34.

SUR LE VRAI NOMBRE DES COVARIANTS FONDAMENTAUX D'UN SYSTÈME DE DEUX CUBIQUES.

[*Comptes Rendus*, LXXXIX. (1879), pp. 828—832.]

L'ÉNUMÉRATION des invariants et covariants pour un système de deux cubiques binaires, donnée par M. Salmon (*Modern Higher Algebra*, p. 186) et attribuée par lui à MM. Clebsch et Gordan, comprend huit covariants linéaires, dont deux sont du degré 3 par rapport aux coefficients de l'une des cubiques, et l'autre du degré 4. Par ma méthode, j'avais trouvé précisément les mêmes invariants et covariants fondamentaux que MM. Clebsch et Gordan; mais tout récemment, en refaisant mes calculs, M. Franklin, de Baltimore, a découvert qu'il y avait une faute d'arithmétique commise dans mon tamisage, et que les deux covariants linéaires dont j'ai parlé plus haut ne doivent pas figurer dans ma Table. Je vais donc démontrer qu'en effet ces covariants, supposés fondamentaux également par MM. Clebsch et Gordan et moi-même, ne le sont pas; de sorte que le nombre total des *Grundformen*, pour un système de deux cubiques, est 26 et non pas 28, comme on avait pensé jusqu'à ce jour.

En démontrant une chose pareille dans le cas d'un système de deux biquadratiques, je me suis servi de la méthode pour ainsi dire positive, c'est-à-dire j'ai donné la décomposition de deux des formes supposées fondamentales par M. Gordan. Dans le cas beaucoup plus difficile du système traité par M. Gundelfinger d'une cubique et une biquadratique, je me suis servi de la méthode négative en prouvant *à priori* l'impossibilité de l'existence de formes fondamentales ayant le type (c'est-à-dire les degrés et l'ordre) qu'avaient trois des *Grundformen* imaginées par cet auteur distingué.

Je vais me servir de cette dernière méthode comme étant la plus courte dans le cas actuel, en démontrant qu'un covariant linéaire du type 3, 4 ou du type gémeau 4, 3 appartenant à un système de deux cubiques ne peut pas être indécomposable.

Je commence avec la détermination du nombre des covariants du type 4, 3 : 1 (ou bien, ce qui est absolument le même, du type 3, 4 : 1), linéairement indépendants, appartenant à un système de deux cubiques. Pour cela, par le théorème que j'ai démontré avec le dernier degré de rigueur dans le *Journal de M. Borchardt** et dans le *Philosophical Magazine*†, on sait, puisque $\dfrac{4\,.\,3+3\,.\,3-1}{2}=10$, que le nombre cherché sera

$$(10:3,4:3,3)-(9:3,4:3,3),$$

en se servant, en général, de la notation $(w: i, j: i', j')$ pour signifier le nombre des représentations de w par la somme bifide

$$x_1+2x_2+3x_3+\ldots+ix_i+y_1+2y_2+3y_3+\ldots+i'y_{i'},$$

où les x peuvent être chacun 0, 1, 2, 3, ... ou j, et les y, 0, 1, 2, 3, ... ou j'. Le nombre de partitions, sans exclusion des zéros, en trois parties, dont aucune n'excède 4, est respectivement pour les chiffres

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	4	5	4	4	3	2
1	1	2	3	3	3	3	2	1	1	0

quand, le nombre des parties restant 3, la limite supérieure de chaque partie, au lieu de 4, devient 3. Conséquemment on aura

$$\begin{aligned}(10:3,4:3,3)&=1.1+2.1+3.2+4.3+4.3+5.3+4.3+4.2+3.1+2.1\\&=1+2+6+12+12+15+12+8+3+2=73,\\(9:3,4:3,3)&=1.1+1.1+2.2+3.3+4.3+4.3+5.3+4.2+4.1+3.1\\&=1+1+4+9+12+12+15+8+4+3=69;\end{aligned}$$

c'est-à-dire que le nombre des covariants des degrés 3, 4 pour les coefficients et de l'ordre 1 pour les variables linéairement indépendants sera $73-69$ ou 4.

Je vais démontrer qu'il y a, en effet, exactement quatre covariants de ce type non irréductibles, mais linéairement indépendants; de sorte qu'il n'y aura pas place dans la nature des choses pour des covariants irréductibles, c'est-à-dire non composés ou fondamentaux, de ce même type.

Prenons les deux formes $(a, b, c, d \between x, y)^3$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \between x, y)^3$. Je me servirai de la notation $p\,.\,q\,.\,i$ qui signifiera un covariant du degré p pour les coefficients a, b, c, d; q pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; et i pour les variables. On connaît les invariants fondamentaux 1 . 1 . 0, 2 . 2 . 0, 3 . 1 . 0, disons A, B, C, et les covariants linéaires 2 . 1 . 1, 1 . 2 . 1, 3 . 2 . 1, disons U, V, W, avec l'aide desquels on peut former les quatre covariants décomposables A^2U, BU, CV, AW, du type 4 . 3 . 1.

[* p. 232 above.] [† p. 117 above.]

