehörigen Bogen. Dadurch sind aber die Linien bekannt, welche die Winkel A und C des gesuchten Vierecks halbieren und einander in dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises schneiden. Die Verbindung dieses so gefundenen Mittelpunktes mit den Mitten der zu AC gehörigen Bogen giebt die Diagonale DB.

Aufgabe 195. Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus seinen Diagonalen, einem Winkel und dem Winkel, den die vom Scheitel des gegebenen Winkels ausgehende Diagonale mit einer Gegenseite macht.

Lösung. Durch die Diagonale DB und $\sphericalangle A$ ist der umgeschriebene Kreis gegeben; und man erhält durch den andern Winkel entweder BA oder DA, jedenfalls also den Punkt A.

Aufgabe 196. Ein Viereck zu konstruieren aus drei Seiten und den Winkeln an der vierten Seite.

Lösung durch Parallelverschiebung. Ist nämlich AD die vierte Seite, an welcher die bekannten Winkel A und D liegen, und man verschiebt AB in die parallele Lage DB', so ist das Dreieck $DB'C$ durch seine zwei Seiten DB' und DC und den eingeschlossenen Winkel CDB', der sich aus A und D ableiten läßt, gegeben. Aus der bekannten Richtung DA und der gegebenen Länge CB erhält man je einen Ort für B.

Aufgabe 197. Ein Viereck zu konstruieren aus seinen

Diagonalen, dem Winkel derselben und den Winkeln, welche eine Diagonale mit zwei Gegenseiten macht.

Lösung durch Parallelverschiebung. Sind die Winkel zwischen der Diagonale AC und den Gegenseiten BC und AD die gegebenen, so bringe man die andere Diagonale DB durch Parallelverschiebung in die Lage CB'. Alsdann ist $\triangle ACB'$ gegeben, da $\sphericalangle BCB'$ bestimmbar ist. Für B und D hat man ferner je einen Ort durch die Winkel, welche AC mit den Gegenseiten BC und AD bildet, zwischen welche man $DB \# CB'$ zu legen hat.

Aufgabe 198. Auf einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, so daß die von ihm an zwei Kreise gezogenen Tangentenpaare unter sich gleiche Winkel bilden.

Lösung durch O. 22, was man erkennt, wenn man den gesuchten Punkt mit den Mittelpunkten der beiden Kreise verbindet.

Aufgabe 199. In zwei Kreisen zwei parallele Radien so zu ziehen, daß dieselben von einem Punkte außerhalb der Kreise unter gleichen Winkeln erscheinen.

Lösung durch Umlegung. Sind die parallelen Radien AX und BY so gezogen, daß $\sphericalangle APX = \sphericalangle BPY$ ist, macht dann $PAA' = PB$ und legt Dreieck PAX so an B, daß $BC = PA$ und $\sphericalangle BCD = \sphericalangle APX$ wird, so hat man durch Y die Parallele YP' zu ziehen, damit der Schenkel des Winkels BCD durch Y gehe. Dann ist $\sphericalangle BP'Y = APX = BPY$ und also Y mittels des Kreises durch B, P und P' bestimmbar, da P' selbst leicht zu bestimmen ist.

Aufgabe 200. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem Winkelhalbierer und den beiden Differenzen zwischen den andern Seiten und den Abschnitten der von jenem geteilten Dreiecksseite.

Lösung. Ist AD der gegebene Winkelhalbierer, und man macht auf BC sowohl $BE = BA$, als auch $CF = CA$, so sind DE und DF die gegebenen Differenzen, und AE und AF die Grundlinien zweier gleichschenkligen Dreiecke. Hieraus folgt, daß der AEF umgeschriebene Kreis konzentrisch ist mit dem ABC eingeschriebenen Kreise. Den Durchmesser ADG jenes Kreises bestimmt man aus der Gleichung $DE \,.\, DF = AD \,.\, DG$, woraus man zunächst DG findet. Dann legt man in den so bestimmten

Kreis das Dreieck AEF, bestimmt den Radius des dem Dreiecke ABC eingeschriebenen Kreises (er ist das Lot vom Mittelpunkte des erstern Kreises auf EF), beschreibt diesen und vollendet ABC durch Tangenten an diesen.

Aufgabe 201. Ein Trapez zu konstruieren aus seinen Diagonalen, dem Winkel derselben und der Summe zweier aneinander stoßenden Seiten.

Lösung durch Parallelverschiebung der einen Diagonale in die Ecke, wo die beiden Seiten zusammenstoßen, deren Summe gegeben ist. Verschiebt man z. B. DB in die Lage CE, wenn $CD + CB$ bekannt, so ist $\triangle ACE$ gegeben. Macht man nun EBF gleich der gegebenen Summe, so ist $BF = BC$, also B leicht zu bestimmen, wenn man FC zieht.

Aufgabe 202. Dieselbe Aufgabe mit der Änderung, daß statt jener Summe die entsprechende Differenz gegeben sein soll.

Lösung in analoger Weise einfach; nur hat man die gegebene Differenz auf der EB in entgegengesetzter Richtung abzutragen.

Aufgabe 203. Zu zwei Punkten auf der Peripherie eines Kreises einen dritten so zu bestimmen, daß das Rechteck aus den Entfernungen desselben von den beiden ersten Punkten gleich sei dem Quadrate über der die beiden ersten Punkte verbindenden Sehne.

Lösung. Durch die Punkte A und B auf der Kreisperipherie ist der Winkel AXB gegeben. Durch diesen und das Produkt der einschließenden Seiten ist auch der Inhalt des Dreiecks ABX gegeben, so daß man, wenn man AB als Grundlinie dieses Dreiecks ansieht, die zugehörige Höhe finden kann.

Zusatz. Bezeichnet man den konstanten Winkel AXB durch α, die Höhe von X auf AB durch h, AB selbst durch a, so ist der Inhalt des Dreiecks $AXB = \frac{1}{2} AX \,.\, BX \,.\, \sin\alpha = \frac{1}{2} a^2 \,.\, \sin\alpha$ $= \frac{1}{2} a \,.\, h$, woraus sich ergiebt: $h = a \,.\, \sin\alpha$. Soll das Rechteck $AX \,.\, BX$ irgend einem gegebenen Quadrate, etwa m^2, gleich sein, so erhält man $m^2 \sin\alpha = ah$, woraus h als vierte Proportionale zu konstruieren ist. — Das Maximum jenes Rechteckes ist leicht zu bestimmen.

Aufgabe 204. Auf einer Kreisperipherie einen Punkt zu bestimmen, dessen Verbindung mit den Endpunkten zweier gegebenen Strecken gleiche Dreiecke bilden.

Lösung. Aus den gegebenen Strecken AB und CD läßt sich das Verhältnis der Höhen von dem gesuchten Punkte aus bestimmen, daraus ein Ort für diesen Punkt. — Auch wenn das Verhältnis der entstehenden Dreiecke ein gegebenes sein soll, etwa $m : n$, so läßt sich das Verhältnis dieser Höhen bestimmen. Man findet $h : h' = m . CD : n . AB$, wenn h und h' zu AB und CD gehören. Das Verhältnis $m . CD : n . AB$ läßt sich aber leicht in ein lineares Verhältnis $p : q$ umwandeln.

Aufgabe 205. Von einer Geraden aus an einen Kreis eine Sekante zu ziehen, welche auf der Geraden senkrecht steht und durch die Kreisperipherie halbiert wird.

Lösung mittels einer Tangente, welche zwischen der gegebenen Geraden und dem Kreise eine Länge hat, welche dem Diameter des Kreises gleich ist; der Berührungspunkt ist der diametrale Gegenpunkt des Endpunktes der Sekante.

Aufgabe 206 bis 208. Von dem einen Durchschnittspunkte zweier Kreise in jeden eine Sehne zu legen, so daß dieselben einen gegebenen Winkel mit einander bilden und

Aufgabe 206 eine gegebene Summe bilden.

Lösung mittels Drehung des einen Kreises in eine Lage, in welcher die beiden Sehnen eine Gerade bilden. Diese Drehung läßt sich in zweifacher Weise ausführen. — Haben die gegebenen Kreise die Mittelpunkte M und M', ist P der Durchschnittspunkt, von welchem aus die Sehnen PX und PY so gezogen sind, daß $\sphericalangle XPY = \alpha$ und $PX + PY = s$ ist, so verlängere man XP über P hinaus bis Y', so daß $PY' = PY$ ist, und mache $\triangle PY'C \cong PYM'$ und zwar so, daß C und M' an verschiedenen Seiten von XPY' liegen. Beschreibt man dann um C als Mittelpunkt mit $CP = CY'$ als Radius einen Kreis, so ist dies der Kreis M' in der neuen Lage, in welcher die gesuchten Sehnen eine einzige Gerade bilden. Der Mittelpunkt C ist aber leicht zu bestimmen, da sich in einfachster Weise ergiebt, daß $\sphericalangle M'PC = 2R - \alpha$ ist. In die Kreise M und C läßt sich aber leicht durch P die Gerade XPY' so legen, daß $XP + PY' = s$ wird. Dann hat man in den Kreis M' die Sehne PY nur so zu legen, daß $\sphericalangle XPY = \alpha$ wird. Es ist alsdann $PY = PY'$, also $XP + PY = s$. Oder man legt PY als PY'' auf PX und konstruiert $\triangle PC'Y'' \cong PYM'$ so, daß C' und M' an derselben Seite von PY'' liegen. Dann ist C' der Mittelpunkt des dem Kreise M' kongruenten Kreises, in welchen man von P aus eine Sehne zu legen hat, welche mit der in den Kreis M fallenden Sehne die gegebene Summe bildet. — Die erstere Umlegung ist vorzuziehen.

