23.

SUR LA FORME BINAIRE DU SEPTIÈME ORDRE.

[*Comptes Rendus*, LXXXVII. (1878), pp. 899—903.]

Il y a une erreur dans la Table pour la fraction réduite sur laquelle j'ai basé mon calcul des covariants irréductibles de la forme binaire du septième ordre. Le terme qui multiplie a^7, au lieu de

$$4x + 4x^5 - x^7 - x^9 + x^{11} - x^{13},$$

doit être écrit $4x + x^3 + 3x^5 - x^9 + x^{11}$, et, conséquemment, le terme complémentaire qui multiplie a^{29}, au lieu d'être

$$4x^{13} + 4x^9 - x^7 - x^5 + x^3 - x,$$

doit être écrit $4x^{13} + x^{11} + 3x^9 - x^5 + x^3$. Mais, de plus, pour ne pas parler d'erreurs de multiplication, le calcul a besoin d'être modifié, par suite d'une circonstance qui s'est présentée ici pour la première fois dans l'application de ma méthode : c'est que l'existence d'un invariant irréductible du degré 20 a été présumée, tandis qu'il y a toute raison de croire qu'il n'existe nul invariant dont le degré soit 20 ou même un multiple quelconque de 10, appartenant à la forme du septième ordre.

Voici la marche à suivre, à cause de cette circonstance. La fraction réduite a pour dénominateur

$$(1 - a^4)(1 - a^6)(1 - a^8)(1 - a^{10})(1 - a^{12})(1 - ax)(1 - ax^3)(1 - ax^5)(1 - ax^7).$$

Je multiplie le numérateur et le dénominateur par

$$(1 + a^6)(1 + ax)(1 + ax^3)(1 + ax^5).$$

Cela me donne une Table dont celle qui suit est la moitié :

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}	x^{15}	x^{16}	x^{17}	x^{18}	x^{19}	x^{20}	x^{21}	x^{22}	x^{23}
a^0	1		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0	
a^1		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0
a^2	0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0	
a^3		0		1		1		1		1		1		0		1		0		0		0		0
a^4	0		0		2		1		2		1		0		1		0		0		0		0	
a^5		1		2		2		2		2		0		0		0		−1		0		−1		0
a^6	0		3		2		3		3		0		2		−1		−1		0		0		0	
a^7		3		2		4		4		0		1		0		−2		0		−1		0		1
a^8	2		3		4		6		1		3		−1		−2		0		−1		0		0	
a^9		3		5		7		1		4		0		−2		−1		−2		0		1		0
a^{10}	−1		5		8		6		4		1		−4		0		−3		−1		0		0	
a^{11}		5		8		8		8		4		−4		−1		−5		−1		0		0		0
a^{12}	4		9		9		12		4		−1		−3		−5		−6		0		−1		1	
a^{13}		9		8		11		5		−2		−4		−8		−10		−3		−1		1		0
a^{14}	4		9		11		10		−3		−4		−9		−11		−7		−2		0		3	
a^{15}		8		10		14		1		0		−10		−11		−8		−2		0		4		2
a^{16}	5		11		13		9		−2		−5		−18		−8		−8		−1		3		3	
a^{17}		9		13		12		2		−3		−18		−13		−13		−5		3		3		−1
a^{18}	7		11		11		8		−4		−16		−19		−13		−15		3		2		5	
a^{19}		12		11		11		−1		−12		−18		−18		−18		−1		3		4		4
a^{20}	7		9		10		6		−14		−17		−21		−19		−9		3		5		9	
a^{21}		9		9		11		−9		−12		−23		−24		−11		−1		4		8		4
a^{22}	5		8		10		−1		−12		−17		−28		−12		−9		6		10		8	

Pour la compléter, on n'a qu'à se rappeler que, pour chaque terme $ka^\alpha x^\lambda$ dans la moitié donnée, il faut suppléer un terme $ka^\beta x^\mu$ dans la partie supprimée, où $\alpha+\beta=45$, $\lambda+\mu=23$; ainsi, toutes les colonnes de chiffres dans la partie donnée se répéteront en sens inverse, par rapport en même temps à la direction verticale et à la direction horizontale, dans la partie supprimée. Je suppose ce numérateur multiplié par

$$1+a^{10}+a^{20}+\ldots$$

à l'infini, et le facteur $1-a^{10}$ chassé du dénominateur, qui ne contiendra alors que les facteurs

$$1-a^4,\ 1-a^{12},\ 1-a^8,\ 1-a^{12},\ 1-a^2x^2,\ 1-a^2x^6,\ 1-a^2x^{10},\ 1-ax^7,$$

dont chacun représente par ses indices le degré et l'ordre d'un covariant irréductible; c'est-à-dire, au lieu de multiplier le numérateur et le dénominateur par $1+a^{10}$, je divise chacun par $1-a^{10}$.

