

## XXVI.

## SOPRA UNA CLASSE DI EQUAZIONI DINAMICHE

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXIII, 1898, pp. 451-475 (\*).

Nella dinamica dei sistemi rigidi liberi non soggetti a forze le tre componenti della velocità traslatoria e le tre componenti della velocità rotatoria soddisfano ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in cui questi sei elementi compariscono da soli.

La questione si presenta in modo analogo allorché si studia il moto di un corpo rigido immerso in un fluido indefinito.

In uno studio fatto qualche tempo fa <sup>(1)</sup> sulla rotazione spontanea dei corpi in cui esistono sistemi ciclici, ho mostrato come le tre componenti della rotazione del corpo e tutte le velocità cicliche possono determinarsi partendo da un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in cui figurano queste sole quantità.

Possono immaginarsi infiniti altri casi nei quali caratterizzando il moto istantaneo di un sistema mediante dei parametri indipendenti, allorché il sistema è abbandonato alla propria inerzia, le equazioni del moto possono separarsi in due gruppi, il primo dei quali è un sistema di equazioni differenziali del primo ordine rapporto ai detti parametri, che soli compariscono in esse come elementi variabili. Il problema della determinazione dei parametri stessi in funzione del tempo, costituisce quindi una questione a sé che può discutersi indipendentemente dalla completa questione dinamica.

Colle presenti ricerche mi sono proposto di iniziare uno studio sistematico di tutti questi casi e delle corrispondenti equazioni differenziali. Il tipo di esse si riconnette direttamente a quello delle equazioni di EULERO dei sistemi rigidi e a quello delle equazioni di KIRCHHOFF del moto di un corpo immerso in un fluido.

Questo studio non si limita ai soli sistemi *olonomi* <sup>(2)</sup>, ma comprende il caso generale di tutti quei sistemi soggetti al principio fondamentale della dinamica di LAGRANGE, i cui vincoli si rappresentano mediante equazioni fra

(\*) Presentata nell'adunanza del 27 febbraio 1898.

(1) *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi ciclici*. «Rend. Acc. dei Lincei», ser. 5<sup>a</sup>, vol. IV, 2<sup>o</sup> sem., 1895, pp. 93-97 [in questo vol.: XIII, pp. 166-172]. — *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici*. «Annali di Matematica», ser. 2<sup>a</sup>, vol. XXIV, 1896, pp. 29-58 [in questo vol.: XVI, pp. 187-212].

(2) La distinzione dei sistemi dando loro il nome di sistemi *olonomi* e *non olonomi* è dovuta ad HERTZ (*Die Prinzipien der Mechanik*, I Buch, Abschnitt 4). I sistemi non olonomi però erano già stati soggetti di studio. (Vedi A. VOSS, *Über die Differentialgleichungen der Mechanik*. «Mathem. Annalen», XXV Band, 1885, p. 258). Confronta pure O. HÖLDER, *Über die Principien von Hamilton und Maupertuis* («Nachr. von der K. Gesell. der Wissensch. zu Göttingen», 1896).

le coordinate ed i loro differenziali. Coll'abbracciare il caso dei sistemi *non olonomi* il campo di applicazione delle ricerche stesse viene notevolmente allargato.

I parametri indipendenti che individuano il moto istantaneo di un sistema possono chiamarsi le *caratteristiche del moto*, onde può darsi il nome di *moti spontanei a caratteristiche indipendenti* a quelli che formano il soggetto delle presenti ricerche.

In questa prima Nota mi sono limitato allo studio degli integrali di 1° e 2° grado ed alla corrispondente riduzione delle equazioni.

Esaminerò in una prossima Nota alcuni casi notevoli, approfondendo lo studio della integrazione delle equazioni differenziali; ed in una successiva studierò i moti permanenti ricercando le condizioni della loro stabilità ed instabilità.

### § 1. — CARATTERISTICHE DEL MOTO E CALCOLO DELLE LORO VARIAZIONI.

1. Consideriamo un sistema materiale costituito da  $n$  punti le cui coordinate siano  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{3n}$ , e supponiamo che le componenti delle velocità dei punti siano funzioni lineari di  $\nu$  parametri arbitrarii  $p_1, p_2, \dots, p_\nu$ ; per modo che si abbia

$$(1) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \zeta'_i = \sum_s \xi_{is} p_s$$

ove le  $\xi_{is}$  sono funzioni delle coordinate  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{3n}$ .

Ad ogni configurazione che assume il sistema corrispondono infiniti moti istantanei che saranno caratterizzati dai valori che si possono dare arbitrariamente ai  $\nu$  parametri  $p_1, p_2, \dots, p_\nu$ . Essi perciò si chiameranno *le caratteristiche del moto del sistema*.

Ogni sostituzione lineare invertibile eseguita sulle  $p_1, p_2, \dots, p_\nu$  trasforma queste caratteristiche in altre caratteristiche.

