XXI.

OSSERVAZIONI SULLA NOTA DEL PROF. LAURICELLA RELATIVA ALLA INTEGRAZIONE DELLA EQUAZIONE $\Delta^2 \Delta^2 = 0$ E SOPRA UNA NOTA DI ANALOGO ARGOMENTO DELL'ING. ALMANSI

« Acc. Sc. di Torino », vol. XXXI, 1896, pp. 1018–1021.

Nella precedente seduta ho presentato una Nota dell'ing. ALMANSI, nella quale è trattato lo stesso problema che il prof. LAURICELLA ora risolve. Questa soluzione è stata ottenuta dal LAURICELLA indipendentemente dall'altra, che a lui era ignota, ed egli vi giunse applicando il procedimento da lui esposto nella prima parte della sua Memoria: *Sulle vibrazioni delle placche elastiche incastrate*. La formula definitiva che egli trova è più simmetrica di quella corrispondente a cui pervenne l'ALMANSI e non contiene, come questa, le derivate della funzione G data al contorno. Però si può trasformare quest'ultima formola riducendola a quella del LAURICELLA. A tal fine, valendosi di una doppia integrazione per parti, si può, ridurre l'espressione:

$$\int_0^{2\pi} \frac{G - G_\alpha - G'_\alpha \operatorname{sen}(\omega - \alpha)}{1 - \cos(\omega - \alpha)} \, d\omega$$

all'altra

$$-2 \int_\alpha^{2\pi+\alpha} \frac{\partial^2 G}{\partial \omega^2} \log \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\omega - \alpha) \, d\omega ,$$

quindi invertire la doppia integrazione che comparisce nella formula definitiva in modo da sostituire a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{R^2 + r^2 - 2 Rr \cos \alpha} \int_0^{2\pi} \frac{G - G_\alpha - G'_\alpha \operatorname{sen}(\omega - \alpha)}{1 - \cos(\omega - \alpha)} \, d\omega$$

la espressione

$$-2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 G}{\partial \omega^2} \, d\omega \int_{\omega - 2\pi}^{\omega} \frac{\log \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\omega - \alpha) \, d\alpha}{R^2 + r^2 - 2 Rr \cos \alpha}$$

e trasformarla finalmente con una nuova doppia integrazione per parti.

Ma si può evitare questo calcolo, e le relative derivazioni applicate alla funzione G, partendo direttamente dalla formula (4) dell'ing. ALMANSI.

Essa infatti può scriversi:

$$(\psi_1)_{r=R} = -\frac{H}{2R} - \frac{1}{2R}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)_{r=R}$$

o anche

$$\left(\psi_1 + \frac{r}{2R^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{H}{2R}.$$

Posto

$$(a)\qquad \psi_1 + \frac{r}{2R^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \theta_1,$$

questa funzione, per un noto teorema, soddisferà la equazione $\Delta^2 = 0$, e poiché

$$(\theta_1)_{r=R} = -\frac{H}{2R},$$

avremo

$$\theta_1 = -\frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)H}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega}d\omega,$$

onde, a cagione della (*a*) e della (5) della Nota dell'ing. ALMANSI,

$$\psi_1 = -\frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)H}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega}d\omega$$

$$-\frac{r}{R^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{-r}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega} - \frac{(R^2-r^2)(r-R\cos\omega)}{(R^2+r^2-2Rr\cos\omega)^2}\right\}Gd\omega$$

e per conseguenza

$$\Pi_2 = -(R^2-r^2)\psi_1 + \varphi_1 = \frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)^2 H}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega}d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega} - \frac{r^2(R^2-r^2)}{R^2(R^2+r^2-2Rr\cos\omega)}\right.$$

$$\left. - \frac{(R^2-r^2)^2 r(r-R\cos\omega)}{R^2(R^2+r^2-2Rr\cos\omega)^2}\right\}Gd\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega}Hd\omega + \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)^2(R-r\cos\omega)}{(R^2+r^2-2Rr\cos\omega)^2}Gd\omega,$$

che è la elegante formola stabilita dal prof. LAURICELLA.

Essa può quindi ottenersi direttamente anche senza ricorrere alla *seconda* funzione di GRÈEN. Il ricavarla dallo sviluppo dato da O. VENSKE, giovandosi delle note formule della serie di FOURIER, avrebbe condotto a calcoli complicati [1].

(1) Vedi «Nachrichten von der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen aus dem Jahre 1891», S. 27.

In modo analogo, valendosi del metodo dato dall'ing. ALMANSI nel § 4 della sua Nota, si può risolvere il problema simile nel caso dello spazio limitato da una sfera σ di raggio R.

Preso un sistema di coordinate polari coll'origine nel centro della sfera in modo che sia

$$x = r \operatorname{sen} \omega \cos \rho \quad , \quad y = r \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \rho \quad , \quad z = r \cos \omega$$

e posto

$$\psi_1 + \frac{r}{2\,R^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \theta_1$$

avremo

$$(\varphi_1)_{r=R} = G \quad , \quad (\theta_1)_{r=R} = -\frac{1}{2\,R} H \,,$$

quindi nel punto A di coordinate r, ω_0, ρ_0, i valori di φ_1 e θ_1 saranno

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\,\pi R} \int\limits_{\sigma} \frac{(R^2 - r^2)\, G d\sigma}{(R^2 + r^2 - 2\,Rr \cos\gamma)^{3/2}}$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{8\,\pi R^2} \int\limits_{\sigma} \frac{(R^2 - r^2)\, H d\sigma}{(R^2 + r^2 - 2\,Rr \cos\gamma)^{3/2}}$$

essendo

$$\cos\gamma = \cos\omega \cos\omega_0 + \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\omega_0 \cos(\rho - \rho_0)\,,$$

da cui segue

$$\Pi_2 = \frac{1}{8\,\pi R^2} \int\limits_{\sigma} \frac{(R^2 - r^2)^2}{(R^2 + r^2 - 2\,Rr \cos\gamma)^{3/2}} H d\sigma$$

$$+ \frac{1}{8\,\pi R^3} \int\limits_{\sigma} \frac{(R^2 - r^2)^2\,(2\,R^2 - r^2 - Rr \cos\gamma)}{(R^2 + r^2 - 2\,Rr \cos\gamma)^{5/2}} G d\sigma\,,$$

che può prestarsi ad una verifica diretta, come ha fatto il prof. LAURICELLA nella sua Nota.