50.

PREUVE INSTANTANÉE D'APRÈS LA MÉTHODE DE FOURIER, DE LA RÉALITÉ DES RACINES DE L'ÉQUATION SÉCULAIRE.

[*Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, LXXXVIII. (1880), pp. 4, 5.]

SOIT M un carré de termes dont le déterminant est Δ, m un carré mineur quelconque de M composé des éléments

$$\begin{array}{llll} \lambda, & \lambda_{1,2} & \ldots & \lambda_{1,\epsilon}, \\ \mu_{2,1}, & \mu & \ldots & \mu_{2,\epsilon}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_{\epsilon,1} & \rho_{\epsilon,2} & \ldots & \rho, \end{array}$$

et considérons les coefficients différentiels de Δ pris par rapport à chacun des ϵ^2 éléments qui se trouvent dans le carré écrit ci-dessus; d'après un théorème connu on sait que le déterminant de l'ordre ϵ, formé de tous ces coefficients différentiels, est égal à

$$\Delta^{\epsilon-1} \frac{d^\epsilon \Delta}{d\lambda\, d\mu \ldots d\rho}.$$

Soient λ, μ, ... ρ des éléments qui se trouvent dans la diagonale de M, et supposons que M soit symétrique par rapport à cette diagonale, faisons de plus $\epsilon = 2$, le théorème énoncé ci-dessus se change en la formule élémentaire

$$\Delta \frac{d^2\Delta}{d\lambda\, d\mu} = \frac{d\Delta}{d\lambda} \frac{d\Delta}{d\mu} - \left(\frac{d\Delta}{d\lambda_{1,2}}\right)^2,$$

où le carré qui forme le dernier terme de la seconde partie de l'equation est écrit au lieu du produit des deux expressions $\frac{d\Delta}{d\lambda_{1,2}}$, $\frac{d\Delta}{d\mu_{2,1}}$ devenues égales en vertu de la symétrie des éléments compris dans M.

De cette équation on tire les deux conclusions suivantes:

(θ) Quand $\Delta = 0$, $\frac{d\Delta}{d\lambda}$ et $\frac{d\Delta}{d\mu}$ ont le même signe.

(ϕ) Quand $\frac{d\Delta}{d\lambda} = 0$, Δ et $\frac{d^2\Delta}{d\lambda\, d\mu}$ ont des signes contraires.

Supposons à présent que α, β, ... ρ soient tous les éléments compris dans la diagonale de M, que α, β, ... ρ soient remplacés par $\alpha + x$, $\beta + x$, ... $\rho + x$

et que D soit la valeur correspondante du déterminant Δ. Cela posé, si r est une valeur de x pour laquelle $D=0$, toutes les expressions $\frac{dD}{d\alpha}, \frac{dD}{d\beta}, \dots \frac{dD}{d\rho}$ et par conséquent $\frac{dD}{dx}=\frac{dD}{d\alpha}+\frac{dD}{d\beta}+\dots+\frac{dD}{d\rho}$ auront le même signe en vertu de (θ).

Soit de plus h une quantité positive infiniment petite, la valeur de D pour $x=r+h$ aura le même signe que $\frac{dD}{d\alpha}$ et la valeur de D pour $x=r-h$ aura le signe contraire. Formons la suite

$$D,\ \frac{dD}{d\alpha},\ \frac{d^2D}{d\beta d\alpha},\ \dots\ \frac{d^nD}{d\rho\dots d\beta d\alpha},$$

n désignant l'ordre du déterminant D, et faisons croître la variable x depuis une limite inférieure quelconque en la faisant passer par toutes les valeurs successives jusqu'à une limite supérieure quelconque. Toutes les fois que x passe par la valeur d'une racine r de $D=0$, il y aura après le passage une permanence de signe de plus dans la suite écrite ci-dessus qu'il n'y en avait avant; si au contraire x passe par une valeur pour laquelle D ne s'évanouit point, il y aura avant et après le passage le même nombre de permanences. En effet prenons dans la suite dont il s'agit trois termes consécutifs quelconques, p. e.

$$\frac{d^2D}{d\beta d\alpha},\ \frac{d^3D}{d\gamma d\beta d\alpha},\ \frac{d^4D}{d\delta d\gamma d\beta d\alpha},$$

et soit
$$D'=\frac{d^2D}{d\beta d\alpha};$$

en vertu de (ϕ) les deux expressions D' et $\frac{d^2D'}{d\delta d\gamma}$ auront des signes contraires quand $\frac{\partial D'}{\partial\gamma}$ s'évanouit. Mais les deux premiers termes présenteront, comme l'on a vu ci-dessus, une variation de signe avant le passage d'une racine de l'equation $D=0$ et une permanence après ce passage. Conséquemment la série dont il s'agit gagnera depuis la limite inférieure jusqu'à la limite supérieure autant de permanences de signes qu'il y a entre ces limites de racines de l'équation $D=0$.

Soit $-\infty$ la limite inférieure, $+\infty$ la limite supérieure de la variable x, n sera le nombre des permanences que la série dont il s'agit aura gagné, donc les racines de l'équation $D=0$ sont toutes réelles, ce qu'il fallait démontrer.

Post-scriptum. Je dois remarquer que la preuve donnée par M. Salmon (*Lessons on Higher Algebra*, 3^{me} édition p. 43), que je n'avais pas remarquée précédemment, est encore plus simple que celle donnée en haut, cependant elle est tant soit peu moins directe: dans cette autre preuve on ne fait usage que de la conclusion (ϕ).