Evidentemente ogni qualvolta i legami del sistema si esprimeranno mediante relazioni fra le coordinate e le componenti delle velocità dei punti e, rispetto a queste ultime, le relazioni stesse saranno lineari ed omogenee, potremo scrivere le (1). In tal modo viene a trattarsi tanto il caso di sistemi *olonomi*, quanto quello di sistemi *non olonomi*.

2. Per avere un sistema di spostamenti virtuali basterà prendere le

$$(2) \quad \delta\xi_i = \sum_s \xi_{is} \delta\omega_s$$

ove le  $\delta\omega_s$  sono quantità infinitesime indipendenti. Esse si chiameranno le *caratteristiche dello spostamento virtuale del sistema*. Dalle formule (1) e (2) segue immediatamente

$$(3) \quad \delta\zeta'_i = \sum_s \frac{\partial \zeta'_i}{\partial p_s} \delta\omega_s.$$

3. Denotiamo con  $m_i$  la massa del punto materiale di cui una delle coordinate è  $\xi_i$ . Allora la forza viva del sistema sarà data da

$$(4) \quad T = \frac{1}{2} \sum_i^{3n} m_i \xi_i'^2 = \frac{1}{2} \sum_r^v \sum_s^v E_{rs} p_r p_s,$$

avendo posto

$$(5) \quad E_{rs} = E_{sr} = \sum_i^{3n} m_i \xi_{is} \xi_{ir}.$$

Le quantità  $E_{rs}$  risultano quindi delle funzioni di  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{3n}$ .

In virtù d'un teorema ben noto sulle forme quadratiche sarà possibile cambiare in infiniti modi le caratteristiche  $p_s$  in altre  $q_s$ , per mezzo di una sostituzione lineare invertibile, in modo da porre la forza viva sotto la forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_s^v q_s^2.$$

Potremo anche in infiniti modi, mediante sostituzioni reali invertibili, ridurre la espressione della forza viva ad una forma definita positiva arbitraria (\*).

4. Intenderemo con  $\delta p_1, \delta p_2, \dots, \delta p_v$  le  $v$  quantità definite dalle  $v$  relazioni

$$\sum_i^{3n} m_i \xi_{ig} \delta \xi_i = \sum_i^{3n} m_i \xi_{ig} \frac{d}{dt} \delta \xi_i \quad (g = 1, 2, \dots, v)$$

che in virtù delle (1) e (2) si scriveranno

$$\sum_i^{3n} m_i \xi_{ig} \left( \sum_s^v \xi_{is} \delta p_s + \sum_s^v p_s \delta \xi_{is} \right) = \sum_i^{3n} m_i \xi_{ig} \left( \sum_s^v \xi_{is} \frac{d\delta\omega_s}{dt} + \sum_s^v \delta\omega_s \frac{d\xi_{is}}{dt} \right).$$

Restando così giustificata la formula (B) che assumeremo nel § 3 per rappresentare il principio di LAGRANGE. Ma

$$\delta \xi_{is} = \sum_h^{3n} \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \sum_r^v \xi_{hr} \delta \omega_r, \quad \frac{d\xi_{is}}{dt} = \sum_h^{3n} \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \sum_r^v \xi_{hr} p_r$$

quindi la equazione precedente diverrà

$$\sum_i^{3n} m_i \xi_{ig} \sum_s^v \xi_{is} \left( \delta p_s - \frac{d\delta\omega_s}{dt} \right) = \sum_i^{3n} m_i \xi_{ig} \sum_h^{3n} \sum_s^v \sum_r^v \xi_{hr} \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} (p_r \delta\omega_s - p_s \delta\omega_r).$$

Tenendo presente la (5) otterremo:

$$(6) \quad \sum_s^v E_{sg} \left( \delta p_s - \frac{d\delta\omega_s}{dt} \right) = \sum_s^v \sum_r^v b_{sr}^{(g)} (p_r \delta\omega_s - p_s \delta\omega_r)$$

(\*) Il principio del seguente n. 4 (fino alle parole: Tenendo presente la (5) otterremo) è stato modificato secondo l'errata-corrige pubblicata dall'A. negli « Atti Acc. Sc. Torino », vol. XXXV, 1899-900, p. 118 [N. d. R.].



onde

$$(10) \quad b_{sr}^{(g)} + b_{gr}^{(s)} = \sum_1^{3n} \xi_{hr} \frac{\partial E_{gs}}{\partial \xi_h}$$

e per conseguenza, allorché le  $E_{gs}$  sono costanti,

$$b_{sr}^{(g)} = -b_{gr}^{(s)}.$$

Dunque: *allorché i coefficienti della forza viva sono costanti, i coefficienti  $b_{sr}^{(g)}$  cambiano segno permutando l'apice col primo indice.*

