7.

SUR UNE MÉTHODE ALGÉBRIQUE POUR OBTENIR L'ENSEMBLE DES INVARIANTS ET DES COVARIANTS FONDAMENTAUX D'UNE FORME BINAIRE ET D'UNE COMBINAISON QUELCONQUE DE FORMES BINAIRES.

[*Comptes Rendus,* LXXXIV. (1877), pp. 1113—1116, 1211—1213.]

J'AI complètement résolu ce grand problème de trouver le système complet des invariants et covariants fondamentaux, que j'appellerai désormais les radicaux (*grundformen*) d'une forme binaire ou d'une combinaison quelconque de formes binaires, par une méthode purement algébrique tirée de l'équation partielle différentielle, à laquelle chaque *différentiant* binaire est assujetti. Par le mot *différentiant,* je désigne une fonction rationnelle quelconque des différences des racines d'une forme binaire donnée ou de chacune de telles formes, s'il y en a plus d'une, données. A l'aide de cette équation, j'obtiens une fonction, dite *génératrice* pour le système, sous la forme d'une fraction rationnelle contenant une variable, en raison du nombre des formes dans le système donné, laquelle fraction étant développée d'une telle façon que, dans la série qui en résulte, toutes les puissances des variables portent des indices positifs; le coefficient de chacune de ces puissances répondra au nombre des covariants ou invariants, linéairement indépendants, dont le degré et les ordres sont égaux respectivement aux indices de la puissance. Pour obtenir les radicaux (*grundformen*) du système, cette fonction doit être présentée, non sous sa forme réduite, mais d'une telle façon, que les indices des facteurs dont le dénominateur sera composé répondront chacun au degré et aux ordres d'un invariant ou covariant actuellement existant, comme il est toujours possible de le faire. Alors les indices du dénominateur répondront aux indices, pour ainsi dire, d'un radical appartenant à ce que j'appelle la *classe des primaires.*

Les radicaux secondaires seront obtenus au moyen du numérateur de la génératrice, en soumettant à une règle très-simple de *tamisement* l'ensemble des termes portant des coefficients positifs qui s'y présentent. J'ajouterai, pour plus de clarté, la génératrice dans quatre cas où j'aurai le moyen de comparer mes résultats avec ceux de M. le professeur Gordan. Pour les trois premiers cas, l'accord entre les deux méthodes est parfait; pour le quatrième cas, sur trente radicaux donnés par M. Gordan, vingt-huit se présentent dans mon résultat, les deux qui manquent ayant disparu dans le procédé dit de *tamisement.* J'ai démontré catégoriquement que M. Gordan s'est trompé sur ces deux formes en les supposant fondamentales; elles doivent être et sont, en effet, décomposables, c'est-à-dire peuvent être exprimées comme sommes de combinaisons des radicaux inférieurs, de sorte que, pour un système de deux formes du quatrième degré, le nombre des covariants fondamentaux biquadratiques est 7 et des covariants du sixième degré 5, et non pas 8 et 6, comme M. Gordan l'avait pensé. J'ai même déterminé les coefficients numériques qui entrent dans ces deux sommes, de sorte qu'il ne reste pas la moindre ombre de doute sur la justesse de cette rectification. C'est le grand avantage que possède cette nouvelle méthode sur l'ancienne. De l'aveu même de M. Gordan, on ne peut jamais, en se servant de cette méthode (la méthode des hyperdéterminants), s'assurer d'une manière absolue que les formes réputées fondamentales sont telles en effet. Dans ma méthode, qui distingue les radicaux en deux classes, les primaires se présentent immédiatement à première vue, et les secondaires s'obtiennent en *tamisant* (selon une règle numérique des plus simples) un ensemble de formes qui se présentent simultanément avec les primaires.

(1) Soit donnée une seule forme binaire du cinquième degré.

La génératrice, sous sa forme canonique, sera la fraction dont le dénominateur est

$$(1-t^4)(1-t^8)(1-t^{12})(1-tu^5)(1-t^2u^6)(1-t^2u^2)$$

et le numérateur

$$\begin{aligned}1 &+ t^{18} + (t^5+t^7+t^{11}+t^{13})\,v + (t^6+t^8+t^{10}+t^{12}+t^{16}-t^{20})\,v^2\\ &+ (t^3+t^5+t^9+t^{11})\,v^3 + (t^4+t^6+t^8+t^{10}+t^{14}-t^{18})\,v^4\\ &+ (t^3+t^7+t^9-t^{19})\,v^5 + (t^4-t^{14}-t^{15}-t^{20})\,v^6\\ &+ (t^5-t^9-t^{13}-t^{15}-t^{17}-t^{19})\,v^7 - (t^{12}+t^{14}+t^{18}+t^{20})\,v^8\\ &+ (t^3-t^7-t^{11}-t^{13}-t^{15}-t^{17})\,v^9 - (t^{10}+t^{12}+t^{16}+t^{18})\,v^{10}\\ &- (t^5+t^{23})\,v^{11}.\end{aligned}$$

On déduit immédiatement du dénominateur 4, 0; 8, 0; 12, 0, trois invariants, 1, 5; 2, 6; 2, 2, trois covariants (dont le premier est la forme donnée elle-même); ces sept formes sont les radicaux primaires de la forme donnée.