Aufgabe 207 eine gegebene Differenz bilden.

Lösung in ganz analoger Weise mittels der ersteren Umlegung des einen Kreises.

Aufgabe 208 einander gleich sind.

Lösung ebenfalls mittels derselben Umlegung.

Aufgabe 209. Durch einen Punkt innerhalb des kleineren zweier konzentrischen Kreise zwischen die beiden Peripherien eine Gerade zu legen, die in diesem Punkte halbiert wird.

Lösung mittels eines leicht zu konstruierenden Parallelogramms. — Zwei Lösungen!

Aufgabe 210. Durch einen der Durchschnittspunkte zweier Kreise in den einen eine Sehne zu legen, welche durch die Peripherie des andern nach einem gegebenen Verhältnis geteilt wird.

Lösung. Schneidet die Sehne PY im Kreise M' die Peripherie des Kreises M in X, und die durch Y zu MX gezogene Parallele die Verlängerung von PM in Z, so läßt sich mittels Proportionen sowohl der Punkt Z, als auch die Länge von ZY, und hierdurch der Punkt Y bestimmen.

Aufgabe 211. Auf der Verlängerung eines Diameters einen Punkt zu bestimmen, dessen Entfernung von einem gegebenen Punkte auf dem Durchmesser gleich ist der aus ihm an den Kreis gezogenen Tangente.

Lösung reduziert sich auf die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem man eine Kathete und den Überschuß der Hypotenuse über die andere Kathete kennt. Diese Konstruktion erreicht man am einfachsten, wenn man die bekannte Differenz dadurch darstellt, daß man die Hypotenuse auf die andere Kathete legt, so daß dieselbe als wirklicher Überschuß erscheint.

Zur Determination sei bemerkt, daß der gesuchte Punkt nur auf derselben Seite vom Mittelpunkte liegen kann, auf welcher der gegebene Punkt liegt.

Aufgabe 212. Von zwei Punkten außerhalb eines Kreises zwei Sekanten durch denselben Punkt der Peripherie zu ziehen, so daß die Sehne zwischen den Endpunkten derselben von gegebener Größe sei.

Lösung einfach mit Hilfe von O. 15, da der Peripheriewinkel über einer der Größe nach gegebenen Sehne eines Kreises gegeben ist.

Aufgabe 213. Durch zwei Punkte auf der Peripherie eines Kreises zwei Sehnen zu demselben dritten Punkte zu ziehen, so daß sie nötigenfalls verlängert ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Grundlinie auf einer gegebenen Geraden liegt.

Lösung einfach, wenn man durch einen der gegebenen Punkte eine Parallele zur gegebenen Geraden zieht.

Aufgabe 214. In einen Kreis eine Sehne von gegebener Größe so zu legen, daß sie durch eine andere Sehne halbiert wird.

Lösung leicht.

Aufgabe 215. Durch einen der Durchschnittspunkte zweier Kreise eine Gerade so zu legen, daß auf den entstehenden Sehnen gleiche Peripheriewinkel stehen.

Lösung mittels eines Lotes im gegebenen Durchschnittspunkt zur gesuchten Geraden, welches den Winkel zwischen den zu jenem Durchschnittspunkte gehörigen Durchmessern der beiden Kreise halbiert.

Aufgabe 216. Zu den parallelen Seiten eines Trapezes eine Parallele so zu legen, daß sie durch die Diagonalen desselben in drei gleiche Teile geteilt wird.

Lösung. Ist $XYZT \parallel AB$ und CD so gezogen, daß $XY = YZ = ZT$ ist, so ist stets, wenn nur $XT \parallel AB$ ist, $XY = ZT$, wie sich leicht beweisen läßt. Es kommt also darauf an, zwischen Seite AD und Diagonale BD die $XZ \parallel AB$ so zu legen, daß sie durch AC halbiert werde, daß also $XY = YZ$ werde. Ist nun E der Durchschnittspunkt der Diagonalen, so hat man wegen Ähnlichkeit der Dreiecke YZE und CDE zunächst die

Proportion: $YZ : DC = YE : EC$. Auch besteht die Proportion $XY : DC = AY : AC$. Soll nun $YZ = XY$ sein, so ergiebt sich $AY : YE = AC : CE$, d. h. Punkt Y ist vierter harmonischer Punkt zu A, E und C, und zwar konjugiert zu C.

Zusatz. Hierdurch ist auch die Aufgabe gelöst: Zwischen zwei Dreiecksseiten in gegebener Richtung eine Gerade zu legen, welche durch die dritte Seite halbiert wird. Auch ist die Lösung durch vorstehende gegeben, wenn statt der Gleichheit der Stücke XY und YZ ihr Verhältnis $m : n$ gegeben ist. Man erhält für diesen Fall $AY : YE = m \,.\, AC : n \,.\, EC$.

Aufgabe 217. Zwischen zwei Parallelen eine Gerade von gegebener Länge so zu legen, daß sie die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks wird, dessen Spitze ein zwischen den Parallelen gegebener Punkt ist.

Lösung mittels einer durch jenen Punkt zwischen die Parallelen gelegten Geraden, welche jene gegebene Größe hat, und eines auf dieser Geraden in jenem Punkte errichteten und bis zur Mittelparallele verlängerten Lotes.

Determination. Der Punkt muß außerhalb der Mittelparallele liegen. Derselbe darf auch außerhalb der Parallelen liegen.

Aufgabe 218. An einen Kreis eine zu einer gegebenen Geraden senkrechte Sekante so zu ziehen, daß dieselbe durch die Peripherie nach einem gegebenen Verhältnis (unter andern nach der sectio aurea) geteilt werde.

Lösung. Ist XYZ diese auf der gegebenen Geraden senkrechte Sekante, so läßt sich in jedem Falle der Durchschnitt des zu Z gehörigen Diameters mit der gegebenen Geraden aus dem gegebenen Verhältnis bestimmen.

Aufgabe 219. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade durch die Schenkel eines Winkels zu legen, daß die von den Schenkeln abgeschnittenen Stücke ein gegebenes Rechteck bilden.

Lösung durch Umlegung. Ist $\sphericalangle MAN$ der gegebene, P der gegebene Punkt, dessen Lage wir innerhalb des Winkels annehmen, und schneidet die Gerade XPY von den Schenkeln AM und AN die Stücke AX und AY ab, so daß $AX \,.\, AY = m \,.\, n$ ist, so ziehe man PC und PD parallel zu AN und AM bis in AM

und AN und außerdem $YE \parallel DX$ bis in AM. Dann sind C und D bekannte Punkte. Ferner ist $AD:AY = AX:AE$, woraus sich, da $AY.AX = m.n$ gegeben ist, der Punkt E bestimmen läßt. Nun ist $PC = AD$, also $AD:AY = PC:AY$ und $PC:AY = CX:AX$. Daher ist auch $CX:AX = AX:AE$ und dadurch ein Verhältnis auf eine bekannte Gerade umgelegt. Aus dieser Proportion erhält man aber
$AX - CX : AX = AE - AX : AE$, oder $AC : AX = EX : AE$, woraus man den Punkt X bestimmen kann, indem man AE in X so teilt, daß das Rechteck aus den beiden Stücken dieser Strecke einem bekannten Rechtecke ($AC.AE$) gleich wird. Das geschieht aber dadurch, daß man die mittlere Proportionale zwischen AC und AE in einen über AE als Diameter beschriebenen Halbkreis senkrecht auf dem Diameter einlegt. Der Fußpunkt derselben ist der Teilpunkt.

Zusatz. Liegt der Punkt P außerhalb des Winkels, so mache man die entsprechenden Konstruktionen und stelle die entsprechenden Proportionen auf, beachte aber bei der Ableitung der Schlußproportion die geänderte Lage der Punkte.

Aufgabe 220. Zwischen die Schenkel eines Winkels eine Gerade in gegebener Richtung so zu legen, daß die Entfernungen ihrer Endpunkte von einem gegebenen Punkte einander gleich sind. (Vergl. A. 217.)