3. Supponiamo di aver ricondotto la forza viva alla forma

$$T = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_v^2),$$

allora la (9) ci darà

$$b_{sr}^{(u)} - b_{rs}^{(u)} = a_{sr}^{(u)}$$

e la (10)

$$b_{sr}^{(u)} + b_{ur}^{(s)} = 0;$$

quindi

$$b_{sr}^{(u)} + b_{us}^{(r)} = a_{sr}^{(u)}$$

$$b_{us}^{(r)} + b_{ru}^{(s)} = a_{us}^{(r)}$$

$$b_{ru}^{(s)} + b_{sr}^{(u)} = a_{ru}^{(s)}$$

da cui si deduce

$$2 b_{sr}^{(u)} = a_{sr}^{(u)} + a_{ru}^{(s)} - a_{us}^{(r)} = a_{sr}^{(u)} + a_{ru}^{(s)} + a_{su}^{(r)}$$

e finalmente

$$b_{sr}^{(u)} = \frac{a_{sr}^{(u)} + a_{ru}^{(s)} + a_{su}^{(r)}}{2}.$$

4. Vediamo ora come cambiano i coefficienti  $a_{sr}^{(u)}$ , allorché si eseguisce una sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle caratteristiche  $p_s$ .

Si abbia

$$(11) \quad q_i = \sum_s \lambda_{is} p_s, \quad \delta \chi_i = \sum_s \lambda_{is} \delta \omega_s, \quad (11') \quad p_s = \sum_i \Lambda_{is} q_i$$

le  $\lambda_{is}$  essendo delle quantità costanti.

Dalle

$$\delta p_s = \frac{d \delta \omega_s}{dt} + \sum_h \sum_k a_{hk}^{(s)} p_k \delta \omega_h$$

segue

$$\begin{aligned} \delta q_i &= \sum_s \lambda_{is} \delta p_s = \frac{d \delta \chi_i}{dt} + \sum_h \sum_k \sum_s a_{hk}^{(s)} \lambda_{is} p_k \delta \omega_h \\ &= \frac{d \delta \chi_i}{dt} + \sum_h \sum_k \sum_s \sum_g \sum_l a_{hk}^{(s)} \lambda_{is} \Lambda_{gh} \Lambda_{lk} q_l \delta \chi_g = \end{aligned}$$

$$= \frac{d\delta\chi_i}{dt} + \sum_{\mathbf{g}} \sum_{\mathbf{l}} c_{gl}^{(i)} q_l \delta\chi_g,$$

avendo posto

$$(12) \quad c_{gl}^{(i)} = \sum_{\mathbf{h}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{s}} a_{hk}^{(s)} \lambda_{is} \Lambda_{gh} \Lambda_{lk}.$$

Dunque: se si eseguisce sulle caratteristiche la sostituzione (11) a coefficienti costanti, i coefficienti  $a_{rs}^{(u)}$  si cambiano nelle  $c_{rs}^{(u)}$  legate alle prime dalle relazioni (12).

### § 3. - LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL MOVIMENTO.

1. Avendo chiamato T la forza viva del sistema, si avrà

$$\delta T = \sum_{\mathbf{s}} \frac{\partial T}{\partial p_s} \delta p_s + \sum_{\mathbf{i}} \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \delta \xi_i$$

ed applicando la (A) e la (2),

$$(13) \quad \delta T = \sum_{\mathbf{s}} \frac{\partial T}{\partial p_s} \left( \frac{d\delta\omega_s}{dt} + \sum_{\mathbf{h}} \sum_{\mathbf{k}} a_{hk}^{(s)} p_k \delta\omega_h \right) + \sum_{\mathbf{i}} T_s \delta\omega_s$$

scrivendo

$$(14) \quad T_s = \sum_{\mathbf{i}} \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \xi_{is}.$$

Se  $\Xi_i$  denota la componente della forza corrispondente alla coordinata  $\xi_i$ , il lavoro eseguito dalle forze per uno spostamento virtuale, risulterà dato da

$$(15) \quad \delta L = \sum_{\mathbf{i}} \Xi_i \delta \xi_i = \sum_{\mathbf{i}} \Xi_i \sum_{\mathbf{s}} \xi_{is} \delta\omega_s = \sum_{\mathbf{s}} P_s \delta\omega_s,$$

ponendo

$$(14') \quad P_s = \sum_{\mathbf{i}} \Xi_i \xi_{is}.$$

2. Per stabilire le equazioni differenziali del movimento partiamo dal principio di LAGRANGE rappresentato dall'equazione (3)

$$(B) \quad \delta L = \frac{d}{dt} \left( \sum_{\mathbf{i}} \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \delta \xi_i \right) - \delta T.$$

Applicando la (3) avremo

$$\sum_{\mathbf{i}} \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \delta \xi_i = \sum_{\mathbf{i}} \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \sum_{\mathbf{s}} \frac{\partial \xi_i}{\partial p_s} \delta\omega_s = \sum_{\mathbf{s}} \frac{\partial T}{\partial p_s} \delta\omega_s.$$

(3) Vedi BELTRAMI, *Sulle equazioni dinamiche di Lagrange*. « Rendiconti dell'Istituto Lombardo », ser. II, vol. XXVIII, 1895, p. 745 [« Opere mat. », t. IV, pp. 535-542].

