17.

DÉTERMINATION D'UNE LIMITE SUPÉRIEURE AU NOMBRE TOTAL DES INVARIANTS ET COVARIANTS IRRÉDUCTIBLES DES FORMES BINAIRES.

[*Comptes Rendus*, LXXXVI. (1878), pp. 1437—1441, 1491, 1492, 1519—1522.]

La méthode que je vais exposer s'applique aux cas de systèmes quelconques des formes binaires; mais, pour plus de concision, je me bornerai au cas d'un seul quantic de degré pair: cela suffira pour donner une idée nette de la méthode, ce qui est tout ce que je me propose de faire dans cette première Communication.

Je démontre facilement que le nombre total des invariants ou covariants appartenant au quantic binaire du degré $2t$, de l'ordre μ, dans les coefficients du quantic, sera le coefficient de t^{μ} dans le développement de

$$\frac{F(t)}{(1-t)(1-t^2)^2(1-t^3)\dots(1-t^{2i-i})}$$

en puissances ascendantes de t, où $F(t)$ est une fonction rationnelle et entière de t, qu'on sait comment obtenir.

Je donne le nom de *covariants primaires* aux $2i$ covariants, pour lesquels les coefficients de la plus haute puissance de x [en représentant le quantic par $(a, b, c, d, e, f, \dots)(x, y)^{2i}$] sont

$$a : ac - b^2 : ae - 4bd + 3c^2 : a^2d - 3abc + 2b^3$$
$$: a(a^2f - \dots) : a^3(ag - \dots) : a^3(a^2h - \dots) : a^5(ak - \dots),$$

et je nomme *covariants* (invariants compris) *adjoints* ceux qui, pris en conjonction avec les primaires, formeront un système tel, que tout autre covariant sera une fonction rationnelle et entière de ceux qui sont compris dans ce système.

Je regarde la fonction $F(t)$, qui ne contient en effet qu'un nombre fini de termes actuels, comme si elle contenait un nombre infini de puissances positives de t, dont les coefficients qui correspondent aux termes qui manquent sont des zéros.

Prenons un terme quelconque en $F(t)$, disons lt^λ. Le nombre des adjoints linéairement indépendants de l'ordre λ peut être, ou égal à l, ou plus grand, ou plus petit. Quand ce nombre est plus grand, je nomme la différence *l'excès* pour l'indice λ; quand il est plus petit, *le défaut* (en faisant exception du cas $\lambda = 0$, que je regarde comme n'ayant ni manque ni excès).

Quand il y a excès, je distingue arbitrairement les adjoints en deux groupes: l'un contenant le nombre l et l'autre l'excès; et, en mettant de côté pour le moment ces derniers, je regarde tous les autres adjoints comme formant un seul système, que je nomme *système d'auxiliaires.*

Soit σ la somme des coefficients positifs en $F(t)$, Δ la somme de tous les défauts, et conséquemment $\sigma - 1 - \Delta$ le nombre des auxiliaires. Or, supposons qu'il existe au moins n adjoints surnuméraires, c'est-à-dire des adjoints pour lesquels la somme des excès est n; je démontre rigoureusement qu'en nommant τ le nombre des coefficients négatifs (s'il y en a), il existera au moins $n + \tau - \Delta$ équations entre les primaires et les auxiliaires, linéaires par rapport à ces derniers, et linéairement indépendantes les unes des autres. Donc, puisque les primaires évidemment n'admettent pas de liaison quelconque entre elles-mêmes, il s'ensuit que le nombre $n + \tau - \Delta$ ne peut pas excéder $\sigma - \tau - 1$; donc le nombre total des adjoints ne peut pas excéder $2\sigma - \tau - \Delta - 2$ et, à plus forte raison, ne peut pas excéder $2\sigma - \tau - 2$.

Parmi ces adjoints, se trouvera nécessairement la partie indépendante des puissances du quantic de tous les primaires, à l'exception des quatre premiers, qui sont les seuls indécomposables. Donc la limite supérieure totale devient $2\sigma - \tau + 2$, ou bien $S + \sigma + 2$ si l'on prend S égal à la somme algébrique des coefficients, c'est-à-dire à $\sigma - \tau$.

