XXV.

UN TEOREMA SUGLI INTEGRALI MULTIPLI

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXII, 1897, pp. 859-868.

1. Mi permetto di intrattenere brevemente l'Accademia sopra la estensione di un ben noto teorema di addizione relativo agli integrali semplici, in un senso che si scosta da quello secondo cui da lungo tempo il teorema stesso è stato generalizzato [1].

Il cenno che qui dò può ritenersi come un passo in una via che spero poter seguire in seguito e che ha un intimo rapporto con alcuni studii da me fatti in passato sulle *funzioni di linee*.

2. Il teorema a cui mi riferisco è quello dell'addizione delle funzioni trigonometriche considerato come una proposizione di calcolo integrale. Esso allora può esprimersi nei termini seguenti:

Abbiasi

$$J = \int^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int^{y} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

e si prenda nel piano xy la curva algebrica avente per equazione

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \text{cost.} \tag{1}$$

Se i limiti superiori dei precedenti integrali sono le coordinate di un punto della curva, J *non cambierà spostando il punto stesso sulla curva.*

Possiamo anche dire in maniera equivalente che *l'equazione differenziale*

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

ammette un integrale algebrico e precisamente l'integrale (1).

È superfluo, perché ormai troppo noto, l'accennare che la estensione di questo teorema ha dato luogo alle prime scoperte nel campo delle funzioni ellittiche. Il teorema di EULERO che dà il principio di addizione delle funzioni ellittiche consiste nella equivalenza fra la relazione

$$\int^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int^{y} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \text{cost.}$$

ed una relazione *algebrica* fra i limiti superiori x, y dei due integrali.

(1) Vedi NOETHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraische Gebilde von beliebig vielen Dimensionen*, «Math. Ann.», II Bd., pp. 304, 305.

Analogamente il principio della trasformazione delle funzioni ellittiche consiste nel collegare un integrale

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}}$$

con un altro della stessa natura

$$\int^y \frac{dy}{\sqrt{A'y^4 + B'y^3 + C'y^2 + D'y + E'}}$$

in modo che la relazione fra gli integrali

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}} + \int^y \frac{dy}{\sqrt{A'y^4 + B'y^3 + C'y^2 + D'y + E'}} = \text{cost.}$$

conduca ad una *relazione algebrica* fra i limiti superiori x, y.

3. La generalizzazione di cui abbiamo parlato è stata ottenuta dal teorema primitivo, rendendo meno semplici le funzioni algebriche che compariscono sotto ai segni di integrazione.

Ma ci si può proporre di estendere il teorema in un'altra direzione.

Consideriamo l'integrale doppio

$$\iint_{\alpha_1} \varphi_1(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1$$

in cui φ_1 è una funzione algebrica di x_1, y_1, e l'area α_1 lungo la quale è estesa la integrazione è una parte del piano $x_1 y_1$.

Come si può collegare quest'integrale a due altri integrali analoghi di funzioni algebriche

$$\iint_{\alpha_2} \varphi_2(x_2, y_2)\, dx_2\, dy_2 \quad , \quad \iint_{\alpha_3} \varphi_3(x_3, y_3)\, dx_3\, dy_3,$$

in modo che la somma dei tre integrali risulti costante, allorché fra i contorni dei campi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sussiste un legame algebrico della stessa natura di quelli che figurano nei casi precedentemente citati degl'integrali semplici?

Il teorema più semplice che si può dare a questo proposito è il seguente, in cui le funzioni che figurano sotto ai segni di integrazione contengono dei radicali quadratici di funzioni di secondo grado, come appunto nel primitivo caso esaminato per gl'integrali semplici.

Abbiasi

$$\text{(2)} \quad J = \iint_{\alpha_1} \frac{dy\,dz}{\sqrt{\frac{b_2}{\lambda} z^2 - \frac{b_3}{\lambda} y^2 + \beta_1}} + \iint_{\alpha_2} \frac{dz\,dx}{\sqrt{\frac{b_3}{\mu} x^2 - \frac{b_1}{\mu} z^2 + \beta_2}} + \iint_{\alpha_3} \frac{dx\,dy}{\sqrt{\frac{b_1}{\nu} y^2 - \frac{b_2}{\nu} x^2 + \beta_3}}$$

in cui b_1, b_2, b_3; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; λ, μ, ν *sono quantità costanti e* $\lambda + \mu + \nu = 0$.