Perciò in virtù delle (13) e (15), la (B) diverrà

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{I}} P_s \delta \omega_s &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{\mathbf{I}} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} \delta \omega_s \right) - \sum_{\mathbf{I}} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} \left( \frac{d \delta \omega_s}{dt} + \sum_{\mathbf{h}} \sum_{\mathbf{k}} a_{hk}^{(s)} \dot{p}_k \delta \omega_h \right) - \sum_{\mathbf{I}} T_s \delta \omega_s \\ &= \sum_{\mathbf{I}} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} \delta \omega_s - \sum_{\mathbf{I}} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} \sum_{\mathbf{h}} \sum_{\mathbf{k}} a_{hk}^{(s)} \dot{p}_k \delta \omega_h - \sum_{\mathbf{I}} T_s \delta \omega_s \end{aligned} \quad (12)$$

o anche

$$\sum_{\mathbf{I}} \delta \omega_s \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} - \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k}} a_{sk}^{(r)} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_r} \dot{p}_k - T_s - P_s \right] = 0,$$

da cui segue

$$(C) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} = \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k}} a_{sk}^{(r)} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_r} \dot{p}_k + T_s + P_s \quad (s = 1, 2, \dots, \nu).$$

Come equazioni differenziali del movimento del sistema potremo dunque prendere le equazioni precedenti insieme alle

$$\zeta'_i = \sum_{\mathbf{I}} \zeta_{is} \dot{p}_s.$$

#### § 4. - L'INTEGRALE DELLE FORZE VIVE.

1. Moltiplichiamo la (C) per  $\dot{p}_s$ , quindi sommiamo per tutti i valori  $1, 2, \dots, \nu$  di  $s$ . Otterremo

$$\sum_{\mathbf{I}} \dot{p}_s \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} = \sum_{\mathbf{I}} \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k}} a_{sk}^{(r)} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_r} \dot{p}_k \dot{p}_s + \sum_{\mathbf{I}} T_s \dot{p}_s + \sum_{\mathbf{I}} P_s \dot{p}_s.$$

Ma in virtù delle eguaglianze

$$a_{sk}^{(r)} = -a_{ks}^{(r)},$$

si ha

$$\sum_{\mathbf{I}} \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k}} a_{sk}^{(r)} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_r} \dot{p}_k \dot{p}_s = \sum_{\mathbf{I}} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_r} \sum_{\mathbf{I}} \sum_{\mathbf{k}} a_{sk}^{(r)} \dot{p}_k \dot{p}_s = 0$$

onde

$$\sum_{\mathbf{I}} \dot{p}_s \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} = \sum_{\mathbf{I}} T_s \dot{p}_s + \sum_{\mathbf{I}} P_s \dot{p}_s$$

o anche

$$\sum_{\mathbf{I}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} \dot{p}_s \right) = \sum_{\mathbf{I}} T_s \dot{p}_s + \sum_{\mathbf{I}} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} \frac{d \dot{p}_s}{dt} + \sum_{\mathbf{I}} P_s \dot{p}_s,$$

da cui si deduce, poiché  $T$  è una funzione omogenea di 2° grado nelle  $\dot{p}_s$ ,

$$(16) \quad 2 \frac{dT}{dt} = \sum_{\mathbf{I}} T_s \dot{p}_s + \sum_{\mathbf{I}} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} \frac{d \dot{p}_s}{dt} + \sum_{\mathbf{I}} P_s \dot{p}_s.$$

Ora (vedi (14))

$$\sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{v}} T_s \dot{p}_s = \sum_{\mathbf{I}}^{3^n} \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{v}} \xi_{is} \dot{p}_s = \sum_{\mathbf{I}}^{3^n} \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \xi'_i \quad (15)$$

quindi

$$\sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{v}} T_s \dot{p}_s + \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{v}} \frac{\partial T}{\partial p_s} \frac{dp_s}{dt} = \frac{dT}{dt},$$

e l'equazione (16) diventa

$$(17) \quad \frac{dT}{dt} = \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{v}} P_s \dot{p}_s.$$

2. Se esiste il potenziale  $P$  delle forze ed è una funzione delle sole coordinate  $\xi_i$ , avremo (vedi (14'))

$$P_s = \sum_{\mathbf{I}}^{3^n} \Xi_i \xi_{is} = \sum_{\mathbf{I}}^{3^n} \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \xi_{is},$$

quindi

$$\sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{v}} P_s \dot{p}_s = \sum_{\mathbf{I}}^{3^n} \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{v}} \xi_{is} \dot{p}_s = \sum_{\mathbf{I}}^{3^n} \frac{\partial P}{\partial \xi_i} \xi'_i = \frac{dP}{dt}$$

onde la (17) si scriverà

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

e integrando

$$T - P = \text{cost.}$$

## § 5. — CASO IN CUI LE EQUAZIONI (C) DIVENTANO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE.

1. Allorché le  $p_s$  sono le derivate rapporto a  $t$  di un sistema di variabili indipendenti  $q_s$ , cioè

$$p_s = \frac{dq_s}{dt},$$

avremo

$$\xi_{is} = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_s},$$

quindi

$$\sum_{\mathbf{I}}^{3^n} \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \xi_{hr} = \sum_{\mathbf{I}}^{3^n} \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \frac{\partial \xi_h}{\partial q_r} = \frac{\partial \xi_{is}}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s \partial q_r}.$$