Lösung. Man bestimme die Mitte der einzulegenden Geraden durch zwei Örter. Der eine Ort ist die von dem gegebenen Punkte auf die gegebene Richtung gefällte Senkrechte (diese Richtung kann als Gerade durch den Scheitel des Winkels gegeben sein). Der andere Ort ist die Verbindungslinie des Scheitels mit der Mitte einer beliebigen, aber in der gegebenen Richtung zwischen die Schenkel gelegten Geraden.

Aufgabe 221. Einen Punkt zu bestimmen, von welchem aus zwei gegebene Strecken unter gegebenen Winkeln erscheinen. (Pothenotsche Aufgabe.)

Lösung mittels O. 15.

Zusatz. Die Aufgabe wird unbestimmt, wenn die gegebenen Winkel sich zu $2R$ ergänzen.

Aufgabe 222. Einen Punkt zu bestimmen, von welchem aus zwei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln erscheinen.

Lösung durch Reduktion auf die vorhergehende Aufgabe.

Aufgabe 223. Einen Kreis zu konstruieren, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt, und dessen Peripherie gegebene Abstände von zwei gegebenen Geraden hat.

Lösung. Die Differenz der Abstände des Mittelpunktes des gesuchten Kreises von den beiden Geraden ist bekannt, und daraus läßt sich ein Ort für denselben ableiten. Dieser Ort ist nämlich die Halbierungslinie des Winkels, den die entferntere Gerade mit der andern macht, wenn man dieselbe um die gegebene Differenz parallel verschiebt.

Aufgabe 224. Einen Kreis zu beschreiben, der die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks berührt, durch den Scheitel des rechten Winkels geht, und dessen Mittelpunkt auf einer Kathete liegt.

Lösung sehr einfach.

Aufgabe 225. In einem Viereck einen Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungen von dem einen Paare Gegenseiten eine gegebene Summe bilden, während die Entfernungen desselben von dem andern Paare ein gegebenes Verhältnis haben.

Lösung leicht mit Hilfe zweier Örter, von denen der eine aus der gegebenen Summe, der andere aus dem gegebenen Verhältnis abgeleitet wird. Der der gegebenen Summe entsprechende Ort ist die Halbierungslinie des Winkels, den die um diese Summe parallel verschobene eine Gerade mit der andern macht. Der andere Ort, welcher dem gegebenen Verhältnis entspricht, ist die Verbindungslinie des Durchschnittes der betreffenden Geraden mit einem beliebigen Punkte, dessen Entfernungen das gegebene Verhältnis haben. Ein solcher Punkt ist aber in einfachster Weise zu bestimmen. (S. Nachtrag 12.)

Zusatz. Die Aufgabe ist in ähnlicher Weise zu lösen, wenn die beiden Paare Entfernungen zwei gegebene Summen, Differenzen oder Verhältnis, oder eine Kombination dieser Größen bilden sollen. Man stelle diese fünf Aufgaben auf und löse dieselben!

Aufgabe 226. Von einem Punkte aus durch zwei Dreiecksseiten eine Gerade zu legen, so daß die Durchschnittspunkte mit den Ecken an der dritten Seite die Ecken eines Sehnenvierecks bilden.

Lösung einfach.

Aufgabe 227. Auf einer Geraden einen Punkt zu bestimmen, der gleiche Entfernung von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Geraden hat.

Lösung durch einen Kreis, welcher durch den gegebenen Punkt und dessen Gegenpunkt in bezug auf die Gerade geht, in welcher der Mittelpunkt liegen soll, und die andere Gerade berührt; also Apollonisches Berührungsproblem.

Aufgabe 228. Durch zwei Kreise eine Gerade zu legen, so daß die entstehenden Sehnen gegebene Größen erhalten.

Lösung mittels einer gemeinschaftlichen Tangente an zwei leicht zu bestimmende, mit den gegebenen konzentrische Kreise.

Aufgabe 229. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu legen, welche durch den Durchschnittspunkt zweier Geraden geht, ohne daß man hierzu diese Geraden bis zu ihrem Durchschnitt verlängert.

Lösung. Zieht man durch die Geraden zwei beliebige Parallelen, die eine durch den gegebenen Punkt, und teilt die andere nach demselben Verhältnis, nach welchem die erstere durch den Punkt geteilt wird, so geht die Verbindungslinie beider Teilpunkte durch den Durchschnittspunkt der Geraden.

Aufgabe 230. In einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, wenn die Mittelpunkte der zu den Seiten gehörigen Bogen gegeben sind.

Lösung. Die Verbindungslinien der gegebenen Mitten mit dem Mittelpunkte des Kreises stehen auf den Seiten des gesuchten Dreiecks senkrecht. Daraus ergiebt sich aber, daß die Winkel, welche diese Verbindungslinien machen, die Supplemente der Winkel des gesuchten Dreiecks sind. Man kann also in einfachster Weise einen dieser Winkel und durch ihn die gegenüberliegende Dreiecksseite der Größe nach bestimmen und dieselbe entsprechend einlegen. Die dritte Ecke ist dann leicht zu bestimmen.

Eine elegante Lösung erhält man durch Anwendung der

Drehung. Dreht man nämlich etwa die Ecke A zuerst um γ, so daß der Punkt um ebenso viel jenseits γ liegt, wie jetzt diesseits, dann weiter um α und endlich um β (α, β und γ bezeichnen die Mitten der Bögen BC, CA und AB), so kehrt A in seine anfängliche Lage zurück. Macht man nun dieselbe Operation mit einem Punkte D der Peripherie zwischen A und β, so wird nach Vollendung derselben D in einen Punkt D' fallen, der an der andern Seite von A in gleicher Entfernung liegt, wie D. Man kann nun von einem beliebigen Punkte D ausgehn und die durch die Drehung erzielte Lage D' bestimmen; dann ist die Mitte des Bogens DD' die Ecke A, worauf die beiden andern Ecken B und C leicht zu bestimmen sind.

Aufgabe 231. Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu konstruieren, daß die Ecken auf die Verlängerungen dreier gegebenen Radien fallen.

Lösung. Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, XYZ das verlangte Dreieck und sind α, β und γ bezüglich die Winkel der gegebenen Radien und der Berührungsradien, so läßt sich die Differenz je zweier dieser Winkel bestimmen, und da ihre Summe bekannt ist, auch jeder Winkel einzeln. Dadurch erhält man aber zunächst einen Berührungspunkt, durch den das gesuchte Dreieck gegeben ist.

Aufgabe 232. Auf der Potenzlinie zweier Kreise einen Punkt zu bestimmen, so daß die zwei aus diesem Punkte durch zwei in den Peripherien gegebene Punkte gezogenen Sekanten die Kreise zum zweiten Male in Punkten schneiden, deren Verbindungslinie senkrecht zur Potenzlinie ist.

Lösung mittels Drehung. Ist nämlich X der gesuchte Punkt und sind XAC und XBD die gesuchten Sekanten, so drehe man den Kreis, auf welchem A liegt, um die Potenzlinie, dann fallen A und C auf bekannte Punkte A' und C'. Nun sind die Vierecke $ABDC$ und $C'A'BD$ Sehnenvierecke; denn auch $XA' . XC' = XB . XD$. Leicht ergiebt sich alsdann, daß $\sphericalangle XA'A = \sphericalangle XBA$ ist, woraus folgt, daß auch $XA'BA$ ein Kreisviereck ist, und also der Kreis durch A, A' und B den Punkt X bestimmt. — Zwei Lösungen!

Aufgabe 233. Auf einer Geraden außerhalb eines Kreises, auf welcher ein Punkt A gegeben ist, einen zweiten Punkt X so zu bestimmen, daß die Entfernungen desselben von der Kreisperipherie und dem gegebenen Punkte ein gegebenes Verhältnis haben.

Lösung. Schneidet die Verbindungslinie des gesuchten Punktes X mit dem Mittelpunkte M des gegebenen Kreises diesen in Y, und ist $XY : XA = m : n$, so ist auch, wenn die Parallele MB zu AY bis in die gegebene Gerade gezogen wird, $MY : AB = r : AB = m : n$. Daraus läßt sich AB und BM bestimmen. Die Parallele durch A zu BM bestimmt dann im allgemeinen zwei Punkte Y, deren jedem ein X auf der Geraden entspricht.

Zusatz. Ist die größte Entfernung des gesuchten Punktes von der Kreisperipherie (statt der oben gewählten kleinsten) gemeint, so ist die Lösung ganz analog. Das zu konstruierende AB fällt in dem Falle nach der andern Seite von A.

Aufgabe 234. Von zwei Punkten außerhalb eines Kreises zwei Sekanten, welche sich auf der Peripherie schneiden, so zu ziehen, daß die Sehne zwischen den beiden andern Durchschnittspunkten von gegebener Größe sei.