Alors j'opère par tamisage successivement sur les séries qui multiplient les puissances successives de x dans le numérateur, ce qui, nonobstant le nombre infini des termes dans ces séries, est très-facile à faire, à cause de la récurrence constante des mêmes chiffres. En combinant avec les restes du tamisage ainsi opéré les invariants et les covariants représentés par les facteurs du dénominateur, j'obtiens la Table suivante, où l'on remarquera que nul invariant du degré 20 ne figure:

Table des 124 *covariants irréductibles de la forme binaire du septième ordre.*

Degré dans les coefficients	Ordre dans les variables													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	14	15
1...........								1						
2...........			1				1				1			
3...........				1		1		1		1		1		1
4...........	1				2		1		2		1		1	
5...........		1		2		2		2		2				
6...........			3		2		2		2					
7...........		3		2		4		2						
8...........	3		3		3		3							
9...........		3		5		2								
10...........			4		3									
11...........		5		3										
12...........	6		6											
13...........		7												
14...........	4													
15...........		3												
16...........	2													
17...........		2												
18...........	9													
22...........	1													

Ce qui est absolument démontré, c'est qu'il existe les 124 covariants irréductibles indiqués par cette table. Ce qui est assujetti au doute métaphysique dont j'ai fréquemment parlé, c'est la possibilité de l'existence d'autres irréductibles en dehors de la Table. Si le cas est ainsi, il sera en contradiction avec le *postulatum* qu'il ne faut jamais supposer l'existence de plus de rapports syzygétiques entre les irréductibles qu'il n'est nécessaire pour satisfaire aux valeurs connues du nombre total des covariants linéairement indépendants pour chaque degré et ordre, ou, ce qui revient à la même chose, que des covariants irréductibles et des syzygies indécomposables ne peuvent pas coexister pour le même ordre et degré. En faisant l'énumération des invariants de tous les degrés jusqu'à 20, on trouvera facilement que, selon ce principe, on n'avait pas le droit d'admettre préalablement l'existence d'un invariant irréductible du degré 20. C'est pour la première fois, dans tous les cas si nombreux que j'ai discutés, que cette difficulté s'est présentée, c'est-à-dire l'impossibilité de trouver une fraction canonique avec un numérateur fini, équivalente à la fraction réduite. Mais les résultats que j'obtiens ne sont nullement moins certains, à cause de cette difficulté que j'ai trouvé le moyen sûr et commode de vaincre. Les détails du calcul seront donnés dans une prochaine partie de l'*American Journal of Mathematics.*

Je terminerai ici par une observation qui me paraît très-significative: c'est qu'il résulte du calcul qui a été fait que l'effet du tamisage est précisément le même que si l'on avait multiplié le numérateur de la forme réduite par $1+a^{10}$ au lieu de le diviser par $1-a^{10}$, de sorte qu'on aurait pu agir précisément comme si l'invariant irréductible du degré 20 existait; seulement, au bout du compte, on aurait exclu cet invariant de la Table des formes irréductibles.

Quant à ce qui se rapporte au tamisage que j'ai appliqué aux séries simplement infinies, il est bon dé se rappeler que l'usage qu'on fait de la fraction génératrice (pour un quantic binaire) mise sous une forme canonique n'est qu'une méthode abrégée, et pour ainsi dire artificielle, pour obtenir le même résultat qu'on pourrait obtenir, mais avec beaucoup plus de difficulté, en opérant directement le tamisage sur la série de nombres, doublement infinie, qu'on obtient en développant cette fraction en série de puissances de a et x, de laquelle série les coefficients représenteront le nombre des covariants linéairement indépendants pour chaque degré et chaque ordre, de zéro jusqu'à l'infini. Cette remarque fait voir aussi que la distinction entre les irréductibles primaires et secondaires ne tient à aucune différence essentielle de nature entre les deux, mais seulement à la méthode qu'on emploie pour les obtenir, et, en variant cette méthode, les irréductibles peuvent changer leur nom de *primaires* en *secondaires*, et *vice versâ.*