Applicando la (7) si trova

$$b_{sr}^{(g)} = \sum_{\mathbf{I}}^{3^n} m_i \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s \partial q_r} \xi_{ig} = \sum_{\mathbf{I}}^{3^n} m_i \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s \partial q_r} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_g}$$

onde mutando  $s$  con  $r$

$$b_{sr}^{(g)} = b_{rs}^{(g)}$$



e a cagione della (8)

$$(18) \quad a_{sr}^{(u)} = 0;$$

quindi la (A) si riduce a

$$\delta p_u = \frac{d\delta\omega_u}{dt}.$$

2. In virtù delle (18) le equazioni (C) diventano

$$(C') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} = T_s + P_s$$

e (vedi (14))

$$T_s = \sum_i^{3n} \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \xi_{is} = \frac{\partial T}{\partial q_s};$$

per conseguenza le (C') si scriveranno sotto la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_s} = \frac{\partial T}{\partial q_s} + P_s$$

che è la forma di LAGRANGE delle equazioni del movimento.

#### § 6. — VARIE FORME DELLE EQUAZIONI DEL MOTO.

1. Supponiamo che le caratteristiche del sistema siano prese in modo da rendere costanti i coefficienti  $E_{sr}$  della forza viva; allora le (C) diverranno

$$(D) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_r^v \sum_k^v a_{sk}^{(r)} p_k \frac{\partial T}{\partial p_r} + P_s$$

e se la forza viva sarà ridotta alla forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_s^v p_s^2$$

le equazioni precedenti si scriveranno

$$(E) \quad p'_s = \sum_r^v \sum_k^v a_{sk}^{(r)} p_k p_r + P_s.$$

Ricordiamo che la riduzione della forza viva alla forma precedente è sempre possibile in infiniti modi, quindi potremo dire:

*Ogni problema di dinamica, relativo ad un sistema olonomo o non olonomo avente legami indipendenti dal tempo, può farsi dipendere da un sistema di equazioni differenziali della forma*

$$(E_1) \quad \begin{cases} p'_s = \sum_r^v \sum_k^v a_{sk}^{(r)} p_k p_r + P_s & (s = 1, \dots, v) \\ \xi'_i = \sum_s^v \xi_{is} p_s & (i = 1, 2, \dots, 3n) \end{cases}$$

in cui

$$a_{sk}^{(r)} = -a_{ks}^{(r)}.$$

2. Tenendo conto che

$$\frac{\partial T}{\partial p_r} = \sum_{\mathbf{r}} E_{r\mathbf{h}} p_{\mathbf{h}}$$

le (D) si scriveranno

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{h}} \dot{p}_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{h}} \sum_{\mathbf{r}} E_{r\mathbf{h}} a_{sk}^{(r)} + P_s$$

ed applicando la (9)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{h}} (b_{sk}^{(h)} - b_{ks}^{(h)}) p_{\mathbf{h}} \dot{p}_{\mathbf{k}} + P_s$$

e ponendo

$$b_{sk}^{(h)} - b_{ks}^{(h)} = c_{sk}^{(h)}$$

avremo

$$(F) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{h}} c_{sk}^{(h)} p_{\mathbf{h}} \dot{p}_{\mathbf{k}} + P_s$$

in cui

$$c_{sk}^{(h)} = -c_{ks}^{(h)}.$$

Osservando che

$$p_r = \sum_{\mathbf{s}} e_{rs} \frac{\partial T}{\partial p_s}$$

le (F) si trasformeranno facilmente nelle

$$p'_r = \sum_{\mathbf{g}} \sum_{\mathbf{h}} \dot{p}_{\mathbf{h}} \frac{\partial T}{\partial p_g} \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{k}} c_{sk}^{(h)} e_{rs} e_{gk} + \sum_{\mathbf{s}} e_{rs} P_s$$

quindi ponendo

$$f_{rg}^{(h)} = \sum_{\mathbf{s}} \sum_{\mathbf{k}} c_{sk}^{(h)} e_{rs} e_{gk}$$

$$Q_r = \sum_{\mathbf{s}} e_{rs} P_s$$

avremo

$$(G) \quad p'_r = \sum_{\mathbf{g}} \sum_{\mathbf{h}} f_{rg}^{(h)} p_{\mathbf{h}} \dot{p}_{\mathbf{g}} + Q_r$$

in cui

$$f_{rg}^{(h)} = -f_{gr}^{(h)}.$$

3. Le due forme (F) (G) sotto cui vennero poste le equazioni della dinamica possono subire una comune trasformazione.

Sia  $F$  una forma quadratica delle  $p_1, p_2, \dots, p_v$  a discriminante diverso da zero.