Lösung durch Örter. Durch die gegebene Größe der Sehne ist der zugehörige Peripheriewinkel, durch diesen aber ein Kreisbogen über der Verbindungslinie der gegebenen Punkte als Sehne als Ort für den gemeinsamen Durchschnitt beider Sekanten mit der Peripherie gegeben.

Aufgabe 235. Auf einer Sehne eine gegebene Strecke so abzutragen, daß die von den Endpunkten der Strecke aus gezogenen Diameter zwischen ihren Endpunkten eine Sehne enthalten, welche der gegebenen parallel ist.

Lösung. Die Mitte der Strecke ist der Fußpunkt des Lotes vom Mittelpunkte des Kreises auf die gegebene Sehne.

Aufgabe 236. Die entstehende Sehne soll von gegebener Größe sein.

Lösung. Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises und XY die auf der Geraden abgetragene Strecke, so kennt man von dem Dreiecke MXY die Grundlinie XY, die Höhe MC und durch die gegebene Größe der entstehenden Sehne auch den Winkel an der Spitze. Durch die Konstruktion dieses Dreiecks erhält man MX und MY, wodurch die Lage der Punkte X und Y auf der Geraden bestimmt wird. — Zwei verschiedene Lagen!

Aufgabe 237. Die gegebene Strecke auf der Sehne so abzutragen, daß die von den Endpunkten derselben auf einen gegebenen Durchmesser gefällten Lote gleiche Sehnen in dem Kreise bilden.

Lösung. Die Mitte der Strecke ist der Durchschnitt der gegebenen Geraden mit dem im Kreismittelpunkte zum gegebenen Diameter errichteten Lote.

Aufgabe 238 und 239. Die aus den Endpunkten der abgetragenen Strecke an den Kreis gezogenen Tangenten sollen einander gleich (oder parallel) werden.

Lösung für beide Aufgaben leicht. Dieselbe wird für die letztere vermittelt durch einen zur gegebenen Geraden parallel gezogenen und bis in die Tangenten verlängerten Diameter. — Die gegebene Strecke muß in diesem Falle mindestens gleich dem Diameter sein.

Aufgabe 240. Durch zwei gegebene Punkte auf einer Kreisperipherie zwei einander auf der Peripherie schneidende Sehnen so zu ziehen, daß sie ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Grundlinie auf einer gegebenen Geraden liegt.

Lösung. Zieht man durch den einen der gegebenen Punkte, etwa A, eine Parallele zur gegebenen Geraden bis in die andere Sehne, die in Y geschnitten werden möge, so läßt sich die Größe des Winkels AYB aus dem durch die Sehne AB gegebenen Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreieckes ableiten, wodurch man einen zweiten Ort für Y erhält.

Aufgabe 241. Durch die zu ziehenden zwei Sehnen soll auf der gegebenen Geraden eine gegebene Strecke abgeschnitten werden.

Lösung durch Parallelverschiebung und O. 15.

Aufgabe 242. Die zu ziehenden Sehnen sollen auf einem gegebenen Durchmesser vom Mittelpunkte aus gleiche Stücke abschneiden.

Lösung. Schneiden die Sehnen AX und BX auf dem Diameter CD die gleichen Stücke MY und MZ ab, und man zieht den Diameter AE, so ist $\sphericalangle EZB$ als Supplement des durch die Punkte A und B gegebenen Peripheriewinkels bekannt, daher ein Ort für Z nach O. 15 gegeben.

Aufgabe 243. Die Sehnen sollen in analoger Weise gleiche Stücke auf einer gegebenen Sehne abschneiden.

Lösung der vorigen ganz entsprechend, wenn man, statt den Diameter von A aus zu ziehen, A mit der Mitte der gegebenen Sehne verbindet und diese Verbindungslinie um sich selbst bis A' verlängert. Es ist dann wiederum $\sphericalangle A'ZB$ und durch diesen ein Ort für Z nach O. 15 gegeben.

Aufgabe 244. Zu zwei Sekanten PAB und PCD eine dritte PXY so zu ziehen, daß Bogen $AX = DY$ wird.

Lösung. Man erkennt leicht, daß die Sehne $XY = AD$ sein muß, da die zugehörigen Bogen gleich sind.

Aufgabe 245. In ein gleichschenkliges Dreieck drei Kreise so zu beschreiben, daß jeder zwei Seiten des Dreiecks und die beiden andern Kreise berührt.

Lösung. Die Mittelpunkte der die Grundlinie und je einen Schenkel berührenden Kreise sind die Durchschnitte der Halbierungslinien der Winkel an der Grundlinie einerseits und der Halbierungslinie der von der Höhe an der Grundlinie gebildeten rechten Winkel andererseits. Der dritte Kreis ergiebt sich dann leicht.

Zusatz. Für ein gleichseitiges Dreieck erledigt sich hiernach die Lösung in einfachster Weise. Die Kreise werden natürlich gleich, und ihre Mittelpunkte liegen in den drei Höhen so, daß ihr Abstand vom Fußpunkte gleich der halben Seite ist.

Anmerkung. Die entsprechende allgemeine Aufgabe: In ein beliebiges Dreieck drei Kreise zu beschreiben, welche sich gegenseitig und je zwei Seiten des Dreiecks berühren — das sogenannte Malfatti'sche Problem — ist in einfacher Weise nicht gelöst. Denn die von Steiner gegebene Lösung ist trotz ihrer Eleganz doch ziemlich kompliziert, und Malfatti's eigene Lösung ist trigonometrisch und durchaus nicht einfach. Wir dürfen deshalb auf die Lösung dieser allgemeinen Aufgabe hier verzichten.

Aufgabe 246. In einen gegebenen Kreis drei gleiche

Kreise so zu beschreiben, daß jeder die beiden andern und den gegebenen berührt.

Lösung. Die Berührungspunkte in dem gegebenen Kreise sind die Endpunkte dreier Radien, welche miteinander Winkel von 120^0 machen. Diese sind also zunächst zu bestimmen. Die Berührungspunkte der Kreise unter sich sind aber die Durchschnittspunkte der Halbierungslinien der Winkel, welche die ursprünglich gezogenen Radien mit den Verbindungslinien der Berührungspunkte im gegebenen Kreise bilden. Aus den so bestimmbaren Berührungspunkten ergeben sich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise sehr leicht.

Aufgabe 247. In ein Quadrat vier gleiche Kreise so zu beschreiben, daß jeder von ihnen zwei derselben und zwei Seiten des Quadrats berührt.

Lösung leicht. Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise sind die Mitten der halben Diagonalen des gegebenen Quadrates.

Aufgabe 248. In ein Quadrat fünf gleiche Kreise so zu beschreiben, daß einer die vier übrigen und jeder dieser vier noch zwei Seiten des Quadrates berührt.

Lösung. Der Durchschnitt O der Diagonalen ist offenbar der Mittelpunkt des einen Kreises, der die vier andern berührt. Die Mittelpunkte der andern vier Kreise liegen auf den Diagonalen. Ist nun X auf OA der Mittelpunkt eines der vier übrigen Kreise und Y dessen Berührungspunkt auf AB, so ist, wenn man OY zieht und bis in die verlängerte DA, bis in Z verlängert, wie sich leicht ergiebt, $AZ = \frac{1}{2} AO$. Hiernach sind also die Berührungspunkte in den Seiten, und daraus die Mittelpunkte der gesuchten Kreise leicht zu bestimmen.

Aufgabe 249. In ein reguläres Fünfeck fünf gleiche Kreise zu beschreiben, von denen jeder zwei der übrigen und zwei Seiten des Fünfecks berührt.

Lösung. Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen auf den großen Radien des Fünfecks und zugleich auf der Halbierungslinie des rechten Winkels, den das von einer Ecke des Fünfecks auf die Gegenseite gefällte Lot (oder auch der kleine Radius mit dieser Seite) bildet. Der Radius ergiebt sich dann leicht.

Aufgabe 250. In ein reguläres Fünfeck sechs gleiche

Kreise zu beschreiben, von denen einer die fünf übrigen und jeder von diesen noch zwei Seiten des Fünfecks berührt.

Lösung ähnlich wie in A. 248 durch Bestimmung der Berührungspunkte in den Seiten.

Aufgabe 251 und 252. In ein reguläres n-eck n gleiche Kreise, wie in A. 249, und $(n + 1)$ Kreise, wie in A. 250 zu beschreiben.

Lösung. Im erstern Falle ergeben sich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise, welche sämtlich auf den großen Radien des n-ecks liegen, durch Halbierung des rechten Winkels, den der kleine Radius mit der Seite des Polygons macht; im andern Falle werden die Berührungspunkte auf den Seiten durch ein ähnliches Verfahren bestimmt, wie bei A. 250 geschehen ist.