Prendasi la superficie algebrica

$$(3)\qquad \lambda x\sqrt{\frac{b_2}{\lambda}z^2-\frac{b_3}{\lambda}y^2+\beta_1}+\mu y\sqrt{\frac{b_3}{\mu}x^2-\frac{b_1}{\mu}z^2+\beta_2}+\nu z\sqrt{\frac{b_1}{\nu}y^2-\frac{b_2}{\nu}x^2+\beta_3}=\mathrm{C}\,.$$

Se i tre precedenti integrali sono estesi a parti dei piani coordinati limitati dalle proiezioni di una curva qualunque tracciata sopra questa superficie, J *non cambierà spostando e deformando la linea stessa sulla superficie.*

4. Per dimostrare il teorema consideriamo in generale la somma dei tre integrali

$$\mathrm{J}'=\iint\limits_{\alpha_1}\varphi_1(y\,,z)\,dy\,dz+\iint\limits_{\alpha_2}\varphi_2(z\,,x)\,dz\,dx+\iint\limits_{\alpha_3}\varphi_3(x\,,y)\,dx\,dy$$

insieme coll'equazione differenziale a derivate parziali

$$(4)\qquad \varphi_1\frac{\partial f}{\partial x}+\varphi_2\frac{\partial f}{\partial y}+\varphi_3\frac{\partial f}{\partial z}=0\,.$$

Se f ne è un integrale, σ una porzione della superficie

$$f=\text{cost.}$$

e α_1, α_2, α_3 sono le proiezioni di σ sui piani coordinati, avremo

$$\mathrm{J}'=\iint\limits_{\sigma}\left[\varphi_1\frac{d(y\,,z)}{d(u\,,v)}+\varphi_2\frac{d(z\,,x)}{d(u\,,v)}+\varphi_3\frac{d(x\,,y)}{d(u\,,v)}\right]du\,dv\,,$$

in cui l'integrale è esteso alla porzione σ della superficie, e u, v ne rappresentano un sistema di coordinate curvilinee.

Ma se n è la normale alla superficie, si avrà

$$\frac{d(y\,,z)}{d(u\,,v)}:\frac{d(z\,,x)}{d(u\,,v)}:\frac{d(x\,,y)}{d(u\,,v)}=\cos nx:\cos ny:\cos nz=\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z}\,;$$

perciò, in virtù della (4), avremo

$$\varphi_1\frac{d(y\,,z)}{d(u\,,v)}+\varphi_2\frac{d(z,x)}{d(u,v)}+\varphi_3\frac{d(x\,,y)}{d(u\,,v)}=0\,,$$

d'onde

$$\mathrm{J}'=0\,.$$

Il teorema precedentemente enunciato sarà dunque dimostrato provando che l'equazione differenziale (4) ammette per integrale il primo membro della (3) allorché si ha

$$\varphi_1=\frac{1}{\sqrt{\frac{b_2}{\lambda}z^2-\frac{b_3}{\lambda}y^2+\beta_1}}=\frac{1}{\Delta_1}\,,$$

$$\varphi_2=\frac{1}{\sqrt{\frac{b_3}{\mu}x^2-\frac{b_1}{\mu}z^2+\beta_2}}=\frac{1}{\Delta_2}\,,$$

$$\varphi_3=\frac{1}{\sqrt{\frac{b_1}{\nu}y^2-\frac{b_2}{\nu}x^2+\beta_3}}=\frac{1}{\Delta_3}\,.$$

