33.

SUR LA VALEUR MOYENNE DES COEFFICIENTS NUMÉRIQUES DANS UN DÉTERMINANT GAUCHE D'UN ORDRE INFINIMENT GRAND.

[*Comptes Rendus*, LXXXIX. (1879), pp. 497, 498.]

PAR une inadvertance regrettable, j'ai omis* de donner la valeur moyenne des coefficients numériques dans un déterminant gauche d'un ordre infini sous sa forme exacte. Pour cela, on n'a besoin que de se servir de la formule

$$\frac{a\,(a+\delta)\,(a+2\delta)\ldots(a+x\delta)}{b\,(b+\delta)\,(b+2\delta)\ldots(b+x\delta)}=\frac{\Gamma\dfrac{b}{\delta}}{\Gamma\dfrac{a}{\delta}}\,x^{\frac{a-b}{\delta}},$$

où l'on suppose que x est infiniment grand.

Or la somme des coefficients, tous pris positivement dans le déterminant gauche de l'ordre x, est

$$[1\,.\,3\,.\,5\ldots(x-1)]^2,$$

et le nombre des termes distincts (x étant supposé infiniment grand) est

$$e^{\frac{1}{4}}(1\,.\,2\,.\,3\ldots 2x)\frac{1\,.\,5\,.\,9\ldots(4x-3)}{4\,.\,8\,.\,12\ldots 4x};$$

en conséquence, la valeur moyenne cherchée sera

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2x-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2x}\,\frac{4\,.\,8\,.\,12\ldots 4x}{1\,.\,5\,.\,9\ldots(4x-3)}=\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\,\frac{\Gamma 1}{\Gamma\frac{1}{2}}\,\frac{\Gamma\frac{1}{4}}{\Gamma 1}\,x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma\frac{1}{4}}{\Gamma\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Si l'on écrit cette valeur sous la forme $Cx^{\frac{1}{4}}$, on aura

$$\begin{aligned}\log C &= \log\Gamma\tfrac{5}{4}+\log 2-\log\Gamma\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{4}\log e\\ &= 9573211+3010300-9475449-1085711=2022351.\end{aligned}$$

On a donc

$$C=1{,}59307,$$

expression dont les quatre premiers chiffres avaient été précédemment trouvés; mais l'expression exacte $\dfrac{\Gamma\frac{1}{4}}{e^{\frac{1}{4}}\sqrt{(\pi)}}\,x^{\frac{1}{4}}$, qui me paraît remarquable, est ici donnée pour la première fois.

[* above, p. 253.]