Aufgabe 253. Von zwei Punkten auf der Peripherie eines Kreises nach einem dritten Punkte zwei Sehnen so zu ziehen, daß zwischen den Durchschnitten ihrer Verlängerungen mit der Peripherie eines zweiten Kreises eine Sehne von gegebener Größe entsteht.

Lösung durch Parallelverschiebung. Schneiden die Sehnen AX und BX des Kreises M verlängert die Peripherie des Kreises O in Y und Z so, daß YZ die gegebene Größe s hat, und man verschiebt YA parallel mit sich bis in die Lage ZA', so liegt der Durchschnitt zwischen OA' und der Kreisperipherie O um den durch die Sehne s gegebenen Bogen vom Durchschnitte der Centrale OM mit derselben Peripherie entfernt. Es ist also die Lage von OA' gegeben, und da $AA' = s$ ist, auch Punkt A'. Verbindet man nun A' mit B, so ist $BZA' = X$, welcher Winkel durch die Punkte A und B gegeben ist. Der Punkt Z ist also bestimmbar.

Zusatz. Für die Determination ist zu berücksichtigen, daß die Größe der Sehne sich auf die Sehne zwischen den ersten, zweiten Durchschnitten, und je einem ersten und zweiten Durchschnitte beziehen kann.

Aufgabe 254. Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt und eine andere Gerade unter einer gegebenen Sehne schneidet.

Lösung mittels des Tangentensatzes, wenn die gegebenen Geraden konvergent sind; sind dieselben parallel, so sind die Endpunkte der abzuschneidenden Sehne unmittelbar gegeben.

Aufgabe 255. Einen Kreis zu beschreiben, der einen andern Kreis in einem gegebenen Punkte berührt und eine gegebene Gerade unter einer gegebenen Sehne schneidet.

Lösung mit Hilfe der gemeinsamen Tangente im gegebenen Berührungspunkte durch den Tangentensatz.

Aufgabe 256. Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei Punkte geht und eine Gerade unter einer gegebenen Sehne schneidet.

Lösung mit Hilfe des Sekantensatzes, wenn die Verbindungslinie der Punkte der gegebenen Geraden nicht parallel ist; im andern Falle wie in A. 254.

Aufgabe 257. Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht, eine gebene Gerade unter gegebener Sehne schneidet, und dessen Mittelpunkt auf einer andern gegebenen Geraden liegt.

Lösung durch Reduktion auf A. 255, da sich leicht ein zweiter Punkt der Peripherie des gesuchten Kreises bestimmen läßt.

Aufgabe 258. Um einen Punkt einen Kreis zu beschreiben, so daß die von zwei andern Punkten an denselben gezogenen Tangenten einen gegebenen Winkel bilden.

Lösung mittels O. 15.

Aufgabe 259. Um ein Parallelogramm ein Rechteck so zu beschreiben, daß zwei durch zwei Gegenecken des Parallelogramms gehende Seiten desselben in diesen Punkten halbiert werden.

Lösung leicht.

Aufgabe 260. Von dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten aus an den Kreis eine Sekante so zu ziehen, daß die Bogen zwischen den Berührungspunkten und den Durchschnitten der Sekante mit dem Kreise gleich werden.

Lösung. Es ergiebt sich leicht, daß das innere Stück der Sekante der Berührungssehne gleich sein muß.

Aufgabe 261. Von dem Durchschnittspunkte zweier

Sekanten aus eine dritte so zu ziehen, daß die Bogen zwischen einem Durchschnitte dieser dritten Sekante mit der Peripherie und einem Durchschnitte der erstern Sekanten einander gleich werden.

Lösung. Es läßt sich das innere Stück der dritten Sekante ähnlich wie bei A. 260 bestimmen.

Aufgabe 262. Zu einer Sekante eine zweite von demselben Punkte aus so zu ziehen, daß die Bogen zwischen den Durchschnitten beider mit dem Kreise eine gegebene Summe bilden.

Lösung durch Reduktion. Ist PAB die gegebene, PXY die gesuchte Sekante, so daß $AX + BY$ eine gegebene Größe ist, so mache man Bogen $YC = AX$, also BC gleich der gegebenen Summe, und löse für die Sekanten PB und PC die A. 261.

Aufgabe 263. In einen Kreisabschnitt ein Viereck zu beschreiben, dessen eine Seite die Sehne des Abschnittes ist, wenn noch in der verlängerten Sehne der Durchschnittspunkt mit der Gegenseite und der Winkel der Diagonalen gegeben ist.

Lösung. Aus dem Winkel der Diagonalen und dem durch die Sehne gegebenen Peripheriewinkel ist der Peripheriewinkel über der Gegenseite, also auch diese selbst bestimmbar.

Aufgabe 264. Die A. 262 mit der Abänderung, daß statt der Summe die Differenz der entstehenden Bogen eine gegebene sein soll.

Lösung durch Parallelverschiebung und Berücksichtigung, daß zwischen zwei parallelen Sehnen gleiche Bogen liegen.

Aufgabe 265. Aus vier gegebenen Strecken als Seiten ein Viereck so zu konstruieren, daß eine Diagonale einen Winkel halbiert.

Lösung leicht durch einfache Umlegung einer der Seiten, welche den halbierten Winkel einschließen, auf die andere.

Aufgabe 266. Zwei Dreiecksseiten so zu durchschneiden, daß ein doppelt zentrisches Viereck (Sehnen- und Tangentenviereck zugleich) abgeschnitten wird.

Lösung. Die Richtung der an den eingeschriebenen Kreis zu ziehenden Tangente ist gegeben.

Anmerkung. Auch die Verlängerungen zweier Dreiecksseiten über die dritte kann man zu gleichem Zwecke durchschneiden.

Aufgabe 267. Zu drei Punkten auf der Peripherie eines Kreises einen vierten so zu bestimmen, daß ein Tangentenviereck entsteht.

Lösung reduziert sich auf die Konstruktion eines Dreiecks aus Grundlinie, Gegenwinkel und Differenz der beiden anderen Seiten.

Aufgabe 268. Zu drei Tangenten an einem Kreise eine vierte so zu konstruieren, daß ein Sehnenviereck entsteht.

Lösung wie zu A. 266.

Aufgabe 269. In einen Kreis ein rechtwinkliges Dreieck so zu beschreiben, daß die Katheten jede durch einen gegebenen Punkt gehen.

Lösung durch O. 6.

Aufgabe 270. Ein Dreieck aus einer Höhe und der zugehörigen Mittellinie so zu konstruieren, daß die zugehörige Seite doppelt so groß wird, wie eine der anderen Seiten. (Aus h_a, m_a und $a = 2b$.)

Lösung einfach.

Aufgabe 271. Um ein Quadrat ein anderes zu beschreiben, dessen Seite gegeben ist.

Lösung durch die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Hypotenuse und der Summe der Katheten.

Aufgabe 272. Einen Kreis zu konstruieren, so daß zu zwei Sehnen von gegebener Größe Bogen gehören, von denen der eine doppelt so groß ist, als der andere.

Lösung. Wenn man sich die gegebenen Sehnen von einem Punkte aus eingelegt denkt, so lassen sich die Endpunkte derselben bestimmen. Ein Kreis um das so erhaltene Dreieck ist der gesuchte.

Aufgabe 273. Auf einer Geraden zwei Punkte in gleicher Entfernung von einem gegebenen Punkte so zu bestimmen, daß ihre Entfernung in einem andern gegebenen Punkte unter gegebenem Winkel erscheint.

Lösung sehr leicht mittels O. 15.

Aufgabe 274. Ein Dreieck zu konstruieren aus einem

Winkel, der Differenz der einschließenden Seiten und der Differenz der Abschnitte, in welche die gegenüber liegende Seite durch die betreffende Höhe geteilt wird.

Lösung. Trägt man von A aus auf AB und AC die gegebenen Differenzen als AD und AE ab, so läßt sich aus der Gleichheit von BD, BE und BC die Größe des Winkels AED bestimmen. Derselbe ist gleich $2R - \frac{1}{2}B$, wenn B der gegebene Winkel ist.

Aufgabe 275. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Gegenwinkel und der Summe aus einer der beiden andern Seiten und einem Vielfachen der dritten Seite. (Aus a, A und $b + n \,.\, c$.)

Lösung. Verlängert man Seite b über A hinaus um $n \,.\, c$ bis D, so ist Dreieck BAD seiner Form nach gegeben. Dann legt man von C aus die gegebene Seite a mit dem andern Endpunkte auf DB und kann das verlangte Dreieck durch eine Parallele erhalten.

Aufgabe 276. Ein Sehnenviereck zu konstruieren aus zwei gegenüber liegenden Seiten und den beiden Diagonalen.