Potremo scrivere

$$\dot{p}_h = \sum_l \lambda_{hl} \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_l}$$

in cui le  $\lambda_{hl}$  sono indipendenti dalle  $p_1, p_2, \dots, p_v$ .

Ponendo dunque

$$\sum_h^v c_{sh}^{(h)} \lambda_{hl} = \gamma_{sk}^{(l)}$$

$$\sum_h^v f_{rg}^{(h)} \lambda_{hl} = \varphi_{rg}^{(l)}$$

le (F) e (G) diverranno

$$(F_1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} = \sum_l^v \sum_k^v \gamma_{sk}^{(l)} \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_l} \dot{p}_k + P_s, \quad (\gamma_{sk}^{(l)} = -\gamma_{ks}^{(l)})$$

$$(G_1) \quad \dot{p}_r = \sum_g^v \sum_l^v \varphi_{rg}^{(l)} \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_l} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_g} + Q_r, \quad (\varphi_{rg}^{(l)} = -\varphi_{gr}^{(l)}).$$

### § 7. — MOTI SPONTANEI A CARATTERISTICHE INDIPENDENTI.

1. Allorché, oltre essere costanti i coefficienti della forza viva, sono costanti anche le  $a_{rs}^{(u)}$ , allora il sistema si dirà *a caratteristiche indipendenti*.

Evidentemente un sistema rigorosamente *ciclico* secondo la denominazione di HELMHOLTZ corrisponde ad un sistema a caratteristiche indipendenti in cui i coefficienti  $a_{rs}^{(u)}$  sono tutti eguali a zero, allorché si prendono come caratteristiche le velocità cicliche.

Si vedrebbe facilmente come i sistemi rigidi, liberi o immersi nei fluidi, con o senza moti ciclici interni, si riducano a sistemi a caratteristiche indipendenti.

Supponiamo che il sistema non sia soggetto ad alcuna forza, sia cioè abbandonato alla propria inerzia, allora le quantità  $P_s$ , saranno tutte nulle e le equazioni del moto diverranno

$$(D') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} = \sum_r^v \sum_k^v a_{sk}^{(r)} \dot{p}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_r},$$

$$(1') \quad \ddot{\xi}_i = \sum_s^v \xi_{is} \dot{p}_s.$$

Osserviamo che nel sistema (D') non compariscono che le  $p_1, \dots, p_v$  e le loro derivate prime; esso quindi determina le caratteristiche del moto indipendentemente dalle coordinate. Possiamo quindi stabilire che *in un sistema a caratteristiche indipendenti abbandonato alla propria inerzia, le caratteristiche del moto soddisfano ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine*

in cui compariscono da sole. Il problema della integrazione delle equazioni del moto può essere dunque decomposto in due parti. Nella prima si determinano le caratteristiche mediante le (D'); nella seconda, note queste, si determinano le coordinate applicando le (I').

In tal caso chiameremo il moto un *moto spontaneo a caratteristiche indipendenti*.

2. Ogni sostituzione a coefficienti costanti nelle caratteristiche non altera il tipo del sistema; quindi come equazioni differenziali del moto potremo prendere indifferentemente uno dei sistemi

$$(D') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} = \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k}} a_{sk}^{(\mathbf{r})} \dot{p}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_r},$$

$$(F') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} = \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k}} c_{sk}^{(\mathbf{r})} \dot{p}_k \dot{p}_r$$

$$(G') \quad \dot{p}'_s = \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k}} f_{sk}^{(\mathbf{r})} \dot{p}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}$$

o anche il sistema

$$(E') \quad \dot{p}'_s = \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k}} g_{sk}^{(\mathbf{r})} \dot{p}_r \dot{p}_k$$

a cui si riducono contemporaneamente tutti i precedenti, quando si riduca T alla semisomma dei quadrati delle caratteristiche.

In tutte le equazioni precedenti dovremo ritenere *costanti tutti i coefficienti e tali che cambino segno per una trasposizione degli indici*.

Se denotiamo con F una forma quadratica delle  $\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_v$  a discriminante diverso da zero, e a coefficienti costanti, potremo ancora scrivere le equazioni differenziali sotto la forma

$$(F_1') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_s} = \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k}} \gamma_{sk}^{(\mathbf{r})} \dot{p}_k \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_r}$$

$$(G_1') \quad \dot{p}'_s = \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{k}} \varphi_{sk}^{(\mathbf{r})} \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_r} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k}$$

in cui al pari che nelle equazioni precedenti i coefficienti  $\gamma_{sk}^{(\mathbf{r})}$  e  $\varphi_{sk}^{(\mathbf{r})}$  sono costanti e cambiano segno per una inversione degli indici.