Infatti in questa ipotesi il primo membro della (3) diviene

$$f = \lambda x \Delta_1 + \mu y \Delta_2 + \nu z \Delta_3 ,$$

onde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \Delta_1 + \frac{b_3 xy}{\Delta_2} - \frac{b_2 xz}{\Delta_3} ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mu \Delta_2 + \frac{b_1 yz}{\Delta_3} - \frac{b_3 yx}{\Delta_1} ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \nu \Delta_3 + \frac{b_2 zx}{\Delta_1} - \frac{b_1 zy}{\Delta_2} ,$$

e quindi

$$\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda + \mu + \nu = 0 .$$

5. Il teorema enunciato nel § 3 è facilmente estensibile al caso di integrali multipli di un ordine qualsiasi.

Onde ottenere questa generalizzazione basta sostituire alla somma di integrali (2) l'altra

$$\sum_1^n {}_i \iint \cdots \int \frac{dx_1 \cdots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \cdots dx_n}{\sqrt{\sum_1^n {}_s \frac{a_s^{(i)}}{\lambda_i} x_s^2 + b^{(i)}}} = \mathrm{I} ,$$

e alla superficie algebrica (3), la varietà algebrica

$$\sum_1^n {}_i \lambda_i x_i \sqrt{\sum_1^n {}_s \frac{a_s^{(i)}}{\lambda_i} x_s^2 + b^{(i)}} = \text{cost.},$$

in cui $a_s^{(i)} = - a_i^{(s)}$, $a_i^{(i)} = 0$, $\sum_1^n {}_i \lambda_i = 0$.

Questa proprietà è legata al fatto che *l'equazione differenziale a derivate parziali*

$$\sum_1^n {}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 ,$$

in cui

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^n {}_s \frac{a_s^{(i)}}{\lambda_i} x_s^2 + b^{(i)}}} = \frac{1}{\Delta_i} ,$$

ammette l'integrale algebrico

$$f = \sum_1^n {}_i \lambda_i x_i \Delta_i$$

come si verifica direttamente con grande facilità.

6. L'intima ragione del sussistere dei teoremi precedentemente enunciati risulta manifesta da ciò che è posto in rilievo dalla dimostrazione del § 4, vale a dire che l'*equazione differenziale a derivate parziali*

$$\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ci fornisce con i suoi integrali le superficie che collegano fra loro i contorni dei campi d'integrazione degl'integrali multipli la cui somma è costante.

Ricorrendo a questo mezzo si possono trovare infiniti altri casi, oltre quello che è stato dato, in cui il legame risulta *algebrico*.

Ciò pone in evidenza il fatto che le questioni relative agli integrali multipli del genere di quelle esaminate si possono ricondurre immediatamente ad una ricerca sugli integrali delle equazioni a derivate parziali.

7. A questo riguardo sono ben lieto di poter presentare all'Accademia l'estratto di due lettere che il nostro illustre Socio corrispondente signor PICARD mi ha dirette in seguito alla comunicazione fattagli delle precedenti proposizioni e che egli mi autorizza a pubblicare:

« . . . je crois reconnaître dans la question que vous m'indiquez quelque chose qui doit avoir du rapport avec une étude que j'avais commencée mais que je n'ai pas approfondie et que je n'ai pas non plus publiée. Voilà au surplus le point essentiel de ce que j'avais en tête:

« Soient P, Q, R trois fonctions de x, y, z et soit μ une fonction de x, y, z telle que

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial x}+\frac{\partial(\mu Q)}{\partial y}+\frac{\partial(\mu R)}{\partial z}=0 .$$

« Alors l'intégrale double

$$\text{(I)} \qquad \iint \mu P\cdot dy\,dz+\mu Q\cdot dz\,dx+\mu R\cdot dx\,dy$$

prise sur une surface ne dépendra que du contour (sauf certaines conditions de continuité bien entendu).