Lösung. Ist $ABCD$ das verlangte Sehnenviereck, von welchem die Gegenseiten $BC (= b)$ und $DA (= d)$, sowie die Diagonalen $AC = e$ und $BD = f$ gegeben sind, und man zieht $BF \parallel CD$ bis in DA, so läßt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BDF und ABC die Länge DF, sowie das Verhältnis $BA : BF$ $(= e : f)$ bestimmen. Der Punkt B ist dann durch zwei Örter zu konstruieren und auch die vierte Ecke C leicht zu bestimmen.

Aufgabe 277. Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem die Durchschnittspunkte seiner Höhen mit der Peripherie des umgeschriebenen Kreises gegeben sind.

Lösung. Die Lote aus dem Mittelpunkte des Kreises auf die Verbindungslinien der Durchschnittspunkte geben die Ecken des gesuchten Dreiecks.

Aufgabe 278. In einem Kreise einen Diameter so zu ziehen, daß das Lot auf denselben von einem Punkte außerhalb des Kreises die mittlere Proportionale zwischen seinen Abständen werde.

Lösung. Ist M der Kreismittelpunkt, PX das Lot auf dem

Diameter AMB und XY Tangente des Kreises, so ergiebt sich $PX^2 = XY^2 = MP^2 - MX^2 = MX^2 - r^2$ und daraus $2MX^2 = MP^2 + r^2$, woraus sich MX der Größe und Lage nach ergiebt.

Aufgabe 279. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, einem anliegenden Winkel und der Differenz zwischen der Gegenseite dieses Winkels und der Höhe auf die erste Seite. (Aus a, B und $b - h_a$.)

Lösung. Verlängert man die Höhe h_a über a hinaus, so daß $AE = AC$ wird, so ist die dritte Ecke A des gesuchten Dreiecks der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch C geht und die Parallele, welche durch E zu a gezogen wird, berührt.

Aufgabe 280. In einen Kreis ein Dreieck zu konstruieren, von dem eine Seite der Größe und Richtung nach gegeben ist, wenn die Halbierungslinie des Gegenwinkels durch einen gegebenen Punkt gehen soll.

Lösung ergiebt sich leicht, da die Mitte des Bogens BC ein zweiter Punkt des Winkelhalbierers ist.

Aufgabe 281. Zur Konstruktion eines Dreiecks sei die Richtung einer Seite, die Halbierungslinie des gegenüber liegenden Winkels und ein Punkt dieser gegeben.

Lösung durch die Ähnlichkeitsmethode, da eine beliebige Sehne des Kreises von der gegebenen Richtung der Seite a die Mitte des zugehörigen Bogens bestimmt.

Aufgabe 282. Zwischen zwei Dreiecksseiten eine gegebene Strecke so einzulegen, daß die Abschnitte dieser an der dritten Seite ein gegebenes Verhältnis haben.

Lösung. Ist XY diese Strecke zwischen AB und BC und $AX : CY = m : n$, so nehme man CD beliebig und die Parallele DE zu AB so, daß $DE : DC = m : n$ ist, und bestimme in CE den Punkt Y' mittels eines Kreises um A, dessen Radius die gegebene Strecke ist. Dann giebt die Parallele durch Y' zu DE den Punkt Y.

Aufgabe 283. Ein Dreieck zu konstruieren, wovon eine Ecke, der Höhendurchschnitt und der Punkt gegeben ist, in welchem der zu jener Ecke gehörige Radius des umgeschriebenen Kreises die Gegenseite trifft. (Gegeben Ecken A, H und D_a.)

Lösung. Unmittelbar gegeben sind die Dreiecke AHD_a und AH_aD_a (H_a ist der Fußpunkt der Höhe aus A). Da nun der obere Höhenabschnitt doppelt so groß ist, wie die Mittelsenkrechte auf der Gegenseite, so läßt sich der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, dieser selbst und durch diesen die Eckpunkte B und C leicht bestimmen.

Aufgabe 284. Statt D_a in der vorigen Aufgabe soll D_b gegeben sein. (Dreieck aus A, H und D_b.)

Lösung. Unmittelbar gegeben ist $\triangle AHD_b$. Beschreibt man um ABC den Kreis und verlängert BD_b bis in E in die Peripherie desselben, so ist $\sphericalangle ABE = ACE = HAD_b$ Daraus ergiebt sich für B ein Ort, der andere ist das Lot von H auf AD_b.

Aufgabe 285. In ein Dreieck ein einem anderen ähnliches so zu beschreiben, daß eine Ecke desselben in einen gegebenen Punkt einer Seite fällt.

Lösung. Ist DXY das verlangte Dreieck und D die gegebene Ecke in BC, und man beschreibt um dasselbe den Kreis, so entstehen am Durchschnitt E desselben mit der Verbindungslinie DA die Winkel XED und YED, welche bekannten Winkeln gleich sind. Wenn man daher in einem beliebigen Punkte E' jener Verbindungslinie diese Winkel durch $E'X'$ und $E'Y'$ anlegt, so wird $X'Y'$ der gesuchten XY parallel, daher ist die Aufgabe auf A. 125 reduziert, welche man auch so lösen kann: Um das beliebige Dreieck $E'X'Y'$ beschreibe man einen Kreis. Dieser schneide DA in D', dann sind DX und DY Parallelen zu $D'X'$ und $D'Y'$.

Aufgabe 286. In ein Parallelogramm einen Rhombus zu beschreiben, dessen Diagonalen ein gegebenes Verhältnis haben.

Lösung auf die vorige Aufgabe zurückzuführen, da das Parallelogramm und der einzuschreibende Rhombus denselben Diagonalendurchschnitt haben.

Aufgabe 287. In ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, dessen Seiten zu den Seiten des ersten senkrecht stehen.

Lösung wie zu A. 285, wovon diese Aufgabe ein spezieller Fall.

Aufgabe 288. Durch zwei Punkte bis an zwei einander schneidende Gerade zwei Gerade so zu legen, daß die Stücke bis an die Geraden ein gegebenes Verhältnis haben und die Geraden einen gegebenen Winkel miteinander bilden.

Lösung. Sind AX und BY durch A und B bis an die Geraden MC und NC so gelegt, daß $AX : BY = m : n$ ist und daß sie den gegebenen Winkel φ einschließen, so verschiebe man XA und YB parallel mit sich nach CA' und CB', wodurch die Aufgabe auf A. 275 reduziert wird, da $\sphericalangle A'CB' = \varphi$ wird.

Aufgabe 289 und 290. In ein Kreissegment ein gleichschenkliges Dreieck so einzuzeichnen, daß die Spitze desselben im Mittelpunkte der zugehörigen Sehne liege und die Grundlinie und Höhe desselben eine gegebene Summe (oder Differenz) bilden.

Lösung. Verlängert man im erstern Falle die Höhe CF des gesuchten Dreiecks um die Grundlinie, so läßt sich der Durchschnitt der Verbindungslinie des Endpunktes der Verlängerung mit einem Endpunkte der Grundlinie und der Sehne einfach bestimmen. — Im andern Falle lege man die Grundlinie auf die Höhe und verfahre ebenso.

Aufgabe 291. Von einem Dreiecke sei die Seite $AB = c$ der Größe und Lage nach gegeben, ferner der Winkel A und der Durchschnitt D der Seite AB mit dem zu C gehörigen Durchmesser des umgeschriebenen Kreises; dasselbe zu konstruieren.

Lösung. Ist M der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, so erkennt man leicht, daß $\sphericalangle BMD$ ein gegebener ist. Der Mittelpunkt ist also durch zwei Örter gegeben.

Aufgabe 292. Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite (a) und dem gegenüber liegenden Winkel (A), wenn die Stücke bekannt sind, in welche eine Transversale AD den Winkel A und die Seite a teilt.

Lösung. Durch den bekannten umgeschriebenen Kreis kann man mit Hilfe der gegebenen Winkelstücke in einfachster Weise außer D einen zweiten Punkt der Transversale bestimmen.

§ 28. Schließlich möge noch das renommierte Berührungsproblem des Apollonius hier eine Stelle finden, damit wir dem sonst berechtigten Vorwurfe entgehen, eine fühlbare Lücke gelassen zu haben. Nach dem Berichte des Pappus hatte Apollonius in zwei verloren gegangenen Büchern περὶ ἐπαφῶν sein Problem behandelt: Wenn von Punkten, Geraden und Kreisen irgend drei der Lage nach gegeben sind, einen Kreis zu beschreiben, welcher durch die gegebenen Punkte geht und die gegebenen Geraden und Kreise berührt.*)

In diesem Berichte vereinfacht Pappus das Problem des Apollonius gleichsam als Vorbereitung auf dasselbe dahin, daß er statt dreier Elemente nur zwei als gegeben annimmt und einen Kreis zu konstruieren verlangt, dessen Radius gegeben ist. Dies so modifizierte Problem des Pappus umfaßt sechs Aufgaben, nämlich:

Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher

Aufgabe 293. Durch zwei gegebene Punkte geht,

Aufgabe 294. Durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Gerade berührt,

Aufgabe 295. Durch einen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt,

Aufgabe 296. Zwei Gerade berührt,

Aufgabe 297. Eine Gerade und einen Kreis berührt,

Aufgabe 298. Zwei gegebene Kreise berührt.