3 . 1 . 0 et 2 . 2 . 0 seront les valeurs des deux émanants, $E\Delta$, $E^2\Delta$, où

$$E = \alpha \frac{d}{da} + \beta \frac{d}{db} + \gamma \frac{d}{dc} + \delta \frac{d}{dd}$$

et

$$\Delta = a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2 - 6abcd.$$

1 . 1 . 0 sera le combinant $a\delta - 3b\gamma + 3c\beta - d\alpha$; 2 . 1 . 1 sera*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ \alpha x + \beta y & \beta x + \gamma y & \gamma x + \delta y \end{vmatrix}$$

et 3 . 2 . 1 sera le produit de l'opération du hessien de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \left(\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dx}\right)^3$ sur le covariant cubique de $(a, b, c, d \between x, y)^3$. Pour plus de facilité, faisons $b = 0$, $d = 0$, $\alpha = 0$, $\gamma = 0$; alors on voit que 3 . 1 . 0 s'évanouit et que 2 . 2 . 0 et 1 . 1 . 0 deviennent (en omettant dans le premier le coefficient numérique 2) $a^2\delta^2 - 6ac\beta\delta - 3c^2\beta^2$ et $a\delta + 3c\beta$ respectivement.

Bornons-nous aux coefficients de y dans 2 . 1 . 1 et 3 . 2 . 1; le dernier devient $ac\delta - c^2\beta$, et, puisque le hessien écrit plus haut devient

$$\beta\delta \left(\frac{d}{dx}\right)^2 - \beta^2 \left(\frac{d}{dy}\right)^2,$$

si l'on nomme le covariant cubique dont j'ai parlé

$$Lx^3 + Mx^2y + Nxy^2 + Py^3,$$

le coefficient de y dans 3 . 2 . 1 deviendra $2\beta\delta M - 6\beta^2 P$, ou

$$M = 3abd - 6ac^2 + 3b^2c = -6ac^2,$$

$$P = -ad^2 + 3bcd - 2c^3 = -2c^3,$$

de sorte que ce coefficient, en omettant le coefficient numérique -12, devient $ac^2\beta\delta - c^3\beta^2$.

* Cela est une conséquence immédiate du fait connu qu'aux deux formes $(a, b, c, d \between x, y)^3$, $(\lambda, \mu, \nu \between x, y)^2$ appartient un déterminant invariantif

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix};$$

de même, pour deux biquadratiques, il y aura un déterminant invariantif

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \gamma & \delta & \epsilon \end{vmatrix};$$

et, en général, à un système de i formes binaires des degrés $n_1, n_2, \ldots, n_i$, en faisant $\frac{\Sigma(n) - 2}{i+1} = \mu$, pourvu que μ soit entier et moindre qu'un quelconque des n, on peut toujours former avec les coefficients des i formes un déterminant de l'ordre $\mu + 2$, analogue à ceux que j'ai écrits plus haut, qui sera un invariant du système. Cet invariant est, en effet, l'analogue pour un système de l'invariant bien connu nommé *catalecticant* dans le cas d'une seule forme.

Si donc une équation linéaire telle que $\lambda A^2 U + \mu BU + \nu CV + \rho AW = 0$ lie ensemble les quatre covariants composés dans leur forme générale, on aura

$$\lambda (a\delta + 3c\beta)^2 (ac\delta - c^2\beta) + \mu (a^2\delta^2 - 6ac\beta\delta - 3c^2\beta^2)(ac\delta - c^2\beta) + \rho (a\delta + 3c\beta)(ac^2\beta\delta - c^3\beta^2)$$

identiquement égal à zéro; c'est-à-dire

$$\lambda (a\delta + 3c\beta)^2 + \mu (a^2\delta^2 - 6ac\beta\delta - 3c^2\beta^2) + \rho c\beta (a\delta + 3c\beta) = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients de $a^2\delta^2$, $ac\beta\delta$, $c^2\beta^2$, dans cette identité, on obtient trois équations linéaires et homogènes en λ, μ, ρ auxquelles (vu que leur déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & 1 \\ 9 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

n'est pas zéro) on ne peut pas satisfaire simultanément sans poser

$$\lambda = 0, \ \mu = 0, \ \rho = 0.$$

Conséquemment nulle liaison linéaire ne peut exister entre les quatre covariants composés qu'on a formés du type 4.3.1; en sorte que ces quatre covariants étant linéairement indépendants, en dehors d'eux ne peut exister nul covariant indécomposable de ce même type: ce qui était à démontrer.

Ainsi, pour la troisième fois, l'exactitude de mon *postulatum* fondamental s'est trouvée en contradiction avec les résultats obtenus par les géomètres allemands, et pour la troisième fois elle est sortie victorieuse du conflit. C'est à la précision, qu'on ne peut trop louer, de M. Franklin comme calculateur et à sa passion pour ne laisser échapper aucune erreur, que la Science est redevable de cette troisième correction, bien remarquable et tout à fait inattendue.

Tous mes autres résultats, qui, avec ces trois exceptions, sont en conformité avec ceux de MM. Clebsch, Gordan et Gundelfinger, et y ajoutent un caractère de certitude qu'auparavant ils étaient très loin de posséder, ont été pleinement confirmés par les calculs indépendants exécutés par M. Franklin. Quelques erreurs typographiques, dont il est bon d'avertir, existent dans les Tables que j'ai publiées; elles seront corrigées dans la collection complète de Tables qui va prochainement* paraître dans l'*American Journal of Mathematics*.

[* p. 283 below.]