21.

DÉTERMINATION DU NOMBRE EXACT DES COVARIANTS IRRÉDUCTIBLES DU SYSTÈME CUBO-BIQUADRATIQUE BINAIRE.

[*Comptes Rendus*, LXXXVII. (1878), pp. 477—481.]

Le seul type donné par M. Gundelfinger qui reste à discuter est le covariant linéaire des degrés 4 et 5 dans les coefficients de la biquadratique et la cubique respectivement. Un type quelconque étant représenté par $\alpha.\beta.\gamma$ quand ce type est monadelphique, je me servirai de $\alpha.\beta.\gamma$ indifféremment pour signifier le type et la forme qui y appartient et de $[\alpha.\beta.\gamma]$ pour signifier le coefficient de la plus haute puissance de x dans cette forme. On trouvera que le type $4.5.1$ qui est à discuter peut être produit de douze manières diverses, par la combinaison entre eux des types inférieurs déjà reconnus comme appartenant à des formes irréductibles, et j'écrirai les douze produits correspondants sous la forme

$$Z_1=(3.0.6,\ 0.2.6)^6(1.0.4,\ 0.3.3)^3, \qquad X=(3.0.0)(1.0.4,\ 0.5.5)^4,$$
$$Z_2=(3.0.6,\ 0.2.6)^6(1.0.4,\ 0.3.5)^4, \qquad Y_2=(2.0.0)(2.0.8,\ 0.5.9)^8,$$
$$U_1=(1.1.1)(3.0.0)(0.4.0), \qquad Y_1=(2.0.0)(2.0.4,\ 0.5.5)^4,$$
$$U_2=(1.1.1)(3.0.6,\ 0.4.6)^6, \qquad J_1=(2.1.1)(2.0.4,\ 0.4.4)^4,$$
$$U_3=(1.1.1)(3.0.8,\ 0.4.8)^8, \qquad J_2=(2.1.1)(2.0.0)(0.4.0),$$
$$U_4=(1.1.1)(3.0.12,\ 0.4.12)^{12}, \qquad J_3=(2.1.1)(2.0.8,\ 0.4.8)^8.$$

Ecrivons

$$0.1.3=(1,0,0,1)(x,y)^3, \quad 1.0.4=(a,b,c,d,e)(x,y)^4,$$

on aura
$$2.0.4=(A,B,C,D,E)(x,y)^4,$$

où $A=ac-b^2,\ B=\dfrac{ad-be}{2},\ C=\dfrac{ae+2b-3c^2}{6},\ D=\dfrac{be-cd}{2},\ E=ce-d^2,$

$$3.0.6=(L,M,N,P,Q,R,S)(x,y)^6,$$

où $\quad L=a^2d-3abc+2b^3, \quad 2P=b^2e-d^2a, \quad S=-e^2b+3edc-2d^3,$

$$[1.1.1]=[(1.0.4,\ 0.1.3)^3]=a-d, \quad [2.1.1]=[(2.0.4,\ 0.1.3)^3]=A-D,$$

$$0.2.2=xy, \quad 0.3.3=x^3-y^3, \quad 0.5.5=x^4y-xy^4, \quad 0.3.5=x^4y+xy^4.$$

Donc $\quad [(2.0.4,\ 0.5.5)^4] = A + 4D, \quad [(1.0.4,\ 0.5.5)^4] = a + 4d,$

$$0.2.6 = x^6 + 2x^3y^3 + y^6,$$

donc $\quad [(3.0.6,\ 0.2.6)^6] = L - 2P + S,$

$$0.4.6 = x^6 - y^6,$$

donc $\quad [(3.0.6,\ 0.4.6)^6] = L - S.$

Faisons $\quad a = 1, \quad c = b^2, \quad e = bd;$

alors $A = 0$, $D = 0$.

Donc $\quad Y_1 = 0, \quad J_1 = 0, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = 0.$

Je vais démontrer que nulle liaison linéaire ne subsistera entre les coefficients de la plus haute puissance de x dans les huit covariants X, Y_2, Z_1, Z_2, U_1, U_2, U_3, U_4. $3.0.12$ représente $(1.0.4)^3$, et $0.4.12$ représente $(0.1.3)^4$; donc U_4 contiendra a^4, c'est-à-dire 1, et, comme on va voir, sera la seule des huit formes nommées qui le contient; donc la liaison, si elle existe, ne peut pas contenir U_4.

$$2.0.0 = ae - 4bd + 3c^2 = 3(b^4 - bd),$$

$$0.5.9 = (0.1.3)^2(0.3.3) = (x^3 + y^3)^2(x^3 - y^3) = x^9 + x^6y^3 - x^3y^6 - y^9,$$

$$2.0.8 = (1.0.4)^2 = e^2y^8 + \ldots.$$

Donc $[(2.0.8,\ 0.5.9)^8]$ contiendra le terme e^2, et Y_2, par conséquent, le terme b^4e^2 ou b^6d^2.