Die Lösung dieser sechs Aufgaben läßt sich durch alleinige Anwendung einfach zu bestimmender Örter bewirken.

Zum Übergang zum eigentlichen Berührungsproblem des Apollonius ist indes noch eine andere Modifikation desselben sehr zweckmäßig, nämlich die Lösung der Aufgabe:

Gegeben sind drei obiger Elemente, und zwar stets darunter ein Punkt auf einer Geraden oder auf der Peripherie eines Kreises; einen Kreis zu konstruieren, welcher die gegebene Gerade oder den

---

*) Eine Wiederherstellung der verlorenen Schrift des Apollonius hat bekanntlich Franciscus Vieta durch die im Jahre 1600 herausgegebene Schrift versucht: Apollonius Gallus, seu exsuscitati Apollonii Pergaei περὶ ἐπαφῶν geometria.

gegebenen Kreis in dem auf diesem Elemente gegebenen Punkte berührt.

Wiederum ergeben sich sechs Aufgaben, nämlich:

Einen Kreis zu beschreiben, dessen Berührung mit der Geraden oder dem Kreise in dem gegebenen Punkte stattfindet, wenn gegeben sind

Aufgabe 299. Ein Punkt und eine Gerade mit einem Punkte auf ihr,

Aufgabe 300. Ein Punkt und ein Kreis mit einem Punkte in seiner Peripherie,

Aufgabe 301. Zwei Gerade und ein Punkt auf einer derselben,

Aufgabe 302. Eine Gerade und ein Kreis mit einem Punkte auf der Geraden,

Aufgabe 303. Ein Kreis und eine Gerade mit einem Punkte auf der Peripherie des Kreises,

Aufgabe 304. Zwei Kreise und ein Punkt auf dem Umfange des einen Kreises.

Die Lösung auch dieser sechs Aufgaben ist einfach. A. 299 wird nämlich gelöst durch O. 3 und 8; A. 300 durch O. 3 und 10; A. 301 durch O. 5 und 8; A. 302 und 303 finden ihre Erledigung durch einfache Bestimmung des jedesmaligen anderen Berührungspunktes; denn wenn ein Kreis eine Gerade und einen anderen Kreis berührt, so liegen die Berührungspunkte in einer Geraden mit dem einen Endpunkte des auf der Geraden senkrechten Diameters des berührten Kreises. Auch bei A. 304 läßt sich der Berührungspunkt auf dem andern Kreise bestimmen, da beide mit einem Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise in einer Geraden liegen. Einen anderen Weg der Lösung erhält man, wenn man diese Aufgaben als spezielle Fälle des eigentlichen Berührungsproblems ansieht, das nun folgen soll.

Da drei Elemente sich mit Wiederholung zu drei auf $\frac{3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3} = 10$ Arten kombinieren lassen, so enthält die Apollonische Berührungsaufgabe zehn Aufgaben, nämlich

Einen Kreis zu beschreiben, welcher

Aufgabe 305. Durch drei gegebene Punkte geht,

Aufgabe 306. Durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt,

Aufgabe 307. Durch zwei Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt,

Aufgabe 308. Durch einen Punkt geht und zwei Gerade berührt,

Aufgabe 309. Durch einen Punkt geht und eine Gerade und einen Kreis berührt,

Aufgabe 310. Durch einen Punkt geht und zwei Kreise berührt,

Aufgabe 311. Drei Gerade berührt,

Aufgabe 312. Zwei Gerade und einen Kreis berührt,

Aufgabe 313. Eine Gerade und zwei Kreise berührt,

Aufgabe 314. Drei Kreise berührt.

Die Aufgaben 305 und 311 dürfen wir, da sie als im planimetrischen Systeme unerläßliche Elementaraufgaben vorausgesetzt werden, hier übergehen. Die Lösungen der übrigen wollen wir kurz andeuten.

Zu Aufgabe 306.

Schneidet die Verbindungslinie der gegebenen Punkte B und A die gegebene Gerade in C, so kann man in der Geraden den Berührungspunkt auf Grund des Tangentensatzes bestimmen. Zwei Lösungen!

Ist die Verbindungslinie der Punkte parallel zur gegebenen Geraden, so läßt sich der Berührungspunkt leichter bestimmen. Eine Lösung!

Zu Aufgabe 307.

Die gemeinschaftliche Tangente und die Verbindungslinie der gegebenen Punkte schneiden einander im Potenzzentrum, welches man durch einen beliebigen Kreis durch die gegebenen Punkte einfach bestimmen kann. Die Tangenten aus denselben an den gegebenen Kreis bestimmen die Berührungspunkte. Zwei Lösungen!

Zu Aufgabe 308.

Lösung auf A. 307 zu reduzieren, da der gesuchte Kreis auch durch den Gegenpunkt des gegebenen Punktes in Bezug auf die den Winkel der beiden Geraden halbierenden Gerade gehen muß. Sind die gegebenen Geraden parallel, so ist die Lösung einfacher.

Zu Aufgabe 309.

Lösung ähnlich wie zu A. 302 oder 303.

Zu Aufgabe 310.

Lösung mittels eines konzentrischen Kreises auf A. 307 zu reduzieren.

Zu Aufgabe 312.

Lösung mittels eines konzentrischen Kreises auf A. 308 zu reduzieren.

Zu Aufgabe 313.

Lösung durch einen konzentrischen Kreis auf A. 309 zu reduzieren.

Zu Aufgabe 314.

Lösung durch einen konzentrischen Kreis auf A. 310 zu reduzieren.

V. Nachtrag.

§ 29. Damit der strengen Wissenschaftlichkeit genügt werde, mögen hier noch einige Aufgaben Behandlung finden, auf welche wir im Vorhergehenden wiederholt Lösungen reduziert haben, die man aber trotz der Einfachheit ihrer Lösung nicht zu den Elementaraufgaben des Systems zu rechnen pflegt. Wegen ihrer Bedeutung für die Reduktion infolge ihrer häufigen Anwendbarkeit werden wir dieselben ausführlich behandeln, zumal dieselben als frühestes Übungsmaterial bestens empfohlen werden können.

1. Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine Gerade so zwischen die Schenkel zu legen, daß sie in jenem Punkte halbiert wird.

Lösung. Ist die Gerade XY zwischen den Schenkeln AB und AC des Winkels BAC in P halbiert, und man legt etwa durch X eine Parallele zu AC, dann wird jede durch P zwischen den Schenkel AC und die Parallele gelegte Gerade EPD in P halbiert. Es läßt sich also mittels einer beliebigen PD, die man über P bis E um sich selbst verlängert, und durch die Parallele durch E zu AC der Punkt X bestimmen. (Meist findet man bei der Lösungsangabe dieser Aufgabe als die willkürliche Gerade die Verbindung des Punktes P mit dem Scheitel des Winkels. Der Vorteil dieser Geraden besteht dann darin, daß die Parallele durch den Endpunkt ihrer Verlängerung zu jedem der beiden Schenkel gezogen werden kann.)

Zieht man durch P eine Parallele zu AC bis in AB, so wird AX halbiert, woraus sich eine andere Art ergiebt, den Punkt X zu bestimmen.

Zusatz. Sollen die Stücke XP und PY das Verhältnis $m:n$ haben, so ergiebt die Betrachtung der entsprechenden Dreiecke, welche in diesem Falle ähnlich sind, ebenso einfache Lösungen. — Für die Determination ist zu beachten, daß die Lösung der Aufgaben für zwei parallele Gerade im allgemeinen unmöglich ist; denn das Verhältnis der Stücke einer jeden zwischengelegten Geraden ist konstant. — Die Lösung bleibt für beide Fälle analog und einfach, wenn der gegebene Punkt außerhalb des Winkels liegt, und die zu ziehende Gerade durch den einen Schenkel halbiert oder nach einem gegebenen Verhältnis geteilt werden soll.

2. Zwischen zwei Kreisperipherien eine Gerade zu legen, welche in einem gegebenen Punkte halbiert (oder nach einem gegebenen Verhältnisse geteilt) wird.

Lösung. Ist XY die gesuchte Gerade, welche so zwischen den Peripherien der Kreise M und M_1 liegt, daß $XP = PY$ ist, so verlängere man MP über P bis N um sich selbst. Die Betrachtung des Parallelogramms $XMYN$ giebt leicht die Analysis für den erstern Fall. Im zweiten Falle erhält man leicht zwei ähnliche Dreiecke MXP und NYP, welche ebenfalls eine einfache Analysis ergeben.