« On sait (formule de STOKES) que cette intégrale double peut s'écrire

$$\int_L \alpha dx+\beta dy+\gamma dz$$

L étant le contour, où on a

$$\text{(1)} \qquad \left\{\begin{aligned} \mu P &= \frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}, \\ \mu Q &= \frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}, \\ \mu R &= \frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

« Or considérons une certaine surface

$$\text{(F)} \qquad z=F(x,y).$$

Prenons comme contour L une ligne C_0 fermée et une ligne C fermée quel conque de la surface F. Pour la portion C, on a l'intégrale

$$\int(\alpha+p\gamma)\,dx+(\beta+q\gamma)\,dy \qquad \left(p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

« Si donc on a

$$\frac{\partial(\alpha + p\gamma)}{\partial y} = \frac{\partial(\beta + q\gamma)}{\partial x} \tag{2}$$

l'intégrale sera nulle ou du moins invariable quand C se déformera; en dérivant, on doit bien entendu regarder dans α, β, γ, la lettre z comme la fonction de x et y définie par (F). En développant (2) et tenant compte de (1), on a de suite

$$\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = \mathrm{R}$$

et on a par suite ce théorème: *L'intégrale* (I) *prise suivant une surface limitée par une courbe fermée* C_0 *fixe de l'espace et par une courbe fermée variable* C *tracée sur une surface intégrale de l'équation*

$$\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = \mathrm{R}$$

ne dépend pas de la courbe C, *c'est-à-dire reste invariable quand on déforme d'une manière continue la courbe* C *sur la surface intégrale considérée.*

« Vouz voyez que ceci peut s'étendre à un nombre quelconque de dimensions, et on a ainsi une propriété assez curieuse des surfaces intégrales des équations linéaires (par rapport aux dérivées) aux dérivées partielles... ».

« Si l'on voulait avoir un problème plus déterminé on pourrait prendre *deux* expressions

$$\mathrm{P}dy\,dz + \mathrm{Q}dz\,dx + \mathrm{R}dx\,dy$$

$$\mathrm{P}_1\,dy\,dz + \mathrm{Q}_1\,dz\,dx + \mathrm{R}_1\,dx\,fy\,.$$

« Si les deux équations

$$\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = \mathrm{R} \quad , \quad \mathrm{P}_1 p + \mathrm{Q}_1 q = \mathrm{R}_1$$

ont une famille de solutions communes

$$f(x\,,y\,,z) = \text{constante}\,, \tag{3}$$

les deux intégrales

$$\iint \mu\,(\mathrm{P}\,dydz + \mathrm{Q}\,dzdx + \mathrm{R}\,dxdy) \quad \text{et} \quad \iint \mu_1(\mathrm{P}_1\,dydz + \cdots),$$

où μ et μ_1 satisfont à $\frac{\partial(\mu\mathrm{P})}{\partial x} + \frac{\partial(\mu\mathrm{Q})}{\partial y} + \frac{\partial(\mu\mathrm{R})}{\partial z} = 0$ et *id* pour μ_1, resteront constantes quand le contour terminant la surface d'intégration se déplacera sur la surface (3)... ».

8. Mi permetto di far seguire alla precedente comunicazione una osservazione atta a collegare il risultato ivi contenuto colle funzioni di linee da me in passato formate soggetto di studio [2].

(2) « Rend. Reale Accademia dei Lincei », vol. III, 1887, 2° sem. [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294–314; XVIII, pp. 315–328].

La equazione

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

esprime la condizione affinché esista una funzione di linee F [(L)] di primo grado, tale che

$$\frac{dF}{d(y,z)} = X \quad , \quad \frac{dF}{d(z,x)} = Y \quad , \quad \frac{dF}{d(x,y)} = Z .$$

Sia f una funzione che soddisfa l'equazione differenziale a derivate parziali

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

e prendiamo la superficie Σ avente per equazione $f =$ cost. Se spostiamo la curva L comunque sopra la superficie Σ, la funzione F [(L)] non cambierà, giacché $dF/d\Sigma = 0$ [(3)]. Reciprocamente dall'equazione $dF/d\Sigma = 0$ segue l'equazione (5). *Possiamo dunque interpretare l'equazione*

$$F\,[(L)] = \text{costante}$$

come quella che definisce tutte le superficie

$$f = \text{costante}$$

in cui f denota un integrale qualsiasi della equazione a derivate parziali

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0 .$$

(3) « Rend. Reale Accademia dei Lincei », vol. III, 2º sem., p. 277 [in queste « Opere »: vol. primo, p. 324].