$$[(1.0.4,\ 0.3.3)^3] = a + d, \quad [(1.0.4,\ 0.3.5)^4] = a - 4d;$$

ainsi on peut remplacer (Z_1), (Z_2) par les combinaisons linéaires T_1, T_2, où

$$T_1 = L - 2P + S, \quad T_2 = d(L - 2P + S),$$

et $\quad L = d - b^3, \quad 2P = b^3d - d^2, \quad S = 2b^3d^2 - 2d^3,$

$$(X) = (1 + 4d)\,\Delta, \quad (U_1) = (1 - d)\,\Delta,$$

où $\quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ b & b^2 & d \\ b^2 & d & bd \end{vmatrix},$

de sorte qu'on peut substituer, au lieu de (X) et (U_1), Δ et $d\Delta$,

$$(U_2) = (1 - d)(L - S),$$

$$3.0.8 = (a, b, c, d, e)(x, y)^4 . (A, B, C, D, E)(x, y)^4,$$

$$0.4.8 = xy(x^3 + y^3)^2 + x^7y + 2x^4y^4 + xy^7.$$

Donc $(U_3) = (1 - d)\,\Lambda$, où Λ est une fonction linéaire de aB, bA, cb, dB, bD, aE, eA, dE, eD, c'est-à-dire, puisque $A = 0$, $D = 0$, Λ est une fonction linéaire de

$$d - b^3;\ b^3d + 2b^3 - 3b^4;\ d^2 - b^3d;\ b^3d - d^2;\ b^3d^2 - d^3.$$

On voit que b^6d^2 n'entre comme terme dans aucune des quantités

$$T_1,\ dT_1,\ \Delta,\ d\Delta,\ (1-d)(L-S),\ (1-d)\Lambda;$$

donc la liaison dont on discute l'existence ne peut pas contenir.

Quant aux six quantités qui restent, Δ seul contient b^6, $d\Delta$ seul db^6, et Λ seul b^4; donc la liaison, si elle existe, doit avoir lieu entre

$$T_1,\ dT_1,\ (1-d)(L-S),$$

et conséquemment entre les trois quantités

$$L-2P+S,\ (1-d)(L-P),\ (1-d)(S-P),$$

dont la dernière seule contient d^4 et les deux premières, c'est-à-dire

$$(1-d)[d+2d^2-(1-d)b^3],\quad \tfrac{1}{2}(1-d)[2d+d^2-(2+d)b^3],$$

ne sont pas l'une un multiple de l'autre. Donc il n'y a nulle liaison linéaire entre des coefficients du même rang des douze covariants qu'on considère pour le cas où $1.0.4$ et $0.1.3$ sont de la forme

$$(1,\ b,\ b^2,\ d,\ bd)(x,\ y)^4,\quad (1,\ 0,\ 0,\ 1)(x,\ y)^3$$

respectivement, et conséquemment, dans le cas général, une telle liaison, si elle existe, ne peut avoir lieu qu'entre les quatre dont les coefficients en question s'évanouissent pour le cas spécial, c'est-à-dire entre Y_1, J_1, J_2, J_3, mais cela est inadmissible; car, sur cette supposition, on aurait

$$\lambda(2.0.0)(2.5.1)+\mu(2.1.1)(2.4.1)=0,$$

où les quatre facteurs sont irréductibles. Il y a donc douze covariants réductibles, mais linéairement indépendants, du type $4.5.1$.

Or le nombre total des covariants de ce type linéairement indépendants est $S-S'$, ou

$$S=\sum_{q=0}^{q=w}(q:4,\ 4)(w-q:3,\ 5)\quad\text{et}\quad w=\frac{4.4+3.5-1}{2}=15,$$

et S' est ce que S devient quand on substitue $w-1$ (c'est-à-dire 14) à w. Or, en donnant à q les valeurs successives de 0 jusqu'à 15, $(q:4,\ 4)$ prend les valeurs

1, 1, 2, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 7, 7, 5, 5, 3, 2, 1

et $(q:3,\ 5)$

1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1.

On a donc
$$\begin{aligned} S&=1+\ 1+\ 4+\ 9+20+25+42\\ &\quad+42+48+42+35+20+15+\ 6+2+1,\\ S'&=1+\ 2+\ 6+12+25+30\\ &\quad+42+42+48+35+28+15+10+3+2 \end{aligned}$$

et
$$S-S'=1+2+3+8+12+6-6-8-4-1-1=12,$$

c'est-à-dire le nombre total des covariants linéairement indépendants du type $4.5.1$ est entièrement épuisé par les covariants réductibles et linéairement indépendants de ce type. Donc il n'y a nul covariant irréductible du type 4.5.1, et conséquemment le montant des *grundformen* pour le système cubo-biquadratique binaire est 61, comme j'ai trouvé, et non pas 64 comme M. Gundelfinger avait pensé.

Je conclus par l'observation importante que ma méthode serait parfaitement démontrée *à priori* si l'on pouvait démontrer le théorème suivant:

Soit σ le nombre total de formes linéairement indépendantes d'un type donné appartenant à un système donné de quantics, c'est-à-dire $\sigma = S - S'$ pour les formes binaires obtenues par composition des formes irréductibles de types inférieurs, et σ' le nombre de formes du même type; alors, si σ n'est pas plus petit que σ', le nombre des formes irréductibles du type sera $\sigma - \sigma'$ et dans le cas contraire zéro: c'est-à-dire que, dans le premier cas, il n'existera nulle liaison linéaire entre les formes composées et, dans le cas contraire, seulement $\sigma' - \sigma$ telles liaisons. Ce principe, indubitablement vrai pour les quantics binaires, s'étend probablement à des quantics en général et, puisque j'ai donné la règle universelle pour trouver le nombre total des formes linéairement indépendantes d'un type donné, il s'ensuit que, si l'on possède la connaissance d'une assemblée de formes ou plus simplement la connaissance des types numériquement exprimes qui figurent dans une assemblée, parmi lesquels se trouvent toutes les formes irréductibles, on a le moyen de trouver par un calcul purement arithmétique quels sont les types qui correspondent à des formes irréductibles et combien il y en a pour chaque type.

On aurait donc la solution arithmétique et sans tâtonnement du problème qui vient à la fin de la méthode de M. Gordan, dont la difficulté a créé tant d'embarras dans l'application de cette méthode et produit des erreurs tellement graves dans les résultats obtenus et jusqu'à ce jour acceptés comme vrais.