Zusatz. Statt des einen der beiden Kreise kann auch eine Gerade gegeben sein, was die Lösung nur unwesentlich modifiziert. — Behufs der Determination beachte man den doppelten Durchschnitt einer Geraden mit einer Kreisperipherie!

3. Durch einen Punkt innerhalb eines Kreises eine Sehne zu legen, welche in diesem Punkte halbiert wird.

Lösung leicht, wenn man berücksichtigt, daß die Verbindungslinie des Mittelpunktes einer Sehne mit dem Kreismittelpunkte auf der Sehne senkrecht steht.

4. Auf einer Geraden (oder einer Kreisperipherie) einen Punkt zu bestimmen, von welchem aus die Tangente an einen gegebenen Kreis von gegebener Länge sei.

Lösung. Die Entfernung des gesuchten Punktes vom Mittelpunkte des berührten Kreises läßt sich als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmen, dessen Katheten gegeben sind. — Ist im erstern Falle die Entfernung des Mittelpunktes M von der gegebenen Geraden $= a$, so muß die gegebene Länge der Tangente mindestens $\sqrt{a^2 - r^2}$ sein; eine obere Grenze giebt es nicht. Wird aber der Punkt auf der Peripherie eines Kreises mit dem Radius r' gesucht, und ist die Centrale beider Kreise $c = r + r' + d$, so muß t mindestens $= \sqrt{(r + d)^2 - r^2} = \sqrt{(c - r')^2 - r^2}$ sein und darf die Größe $\sqrt{(c + r')^2 - r^2}$ nicht überschreiten.

5. In einen gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Größe so zu legen, daß sie zu einer gegebenen Geraden parallel ist (oder auf ihr senkrecht steht).

Lösung einfach, da sich in beiden Fällen ein konzentrischer Kreis bestimmen läßt, an welchem die gesuchte Sehne Tangente sein muß, und sich in jedem Falle leicht der Berührungspunkt angeben läßt.

6. Von einer Geraden aus an einen Kreis eine Sekante zu ziehen, welche in der Peripherie halbiert wird.

Lösung. Eine solche Sekante ist von jedem Punkte der Sekante zwischen den Punkten A und B, deren Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises dessen dreifachem Radius gleich ist, möglich und in einfachster Weise zu konstruiren; auch von jenen Punkten selbst aus.

Zusatz. Soll die Kreisperipherie die Sekante nach dem Verhältnisse $m : n$ teilen, so ist die Lösung analog. Wenn das Stück zwischen der Geraden und dem Kreise kleiner werden soll, als die entstehende Sehne, so liegen die Punkte der Geraden, von denen aus die geforderte Sekante möglich ist, innerhalb der oben angegebenen Grenzen, im umgekehrten Falle rücken diese Grenzen weiter hinaus.

7. Die Sekante soll von der Peripherie eines zweiten Kreises aus gezogen werden.

Lösung. Die Grenzen, innerhalb welcher die Punkte auf der Peripherie des zweiten Kreises liegen müssen, daß die verlangte Sekante möglich sei, kann man, wie vorhin, in einfacher Weise festsetzen. — Für den Fall eines gegebenen Verhältnisses ist ein ähnlicher Zusatz zu machen, wie vorhin.

8. Zwischen zwei Kreisperipherien eine Gerade von gegebener Länge parallel der Centrale einzulegen.

Lösung mittels eines konstruierbaren Parallelogramms, wenn man die gegebene Länge von einem Mittelpunkte aus auf der Centrale abträgt. — Man berücksichtige die vier verschiedenen Lagen der Geraden, welche diese infolge des doppelten Durchschnittes mit jedem Kreise haben kann; für jede Lage ist die gegebene Länge in der angegebenen Weise abzutragen.

Zur Determination sei bemerkt, daß das absolute Minimum der gegebenen Länge d, das absolute Maximum $c + r + r'$ beträgt, wenn wir, wie in 4, bezeichnen.

9. Die gegebene Länge soll parallel einer andern gegebenen Geraden eingelegt werden.

Lösung wird in ähnlicher Weise wie bei 8 erhalten, wenn man die gegebene Gerade parallel mit sich in den einen Mittelpunkt verschiebt. Auch hier sind die vier verschiedenen Lagen zu berücksichtigen.

Die Determination hängt von dem Winkel ab, den die gegebene Gerade mit der Centrale der beiden Kreise macht. Derselbe darf überhaupt nicht größer sein, als der Winkel zwischen der Centrale und der gemeinschaftlichen innern Tangente. (Vergl. Determination zu A. 81.)

10. Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß die Teile sich wie zwei Quadrate ($m^2 : n^2$) verhalten.

Lösung. Macht man aus m und n als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck ABC, so wird die Hypotenuse desselben BC durch das Lot AD so geteilt, daß $BD : CD = m^2 : n^2$ ist. Das Weitere ist nach der Ähnlichkeitsmethode leicht auszuführen, indem man die gegebene Strecke parallel zu BC als Hypotenuse einlegt und AD bis in diese verlängert.

11. Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß die Quadrate der Stücke sich wie zwei Gerade ($m : n$) verhalten.

Lösung. Ist a die zu teilende Strecke und x der eine Teil, so daß $x^2 \cdot (a - x)^2 = m : n$, so setze man $x^2 : (a - x)^2 = m^2 : mn$, oder wenn $mn = p^2$ ist, $x : a - x = m : p$, woraus man erhält $x : a = m : m + p$, was leicht zu konstruieren ist.

Oder man konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Kathetenprojektionen sich wie $m : n$ verhalten, und teile alsdann die gegebene Strecke nach dem Verhältnis der Katheten dieses Dreiecks. — Der Anschaulichkeit wegen dürfte diese zweite Lösung vorzuziehen sein.

12. Den geometrischen Ort für die Punkte zu bestimmen, deren Entfernungen von zwei gegebenen Geraden ein gegebenes Verhältnis haben.

Lösung. Mittels zwei Parallelen zu den gegebenen Geraden in Abständen von denselben, die das gegebene Verhältnis haben, bestimme man einen Punkt dieser Art, dann ist die Verbindungslinie desselben mit dem Durchschnitt der Geraden der gesuchte Ort. — Für zwei parallele Gerade ist eine dritte Parallele, welche ein gemeinschaftliches Lot zu den gegebenen Parallelen nach dem gegebenen Verhältnis teilt, der gesuchte Ort.

13. Von einem Punkte zu einer Kreisperipherie eine Gerade zu ziehen, welche von einer gegebenen Geraden halbiert (oder nach einem gegebenen Verhältnis geteilt) wird.

Lösung wird leicht gefunden, wenn man den gegebenen Punkt mit dem Kreismittelpunkte, diesen mit dem Durchschnitte (man beachte beide möglichen Durchschnitte) der gesuchten Geraden verbindet, und durch den Durchschnitt mit der gegebenen Geraden eine Parallele zu jenem Radius zieht. In beiden Fällen läßt sich der Durchschnitt dieser Parallele mit der ersten Verbindungslinie und ihre Größe bestimmen.

14. Von einem Punkte in dem Umfange des äußeren zweier konzentrischen Kreise nach der Peripherie des innern eine Gerade zu ziehen, welche durch die Peripherie des letztern halbiert (oder nach gegebenem Verhältnis geteilt) wird. (Vergl. A. 209.)

Lösung. Verbindet man den gegebenen Punkt A mit dem gemeinsamen Mittelpunkte M, diesen mit den beiden Durchschnittspunkten X und Y auf der Peripherie des inneren Kreises und zieht $XB \parallel MY$ bis in AM, so läßt sich in beiden Fällen sowohl der Punkt B als auch die Länge BX bestimmen.

15. Durch einen Durchschnittspunkt zweier Kreise in diese eine Gerade zu legen, daß die entstehenden Sehnen eine gegebene Summe bilden und beide zu gleichen Peripheriewinkeln gehören. (S. A. 156.)

Lösung. Ist durch den Durchschnitt D der beiden Kreise um M und M' die Gerade BDC so in die Kreise gelegt, daß $BD + DC = a$ ist, und nachdem $ME \perp BD$, $M'F \perp DC$ gezogen, $\sphericalangle DME = DM'F$, so ist $\frac{ED}{r} = \frac{DF}{r'}$, d. h. die Sehnen müssen sich wie die entsprechenden Radien verhalten; es muß also sein: $DB : DC = r : r'$. Da nun $DE + DC = a$ gegeben ist, so lassen sich mit Hilfe des bekannten Verhältnisses die Sehnen einzeln bestimmen. Man erhält nämlich $BD : a = r : r + r'$, und $DC : a = r' : r + r'$.

Zusatz. Die Lösung bleibt ebenso einfach, wenn statt der Summe der Sehnen ihre Differenz, ihr Rechteck, Quadratsumme, Quadratdifferenz oder eine andere Kombination ähnlicher Art gegeben ist. (Vergl. § 14.)