3. Quando le caratteristiche sono costanti diremo che il moto è *permanente*. Quindi come equazioni corrispondenti ai moti permanenti prenderemo uno qualsiasi dei sistemi (D'), (F'), (G'), (E'), (F<sub>1</sub>'), (G<sub>1</sub>') in cui assumeremo nullo il primo membro.

Ne segue che la determinazione delle caratteristiche corrispondenti ai moti permanenti può eseguirsi senza alcuna operazione di integrazione.

§ 8. — INTEGRALI DI PRIMO GRADO DELLE EQUAZIONI DEI MOTI SPONTANEI  
A CARATTERISTICHE INDIPENDENTI.

1. Se esiste un integrale di primo grado delle equazioni (G'), cioè se si ha

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_v p_v = \text{cost.},$$

essendo  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$  delle quantità costanti, eseguiamo una sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle caratteristiche in modo che la prima di esse risulti eguale al primo membro della equazione precedente. Si vede in tal modo che il caso in cui esista un integrale di primo grado si riduce sempre a quello in cui le equazioni ammettono l'integrale

$$p_1 = \text{cost.},$$

ossia si abbia

$$p'_1 = 0.$$

2. Ciò premesso eseguiamo sulle  $p_2, \dots, p_v$  una sostituzione lineare in modo da far sparire nella espressione della forza viva i termini contenenti i rettangoli delle  $p_2, \dots, p_v$ , cioè che si abbia

$$T = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_v^2) + p_1 (E_{12} p_2 + \dots + E_{1v} p_v),$$

allora le equazioni (G') diverranno

$$\begin{aligned} 0 &= p'_1 = \sum_r \sum_k f_{rk}^{(r)} p_r (p_k + E_{1k} p_1) \\ p'_s &= \sum_r \sum_k f_{sk}^{(r)} p_r (p_k + E_{1k} p_1) + \sum_k f_{sk}^{(1)} p_1 (p_k + E_{1k} p_1) \\ &+ \sum_r f_{s1}^{(r)} p_r \left( p_1 + \sum_g E_{1g} p_g \right) + f_{s1}^{(1)} p_1 \left( p_1 + \sum_g E_{1g} p_g \right). \end{aligned}$$

In virtù della prima otterremo

$$(19) \quad f_{1k}^{(r)} + f_{1r}^{(k)} = 0$$

$$f_{1g}^{(1)} + \sum_k f_{1k}^{(g)} E_{1k} = 0,$$

quindi, con un calcolo facile, si avrà

$$\begin{aligned} (20) \quad p'_s &= \sum_r \sum_k (f_{sk}^{(r)} + f_{s1}^{(k)} E_{1r}) p_r (p_k + E_{1k} p_1) + \sum_k (f_{s1}^{(k)} + f_{sk}^{(1)}) p_1 (p_k + E_{1k} p_1) \\ &= \sum_r \sum_k g_{sk}^{(r)} p_r q_k + \sum_k \gamma_{sk} q_k \end{aligned}$$

ponendo

$$(21) \quad g_{sk}^{(r)} = f_{sk}^{(r)} + f_{s1}^{(k)}, \quad \gamma_{sk} = (f_{s1}^{(k)} + f_{sk}^{(1)}) p_1 \\ q_k = p_k + E_{1k} p_1.$$

Tenendo presente la relazione (19) si vede che le  $g_{sk}^{(r)}$  e le  $\gamma_{sk}^{(r)}$  saranno delle quantità costanti che cambiano segno per una trasposizione degli indici.

Le (20) potranno scriversi ancora

$$(20') \quad p'_s = \sum_k q_k \left( \sum_r g_{sk}^{(r)} p_r + \gamma_{sk} \right) = \sum_k q_k \left[ \sum_r g_{sk}^{(r)} q_r + \gamma_{sk} - \sum_r g_{sk}^{(r)} E_{1r} p_1 \right].$$

Poniamo

$$\gamma_{sk} - \sum_r g_{sk}^{(r)} E_{1r} p_1 = p_1 \left[ f_{s1}^{(k)} + f_{sk}^{(1)} - \sum_r g_{sk}^{(r)} E_{1r} \right] = l_{sk};$$

anche  $l_{sk}$  cambierà segno per una inversione degli indici, e le (20') diverranno

$$(20'') \quad q'_s = \sum_k \sum_r g_{sk}^{(r)} q_r q_k + \sum_k l_{sk} q_k.$$

Dalle (21) segue

$$T = \frac{1}{2} (q_2^2 + q_3^2 + \dots + q_v^2) + \text{cost.},$$

onde le (20'') assumeranno la forma

$$q'_s = \sum_k \sum_r g_{sk}^{(r)} q_r \frac{\partial T}{\partial q_k} + \sum_k l_{sk} \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

Eseguendo sulle  $q_2, q_3, \dots, q_v$  una sostituzione lineare qualunque che trasformi le caratteristiche nelle  $u_2, \dots, u_v$ , le equazioni precedenti si trasformeranno nelle

$$(H) \quad u'_s = \sum_k \sum_r m_{sk}^{(r)} u_r \frac{\partial T}{\partial u_k} + \sum_k n_{sk} \frac{\partial T}{\partial u_k} \quad (s = 2, 3, \dots, v)$$

in cui le  $m_{sk}^{(r)}$  e le  $n_{sk}$  cambiano segno per una trasposizione degli indici e si calcolano immediatamente dalle  $g_{sk}^{(r)}, l_{sk}$ .

