49.

SUR L'ENTRELACEMENT D'UNE FONCTION PAR RAPPORT À UNE AUTRE.

[*Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, LXXXVIII. (1880), pp. 1—3.]

SOIENT $f(\lambda)$ et $\phi(\lambda)$ deux fonctions rationnelles et entières de λ. Désignons par $\lambda = A$ les racines réelles de l'équation $f(\lambda) = 0$ et par $\lambda = B$ les racines réelles de l'équation $\phi(\lambda) = 0$, et concevons que ces racines soient représentées par des points situés sur l'axe réel du plan. Les racines A et les racines B se suivront sur cet axe d'une manière quelconque. Supposons que toutes les fois qu'un nombre pair de points A forment une suite non interrompue par des points B on supprime ces points A, et que toutes les fois qu'un nombre pair de points B forme une suite non interrompue par des points A on supprime ces points B, de sorte qu'à la fin de ces suppressions on arrive à une suite alternative de points A et de points B, c. à d. à une suite finale dans laquelle on ne trouve ni un A suivi d'un A, ni un B suivi d'un B. Cela posé, le nombre des points A qui restent dans la suite finale sera ce que l'on peut nommer l'indice de l'entrelacement effectif des racines de l'équation $f = 0$ par rapport aux racines de l'équation $\phi = 0$, mais que pour plus de brièveté je nommerai plutôt *l'entrelacement de f par ϕ**.

Construisons la courbe $y = f(x)$ et la courbe $y = \phi(x)$ et supposons que chacune de ces courbes soit représentée par un fil flexible infiniment mince et fixé en deux points assez éloignés de l'axe des x. Désignons les deux courbes par f et par ϕ, et supposons que dans les points de rencontre des deux courbes situés au nord de l'axe des x la courbe f passe au-dessus de la courbe ϕ, qu'au contraire dans les points de rencontre situés au midi de l'axe des x la courbe ϕ passe au-dessus de la courbe f. Cela posé, si deux points de rencontre consécutifs se trouvent tous les deux du même côté de l'axe des x, ils ne contribuent point au nombre que je viens de nommer l'entrelacement de f par ϕ, et l'on peut ôter ces deux points par une flexion convenable de l'une des deux courbes. Cette construction donne donc une signification géométrique et intuitive au nombre que j'ai défini comme l'entrelacement de f par ϕ. En effet, si f est d'ordre pair ou si f et ϕ sont tous les deux d'ordre

* De même que je viens de définir l'entrelacement total de f par ϕ, de même on pourra définir l'entrelacement de f par ϕ entre les deux limites p et q en se bornant aux racines réelles A et B situées entre les deux limites $\lambda = p$ et $\lambda = q$.

impair, ce nombre est en même temps le nombre des intersections permanentes des deux courbes f et ϕ. Si f est d'ordre impair et ϕ d'ordre pair, il faut selon les circonstances augmenter ou diminuer d'une unité le nombre des intersections permanentes des deux courbes pour obtenir le nombre analytique défini comme l'entrelacement de f par ϕ, ce que j'exposerai plus amplement dans la suite.

Pour donner plus de précision à la construction expliquée ci-dessus on peut faire l'hypothèse que dans toute l'étendue de l'axe des x les deux parties du plan des xy soient séparées par une fente (désignée dorénavant sous le nom de fente de X), que des fils flexibles ou rubans représentant les courbes f et ϕ soient assujettis à passer par cette fente toutes les fois qu'ils traversent l'axe des x et que le fil ou ruban ϕ soit collé aux deux faces du plan des xy. De cette hypothèse on tire comme conséquence que f se trouve au-dessus de ϕ pour des y positifs et au-dessous de ϕ pour des y négatifs comme on a supposé antérieurement.

Dans le cas où la fonction f est d'ordre impair et où la fonction ϕ est d'ordre pair on a déjà avancé que le nombre des intersections permanentes diffère d'une unité positive ou négative de l'entrelacement de f par ϕ. Pour décider de cette ambiguïté, changeons d'abord, s'il est nécessaire, les signes des fonctions f et ϕ, ce qui est permis dans cette recherche, de sorte qu'après le changement de signe dans l'une comme dans l'autre des deux fonctions la plus haute puissance de x se trouve multipliée par un coefficient positif. Poursuivons le cours des deux courbes f et ϕ en marchant du côté positif de l'axe des x vers le côté négatif et désignons sous le nom de nœud (knot en anglais) les intersections permanentes des deux courbes en nous rappelant que le nombre total de toutes leurs intersections est pair. Cela posé, si le premier nœud précède le premier passage des deux courbes par la fente de X ou, ce qui est la même chose, si le dernier nœud suit le dernier passage, le nombre des nœuds *diminué* d'une unité est égal à l'entrelacement de f par ϕ, dans le cas contraire le nombre des nœuds *augmenté* d'une unité est égal à l'entrelacement de f par ϕ. Il y a un criterium (physique) auquel on peut réduire la distinction des deux cas dont il s'agit. Imaginons que l'on réunit le bout positif de f (ruban libre) au même bout de ϕ (ruban collé au plan). De cette manière on formera une aire (loop) comprise entre les parties extrêmes positives des deux courbes. Dans le premier cas discuté ci-dessus ce loop est transitoire et peut être supprimé par une déformation convenable de f. Dans le cas contraire il est impossible de supprimer le loop sans rupture des rubans réunis. Cela posé, l'entrelacement analytique de f par ϕ est égal au nombre des nœuds qui se trouvent dans les deux rubans réunis, si l'on fait la convention de ne compter du tout le loop quand il est transitoire, mais de le compter comme équivalent à deux nœuds quand il est permanent.