Quant aux valeurs de S et σ, j'ai trouvé par induction, et je ne doute nullement, que $\tau = 0$. Pour prouver cette proposition, on n'a besoin que de l'Algèbre ordinaire; mais, en attendant la preuve, que je n'ai pas encore trouvée, on peut se servir d'une limite supérieure à σ a lieu de sa valeur exacte. Quand on aura démontré que $\tau = 0$, la limite deviendra tout simplement $2S$.

Or on trouve facilement que

$$S = \frac{1}{i}\left[i^{2i-1} - 2i\,(i-1)^{2i-1} + 2i\,\frac{2i-1}{2}\,(i-2)^{2i-1}\right]\ldots \pm \frac{\Pi 2i}{\Pi\,(i-1)\,\Pi\,(i+1)}\,1^{2i-1}$$

et

$$\sigma < \frac{1}{i}\left[i^{2i-1} + 2i\,\frac{2i-1}{2}\,(i-2)^{2i-1} + \ldots\right],$$

la dernière série ne contenant que les termes positifs de s. $S + \sigma + 2$ est donc la limite supérieure rigoureusement démontrée; mais il n'est pas douteux, sous le point de vue moral, que $2S + 2$ peut être pris pour cette limite.

J'ajouterai que le point de départ, dans cette démonstration nouvelle du théorème de Gordan, est la règle numérique trouvée par M. Cayley, qui exprime le nombre total des covariants linéairement indépendants d'un ordre et de degré donné appartenant à un quantic de degré donné, règle dont la démonstration rigoureuse a été faite, pour la première fois, par moi-même dans le *Philosophical Magazine** (mars 1878) et dans le dernier tome du *Journal de Borchardt*†. C'est ainsi que, dans le cas considéré plus haut, on établit que ce nombre total sera le coefficient de $t^j u^\epsilon$ dans le développement de la fraction génératrice

$$\frac{1}{(1-tu^{2i})(1-tu^{2i-2})\dots(1-tu^{-2i+2})(1-tu^{-2i})},$$

j étant l'ordre et ϵ le degré du covariant donné: cela mène à la représentation de ce nombre, comme le coefficient de t^j, dans la fraction plus simple

$$\frac{Ft}{(1-t)(1-t^2)^2(1-t^3)\dots(1-t^{2i-1})}.$$

De même, pour le cas où le degré du quantic donné est $2i+1$, on établit que le nombre correspondant sera le coefficient de t^j dans le développement en série de puissances ascendantes de t de la fraction

$$\frac{\Phi t}{(1-t)(1-t^2)(1-t^4)\dots(1-t^{4i})}.$$

Dans ce cas, on se sert d'une série connue de covariants dont les ordres successifs seront 1, 2, 4, ..., $4i$ comme primaires, et, en nommant S la somme algébrique des coefficients de Φt et Σ la somme des coefficients positifs exclusivement, on trouvera, comme auparavant, que $S+\Sigma-2$ sera une limite supérieure au nombre total des adjoints; et, comme la série de primaires que j'adopte, pour ce cas, ne contient que deux covariants irréductibles, la limite totale des formes irréductibles sera $S+\Sigma$. En admettant, ce qui est certainement vrai, mais non encore prouvé, que Φt comme Ft est omnipositif, on aurait pour la limite $2S$, c'est-à-dire le double d'une certaine série de termes exponentiels connus, qui seront successivement positifs et négatifs: en attendant la preuve de cette loi d'omnipositivité, la limite privée sera cette même série avec seulement les termes positifs doublés.

