15.

SUR LA LOI DE RÉCIPROCITÉ POUR LES INVARIANTS ET COVARIANTS DES QUANTICS BINAIRES.

[*Comptes Rendus*, LXXXVI. (1878), 446—448.]

A UN invariant ou covariant donné d'un quantic binaire du degré i de l'ordre j dans les coefficients, M. Hermite a montré qu'il répond toujours un invariant ou covariant (du même degré) de l'ordre i dans les coefficients, mais appartenant à un quantic du degré j, et il a fourni un procédé pour passer de l'un à l'autre.

Je vais donner une généralisation de ce théorème en l'étendant à un système de quantics binaires, et une méthode plus facile pour faire la transformation pour le cas ou d'un seul quantic ou d'un système. Soit D un invariant ou covariant du degré δ appartenant à un système de quantics binaires des degrés respectifs $i, i', i'', \ldots$, dont l'ordre dans les coefficients des quantics est respectivement $j, j', j'', \ldots$. Je dis qu'il y répond un invariant Δ ou covariant du degré δ appartenant à un système de quantics binaires des degrés respectifs $j, i', i'', \ldots$, dont l'ordre dans ces coefficients des quantics est respectivement $i, j', j'', \ldots$, de sorte qu'à une forme comprise dans le type $i, j; i', j'; i'', j'', \ldots, : \delta$ il en répond une autre comprise dans le type $j, i; i', j'; i'', j'', \ldots, : \delta$.

Cela étant vrai pour le couple d'indices i, j sera nécessairement vrai pour tous les couples ou pour une combinaison quelconque des couples $i, j, \ldots; i', j', \ldots; i'', j'', \ldots$; mais il suffit évidemment de donner les règles de transformation pour l'échange entre eux d'un seul couple d'indices conjugués i et j.

Pour l'effectuer, voici tout ce qui est nécessaire :

Regardons le coefficient de x^i dans le quantic du degré i comme égal à un ; alors tous les coefficients de ce quantic deviennent fonctions symétriques des racines $e_1, e_2, \ldots, e_i$. Qu'ils soient exprimés ainsi, alors chaque terme de D sera de la forme $Me_1{}^{\alpha} e_2{}^{\beta} e_3{}^{\gamma} \ldots e_i{}^{\lambda}$; bien entendu qu'un ou plusieurs des chiffres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ peuvent devenir zéro.

Au lieu de ce terme, écrivons

$$M\eta_\alpha\eta_\beta\eta_\gamma\ldots\eta_\lambda,\quad \text{ou}\quad \eta_\alpha=(-)^\alpha\,\epsilon_\alpha,$$

$\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_\alpha$, étant les éléments du quantic général $(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_j)(x, y)^j$.

L'expression ainsi obtenue sera évidemment de l'ordre i, quant aux coefficients ϵ, et de plus elle sera un invariant ou un covariant (du même degré que le primitif).

La preuve en est facile, ne dépendant que de l'application de l'équation partielle différentielle, qui sert pour définir un invariant ou différentiant : elle est donnée avec des exemples de son application dans un Mémoire qui doit paraître prochainement dans l'*American Journal of Mathematics*, publié à Baltimore.

Je me borne ici à ajouter quelques mots sur l'usage du terme *réciprocité*, sans lesquels on pourrait aisément se tromper sur la véritable portée du théorème; et, pour plus de clarté, je ne sortirai pas du cas le plus simple, celui d'un seul quantic du type $i, j : \delta$, dont le type conjugué sera $j, i : \delta$.

Supposons que de D appartenant au premier type on ait passé à Δ appartenant au type conjugué $j, i : \delta$. Qu'on répète le procédé, on retournera au type donné $i, j : \delta$. Or il importe beaucoup de savoir si ou non on retournera à la forme donnée D en regardant si l'on veut comme identiques les formes qui ne diffèrent l'une de l'autre que par un multiplicateur numérique.

Pour répondre à cette question, il sera bon de se servir d'une nouvelle définition. J'appelle la *multiplicité* d'un type $j, i : \delta$ le nombre de formes linéairement indépendantes qui y sont attachées, ou, ce qui revient au même, le nombre de paramètres numériques arbitraires de la forme la plus générale qui est représentée par ce type. On peut nommer ces formes ou ces types monadelphiques, diadelphiques, etc., selon la valeur de la multiplicité.

Or, pour ces types monadelphiques en retournant au même type, on retourne nécessairement à la même forme, de sorte que la question que j'ai proposée se limite nécessairement aux types polyadelphiques. Or je suis en mesure d'affirmer qu'en général, en transformant deux fois un quantic appartenant à un type de la multiplicité k, il n'y a que k formes particulières qui se reproduisent identiquement. En donnant des valeurs arbitraires aux k paramètres, on retourne au même type, sans retourner à la même forme, de sorte que D ne peut pas se déduire de Δ comme Δ de D; et ainsi la *réciprocité*, tellement nommée, est essentiellement une réciprocité de types et non pas de formes. Quant aux formes spéciales (disons principales) qui se reproduisent et qui possèdent des réciproques dans un sens étroit, il est facile de voir qu'on peut les déterminer avec l'aide d'une équation algébrique du degré k, très-analogue à l'équation pour trouver les axes principaux d'une courbe ou surface, ou hypersurface, etc., du second degré; j'ai expérimenté, comme on peut voir dans le Mémoire cité, sur des types diadelphiques, et je trouve, dans les cas que j'ai étudiés, que les exercices de l'équation quadratique à résoudre sont rationnels; mais je ne puis affirmer que cela aura toujours lieu. L'équation dont je parle exprime le rapport numérique entre chaque forme principale et, si je puis me servir de l'expression, seconde *image*, c'est-à-dire l'image de Δ comme Δ est l'image de D. Ses racines ou au moins leurs rapports sont indépendants de toute convention, et sont en effet des constantes absolues de la raison humaine; ainsi il me paraît que la constitution de ces équations mérite d'être étudiée à fond. Sans la règle simplifiée que j'ai donnée pour trouver les images, le travail nécessaire dans le cas des types polyadelphiques serait, à cause de sa longueur, presque inexécutable, et même avec cette simplification le travail est assez pénible. Quoique la nouvelle méthode de former l'image d'une dérivée invariantive possède (il me semble) un avantage considérable quant à la facilité du calcul, cependant la route frayée par M. Hermite a une très-grande utilité, car avec son aide on voit instinctivement que chaque invariant ou covariant binaire équivaut à un hyperdéterminant, et l'on peut même calculer par un procédé direct l'hyperdéterminant qui représente un invariant ou covariant binaire donné.