Pour trouver les radicaux secondaires, on soumet au procédé de *tamisement* les formes ayant pour indices

18, 0; 5, 1; 7, 1; 11, 1; 13, 1; 6, 2; 8, 2; 10, 2; 12, 2; 16, 2; 3, 3; 5, 3; 9, 3; 11, 3; 4, 4; 6, 4; 8, 4; 10, 4; 14, 4; 3, 5; 7, 5; 9, 5; 1, 6; 1, 7.

La règle de tamisement enseigne à négliger les couples 10, 2; 12, 2; 16, 2; 11, 3; 10, 4; 14, 4; 9, 5, parce que ces couples se forment en additionnant des couples inférieurs (l'addition des couples $f.g$, $h.k$ signifie le couple $(f+k).(g+k)$). Il reste dix-sept couples qui répondent aux ordres et aux degrés des radicaux secondaires.

Voici la règle générale pour le tamisement:

Supposons que par le tamisement on ait déjà obtenu un certain nombre de couples irréductibles et qu'on trouve un nouveau couple $i.j$ avec le coefficient μ. On détermine le nombre M de manière à former ce dernier couple en additionnant les couples inférieurs avec eux-mêmes ou les uns avec les autres. Alors, si M est inférieur à μ, on aura $(\mu - M)$ radicaux secondaires avec les indices $i.j$, on comptera $\mu - M$ fois ce couple et l'on continuera le procédé de tamisement comme auparavant. Si $\mu - M$ est zéro ou négatif, il n'y aura aucun secondaire du type $i.j$. Dans le dernier cas, la valeur numérique de la différence $\mu - M$ indiquera l'existence de ce nombre de rapports syzygétiques entre les radicaux des deux espèces des degrés i pour les coefficients et j pour les variables.

Dans le cas traité ci-dessus, toutes les valeurs de μ sont l'unité. Il résulte de ce qui a été fait que l'ensemble du système radical contient vingt-trois formes que l'on trouvera identiques avec celles données par Clebsch dans son *Traité sur les formes binaires*, p. 277.

(2) Prenons la forme binaire du sixième degré. On trouve pour génératrice la fraction dont le dénominateur est

$$(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^2v^4)(1-t^2v^8)(1-tv^6)$$

et le numérateur

$$\begin{aligned}(1+t^{15}) &+ (t^3+t^5+t^7+t^8+t^{10}+t^{12})v^2\\ &+ (t^4+t^5+t^6+t^7+t^8+t^9+t^{10}+t^{11}+t^{13}-t^{17})v^4\\ &+ (t^3+t^4+2t^6+t^8+t^9+t^{11}-t^{16})v^6\\ &+ (t^3+t^5+t^7-t^{13}-t^{15}-t^{17})v^8\\ &+ (t^4-t^9-t^{11}-t^{12}-2t^{14}-t^{16}-t^{17})v^{10}\\ &+ (t^3-t^7-t^9-t^{10}-t^{11}-t^{12}-t^{13}-t^{14}-t^{15}-t^{16})v^{12}\\ &- (t^5+t^{20})v^{16} - (t^8+t^{10}+t^{12}+t^{13}+t^{15}+t^{17})v^{14}.\end{aligned}$$

Le procédé de tamisement fera disparaître

6, 4; 8, 4; 10, 4; 11, 4; 13, 4; 8, 6; 9, 6; 11, 6; 7, 8.

Il y aura donc sept radicaux primaires et dix-neuf secondaires, en tout les vingt-six *bildungen* posés par Clebsch (*Formen binären*, p. 296).

(3) Prenons le système comprenant deux formes binaires, l'une biquadratique, l'autre quadratique. En faisant rapporter la variable T à la quadratique et t à la biquadratique, je trouve que la génératrice, sous sa forme canonique, aura pour dénominateur

$$(1-t^2)(1-t^3)(1-T^2)(1-T^2t)(1-T^2t^2)(1-Tv)(1-tv^2)(1-t^2v^2)$$

et pour numérateur

$$\begin{aligned}(1+T^3t^3)&+[(T+T^2)t+(T+T^2)t^2+(T^2-T^4)t^3]v^2\\&+[Tt+Tt^2+(T-T^3)t^3-T^3t^4-T^3t^5]v^4\\&+[(1-T^2)t^3-(T^2+T^3)t^4-(T^2+T^3)t^5]v^6-(Tt^3+T^4t^6)v^8.\end{aligned}$$

Ici aucun des termes du numérateur ne disparaît par l'opération du tamisement, et il y aura 8 primaires, 10 secondaires, 18 *grundformen* en tout, ce qui est d'accord avec les résultats déjà obtenus. (Voir *Salmon's Lessons*, 3e édition, p. 200.)