On peut obtenir d'autres limites supérieures en se servant de la forme canonique pour les invariants, pris séparément, et de la forme canonique à *deux* variables pour les invariants et les covariants combinés; mais on introduit ainsi une difficulté de plus, car on aurait besoin de démontrer *a priori* l'existence et le caractère exact du dénominateur de ces formes canoniques: ce qui n'a pas été encore fait. De même, en se servant de la fonction génératrice que j'ai employée ici, pour des valeurs *données* de $2i$ et $2iH$, on peut trouver des dénominateurs plus simples que le dénominateur

[* p. 117 below.] [† p. 232 below.]

général, auxquels répondront aussi des primaires connues : par exemple, pour le cas de $2i = 8$, on trouvera que l'on peut prendre pour le dénominateur

$$(1-t)(1-t^2)^2(1-t^3)^2(1-t^4)(1-t^5)(1-t^7),$$

au lieu de

$$(1-t)(1-t^2)^2(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^6)(1-t^7);$$

et le numérateur restera encore omnipositif: ainsi la limite au nombre des adjoints sera réduite de la moitié ; mais mon objet a été de trouver une limite supérieure *universelle*, c'est-à-dire algébrique, et en même temps de ne pas admettre un principe quelconque reposant en aucun degré sur l'induction ou sur la probabilité. M. Camille Jordan a trouvé et publié, dans le *Journal de Liouville*, une méthode pour déterminer une limite supérieure à l'ordre ou degré des *grundformen* en se servant des principes de M. Gordan, mais je ne sais pas si ce grand géomètre ou aucun autre a réussi à déterminer une limite supérieure à leur nombre. La méthode de MM. Gordan et Jordan est le développement de la première de M. Cayley (celles des hyperdéterminants), comme la mienne est le développement de sa seconde méthode, celle qui repose sur l'emploi de l'equation partielle différentielle, nécessaire et suffisante pour déterminer l'existence des invariants et covariants proposés.

Je donne en conclusion les formes actuelles de la fonction génératrice pour les covariants pris sans distinction quant à leur degré (ce qui revient à dire la fonction génératrice pour les *différentiants*) pour les quantics binaires de tous degrés de 2 jusqu'à 8. Soit μ le degré du quantic, G la fonction génératrice qui y répond.

Quand $\mu = 2$,

$$G = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}.$$

Quand $\mu = 3$,

$$G = \frac{1+t^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^4)}.$$

Quand $\mu = 4$,

$$G = \frac{1+t^3}{(1-t)(1-t^2)^2(1-t^3)}.$$

Quand $\mu = 5$,

$$G = \frac{1+t^2+3t^3+3t^4+4t^5+4t^6+6t^7+6t^8+4t^9+5t^{10}+3t^{11}+3t^{12}+t^{13}+t^{15}}{(1-t)(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)(1-t^8)}.$$

Quand $\mu = 6$,

$$G = \frac{1+t^2+3t^3+4t^4+4t^5+4t^6+3t^7+3t^8+t^{10}}{(1-t)(1-t^2)(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)}.$$

Quand $\mu = 7$,

$$G = \frac{\left[\begin{array}{l}1+2t^2+6t^3+10t^4+19t^5+28t^6+44t^7+61t^8+79t^9+102t^{10}+129t^{11}+156t^{12}\\ +173t^{13}+196t^{14}+215t^{15}+230t^{16}+231t^{17}+231t^{18}+230t^{19}+\ldots+2t^{34}+t^{35}\end{array}\right]}{(1-t)(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)(1-t^8)(1-t^{10})(1-t^{12})}.$$

Quand $\mu=8$,

$$G=\frac{1+2t^2+6t^3+12t^4+19t^5+25t^6+31t^7+36t^8+38t^9+36t^{10}+\ldots+t^{18}}{(1-t)(1-t^2)(1-t^2)(1-t^3)(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^7)},$$

où l'on remarquera que, pour $\mu=8$, G peut être changé dans la forme normale en multipliant son numérateur et son dénominateur par $1+t^3$.

En commençant par la forme brute

$$\frac{1-u^{-2}}{(1-tu^8)(1-tu^6)(1-tu^4)(1-tu^2)(1-t)(1-tu^{-2})(1-tu^{-4})(1-tu^{-6})(1-tu^{-8})},$$

on connaît que le nombre des covariants qui appartiennent à la forme binaire du huitième degré, et qui sont de l'ordre j dans les coefficients et du degré ϵ dans les variables, est le coefficient $t^j.u^\epsilon$ dans le développement de cette fraction selon les puissances ascendantes de t. De là on conclut que, j et ϵ étant positifs, on peut substituer à cette fraction la fraction dont

$$(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)(1-t^5)(1-t^6)\times(1-t^7)(1-tu^8)(1-t^2u^{12})(1-t^2u^8)(1-t^2u^4)$$

est le dénominateur, et dont le numérateur est

$$\begin{aligned}
&1+t^8+t^9+t^{10}+t^{18}\\
&+u^2(t^5+t^6+2t^7+2t^8+3t^9+2t^{10}+2t^{11}+t^{12}+t^{13})\\
&+u^4(t^3+2t^4+2t^5+2t^6+2t^7+2t^8+t^9+t^{10}+t^{11}+t^{12}+2t^{13}+2t^{14}+t^{15}+t^{16}-t^{20})\\
&+u^6(t^3+t^4+2t^5+3t^6+3t^7+3t^8+3t^9+2t^{10}+t^{11}+t^{12})\\
&+u^8(t^3+t^4+t^5+2t^6+2t^7+3t^8+2t^9+t^{10}+t^{11}+t^{12}-t^{15}-t^{16}-t^{18}-t^{19}-t^{20})\\
&+u^{10}(t^3+2t^4+3t^5+2t^6+2t^7+t^8-t^9-2t^{10}\\
&\qquad\qquad -4t^{11}-4t^{12}-3t^{13}-3t^{14}-2t^{15}-t^{16}-t^{17})\\
&+u^{12}(t^3+t^4-t^8-t^9-2t^{10}-2t^{11}-2t^{12}-2t^{13}-4t^{14}\\
&\qquad\qquad -4t^{15}-4t^{16}-3t^{17}-2t^{18}-t^{19}-t^{20}+t^{21}+t^{22})\\
&+u^{14}(t^3+t^4+t^5+t^6-t^7-t^8-3t^9-5t^{10}-6t^{11}\\
&\qquad\qquad -6t^{12}-6t^{13}-4t^{14}-4t^{15}-2t^{16}-t^{17})\\
&+u^{16}(-t^8-2t^9-4t^{10}-4t^{11}-6t^{12}-6t^{13}-6t^{14}\\
&\qquad\qquad -5t^{15}-3t^{16}-t^{17}-t^{18}+t^{19}+t^{20}+t^{21}+t^{22})\\
&+u^{18}(t^3+t^4-t^5-t^6-2t^7-3t^8-4t^9-4t^{10}-4t^{11}\\
&\qquad\qquad -2t^{12}-2t^{13}-2t^{14}-2t^{15}-t^{16}-t^{17}+t^{21}+t^{22})\\
&+u^{20}(-t^8-t^9-2t^{10}-3t^{11}-3t^{12}-4t^{13}-4t^{14}\\
&\qquad\qquad -2t^{15}-t^{16}+t^{17}+2t^{18}+2t^{19}+3t^{20}+2t^{21}+t^{22})\\
&+u^{22}(-t^5-t^6-t^7-t^9-t^{10}+t^{13}+t^{14}+t^{15}\\
&\qquad\qquad +2t^{16}+3t^{17}+2t^{18}+2t^{19}+t^{20}+t^{21}+t^{22})\\
&+u^{24}(t^{13}+t^{14}+2t^{15}+3t^{16}+3t^{17}+3t^{18}+3t^{19}+2t^{20}+t^{21}+t^{22})
\end{aligned}$$

$$+u^{26}(-t^5+t^9+t^{10}+t^{11}+2t^{12}+t^{13}+t^{14}+t^{15}$$
$$+t^{16}+2t^{17}+2t^{18}+2t^{19}+2t^{20}+2t^{21}+t^{22})$$
$$+u^{28}(t^{12}+t^{13}+2t^{14}+2t^{15}+3t^{16}+2t^{17}+2t^{18}+t^{19}+t^{20})$$
$$+u^{30}(t^7+t^{15}+t^{16}+t^{17}+t^{25}).$$