Finalement, je considérerai le cas *crucial*, où M. Gordan et moi nous sommes en désaccord, de deux formes biquadratiques. Pour plus de brièveté, je ne donnerai que la première moitié des termes du numérateur; on peut obtenir le reste de ces termes (qui n'influe nullement sur le résultat, tous les coefficients positifs dans cette partie, 25 en nombre, s'évanouissant dans le procédé de *tamisement*) par la règle suivante: *A chaque terme, dans la première partie, correspondra un terme dans la seconde partie du numérateur, tel que le produit des deux termes sera* $T^7 . t^7 . v^{14}$.

Or je dis que le dénominateur de la génératrice sera

$$(1-T^2)(1-T^3)(1-t^2)(1-t^3)(1-Tt)(1-Tt^2)(1-tT^2)(1-Tv^4)$$
$$(1-T^2v^4)(1-tv^4)(1-t^2v^{14}),$$

et la première partie du numérateur (la seule effective) sera

$$\begin{aligned}&(1+T^2t^2+T^4t^4)\\&+[(Tt)+(T^2t+Tt^2)+(Tt^3+T^2t^2+T^3t)+(T^2t^3+T^3t^2)+T^3t^3]v^2\\&+(Tt+Tt^2+T^2t+T^2t^2+T^3t^3+T^4t^3+T^3t^4-T^5t^4-T^4t^5-T^6t^4-T^4t^6)v^4\\&+[(Tt+T^3+T^2t+Tt^2+t^3+T^2t^2-Tt^4-T^2t^3-T^3t^2-T^4t\\&\quad-Tt^5-2T^2t^4-3T^3t^3-2T^4t^2-T^5t-T^5t^2-2T^4t^3\\&\qquad-2T^3t^4-T^2t^5-T^3t^5-T^5t^3)]v^6.\end{aligned}$$

Par l'opération de *tamisement* opérée sur les termes du numérateur, il ne restera que les triplets

2.2.0, 1.1.2, 2.1.2, 1.2.2, 1.3.2, 2.2.2, 3.1.2, 2.3.2, 3.2.2,
1.1.4, 1.2.4, 2.1.4,
1.1.6, 3.0.6, 0.3.6, 2.1.6, 1.2.6.

Observez que les triplets 2.2.4, 2.2.6 disparaissent, comme étant respectivement les sommes de triplets inférieurs. Ainsi il y aura 17 *grundformen* secondaires et 11 primaires, faisant ensemble le nombre 28.

J'ai calculé aussi la génératrice pour la forme du huitième degré; mais elle est trop longue pour être reproduite ici. La partie de cette fonction appartenant aux invariants a été déjà donnée par moi, dans sa forme canonique, dans la première de mes deux Communications récentes à l'Académie.

Le dénominateur est

$$(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^6)(1-t^7);$$

le numérateur est

$$1+t^8+t^9+t^{10}+t^{18}.$$

Je profite de cette occasion pour corriger une erreur dans la Communication que j'avais envoyée par dépêche télégraphique. Les radicaux primaires invariants seront, comme je l'avais remarqué, 6 en nombre et des degrés 2, 3, 4, 5, 6, 7 par rapport aux coefficients; mais les secondaires seront 3 et non pas 4 en nombre et des degrés 8, 9, 10 respectivement. Le tamisement fera disparaître l'indice 18 tout à fait, et, comme dans le cas de deux formes biquadratiques, cette opération de tamisement fait disparaître l'invariant double correspondant au terme T^4t^4 dans le numérateur.

J'ai obtenu la génératrice pour les invariants appartenant à la forme du septième et à la forme du dixième degré; dans cette dernière, c'est fort remarquable, un invariant de degré impair 9 figure parmi les radicaux secondaires. Je crois aussi être sur la voie pour faire l'extension de cette méthode aux formes et systèmes de formes de *dimensions* supérieures à la seconde, c'est-à-dire de formes ternaires, quaternaires, &c.; mais il faut réserver pour quelque autre occasion ce que j'ai à dire sur ce sujet et sur la méthode dont je me suis servi pour former la fonction génératrice des formes binaires. Je dois ajouter que l'erreur que j'ai commise dans ma démonstration prétendue de l'existence d'un radical du degré 18, pour les formes octaviques binaires, paraît consister dans l'hypothèse, mal fondée, de l'impossibilité de l'existence d'une équation syzygétique, dans laquelle les x, y, z figurent seulement au premier degré.