Cette fraction a été prise sous sa forme canonique au moyen de l'introduction, dans le numérateur et le dénominateur, du facteur commun

$$(1+tu^6)(1+tu^4)(1+tu^2).$$

En opérant sur les termes positifs de ce numérateur par la méthode générale du tamisage et en combinant les résultats avec les *primaires* donnés par le dénominateur, on obtient la table suivante pour le système complet des *grundformen* du quantic du huitième degré:

Ordre dans les coefficients.	Degré dans les variables.									
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
1.........					1					
2.........	1		1		1		1			
3.........	1		1	1	1	1	1	1		1
4.........	1		2	1	1	2	1	1		1
5.........	1	1	2	2	1	3		1		
6.........	1	1	2	3	1	1				
7.........	1	2	2	3						
8.........	1	2	2	2						
9.........	1	3	1							
10.........	1	2								
11.........		2								
12.........		1								

Dans cette table un chiffre quelconque dans l'intérieur du cadre exprime le nombre des formes dérivées irréductibles de l'ordre qui se trouve au commencement de la ligne et du degré que se trouve à la tête de la colonne dans laquelle le chiffre est situé. Ainsi, par exemple, il y aura trois covariants irréductibles de l'ordre 6 et du degré 6, 2 de l'ordre 8 et du degré 6, et ainsi en général. Le nombre total de ces formes irréductibles est 69, le degré le plus élevé 18, l'ordre le plus élevé 12. La limite supérieure donnée par la méthode expliquée dans ma dernière Communication (qui sort de la considération de la génératrice à une seule variable) est $2(302)+2=606$, qui est beaucoup trop grand. Mais, en se servant de la même méthode appliquée à la fonction génératrice *à deux variables* dans sa forme canonique donnée ci-dessus, au lieu de la fonction génératrice à une seule variable, on obtiendra comme limite supérieure

$$(2\sigma-\tau-2)+\epsilon+\nu,$$

σ étant la somme des coefficients positifs, τ la somme des coefficients négatifs dans le numérateur, ϵ le nombre des liaisons algébriques entre les *primaires* qui répondent aux indices des facteurs du dénominateur, et ν le nombre de ces facteurs.

On aura donc

$$\sigma = 70, \quad \tau = 70, \quad \nu = 10, \quad \epsilon = \nu - 8 = 2,$$

et la limite supérieure devient 80, qui n'est pas beaucoup plus grand que le nombre 69 qu'on a trouvé.

De même, pour le cas d'une fonction du sixième degré, la limite supérieure tirée de la fonction génératrice (dans sa forme canonique) à deux variables sera $(2\sigma - \tau - 2) + \epsilon + \nu$, où l'on trouvera

$$\sigma = 29, \quad \tau = 29, \quad \nu = 7, \quad \epsilon = \nu - 6 = 1,$$

et conséquemment la limite devient 35, le vrai nombre étant 27.

La limite inférieure est évidemment dans tous les cas le nombre donné par la règle du tamisage: par conséquent, dans tous les exemples qu'on a précédemment traités, cette limite coïncide avec le nombre actuel des *grundformen.* On peut à peine douter que cette identité, qui est conforme à la *loi de parcimonie,* et soutenue par une induction à peu près irrésistible, ne soit d'application universelle, et il serait fort à désirer que M. Gordan ou quelqu'un de ses élèves fît connaître, s'il ne l'a pas déjà fait, le système des *grundformen* pour le quantic du huitième degré obtenu par sa méthode, afin qu'on pût le comparer avec celui qui se déduit de la mienne.

Pour éviter toute ambiguïté, je dois ajouter que le fonction génératrice à une variable est celle qui sert à donner le nombre total des covariants d'un ordre donné dans les coefficients sans que le degré dans les variables soit spécifié, tandis que la fonction génératrice à deux variables est celle qui sert pour l'énumération des covariants dont l'ordre et le degré sont tous les deux donnés. Les deux fonctions deviennent algébriquement égales quand, dans la dernière, on aura fait $u = 1$; mais le facteur commun au numérateur et au dénominateur ne sera pas en général le même dans les deux expressions.