3. Supponiamo ora che esista un secondo integrale di primo grado delle equazioni (G') indipendente da quello precedentemente considerato.

Potremo prendere sempre le cose in modo che esso si riduca ad

$$u_2 = \text{cost.}$$

ed allora, ripetendo un calcolo analogo a quello fatto precedentemente, le equazioni (H) si ridurranno ad un sistema di equazioni della forma

$$v'_s = \sum_k \sum_r \mu_{sk}^{(r)} v_r \frac{\partial T}{\partial v_k} + \sum_k \nu_{sk} \frac{\partial T}{\partial v_k} \quad (s = 3, 4, \dots, v)$$

ove le  $v$  sono legate linearmente alle  $u$ , e  $T$  risulta, a meno di una costante, una forma omogenea di secondo grado delle  $v$ .

In generale quando esistano  $g$  integrali indipendenti di primo grado delle equazioni del moto, esse potranno ridursi alla forma

$$(H') \quad z'_s = \sum_{\mathbf{r}}^{\lambda} \sum_{\mathbf{k}}^{\lambda} M_{s\mathbf{k}}^{(\mathbf{r})} z_{\mathbf{r}} \frac{\partial T}{\partial z_{\mathbf{k}}} + \sum_{\mathbf{k}}^{\lambda} N_{s\mathbf{k}} \frac{\partial T}{\partial z_{\mathbf{k}}}, \quad \begin{array}{l} s = 1, 2, \dots, \lambda \\ \lambda = v - g \end{array}$$

in cui  $M_{s\mathbf{k}}^{(\mathbf{r})}$  e  $N_{s\mathbf{k}}$  sono dei coefficienti costanti che cambiano segno per una trasposizione degli indici, e  $T$ , a meno di un termine costante, è una forma omogenea di 2° grado delle  $z$ , le quali sono legate linearmente alle variabili primitive  $p$ .

### § 9. — INTEGRALI DI SECONDO GRADO DELLE EQUAZIONI DEI MOTI SPONTANEI A CARATTERISTICHE INDIPENDENTI.

1. Una delle forme sotto le quali vennero poste le equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti è stata la seguente (cfr. § 7)

$$(G_1) \quad \dot{p}'_s = \sum_{\mathbf{r}}^v \sum_{\mathbf{k}}^v \varphi_{s\mathbf{k}}^{(\mathbf{r})} \frac{\partial F}{\partial p_{\mathbf{r}}} \frac{\partial T}{\partial p_{\mathbf{k}}}$$

ove  $F$  è una forma omogenea qualunque di secondo grado delle  $p$  a discriminante diverso da zero e a coefficienti costanti.

Supponiamo che si abbia, comunque siano gli indici e l'apice,

$$\varphi_{s\mathbf{k}}^{(\mathbf{r})} = -\varphi_{\mathbf{r}\mathbf{k}}^{(\mathbf{s})}.$$

Risulterà allora

$$\varphi_{s\mathbf{k}}^{(\mathbf{r})} = -\varphi_{\mathbf{k}\mathbf{s}}^{(\mathbf{r})} = \varphi_{\mathbf{r}\mathbf{s}}^{(\mathbf{k})} = -\varphi_{\mathbf{s}\mathbf{r}}^{(\mathbf{k})} = \varphi_{\mathbf{k}\mathbf{r}}^{(\mathbf{s})} = -\varphi_{\mathbf{r}\mathbf{k}}^{(\mathbf{s})},$$

onde ponendo

$$\varphi_{s\mathbf{k}}^{(\mathbf{r})} = \varphi_{s\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

la quantità  $\varphi_{s\mathbf{k}\mathbf{r}}$  cambierà segno per ogni trasposizione degli indici.

Le  $(G_1)$  diverranno

$$\dot{p}'_s = \sum_{\mathbf{r}}^v \sum_{\mathbf{k}}^v \varphi_{s\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial F}{\partial p_{\mathbf{r}}} \frac{\partial T}{\partial p_{\mathbf{k}}}$$

e quindi

$$\sum_{\mathbf{s}}^v \frac{\partial F}{\partial p_{\mathbf{s}}} \dot{p}'_s = 0$$

onde

$$F = \text{cost.}$$

Abbiamo dunque che  $F = \text{cost.}$  sarà un integrale delle equazioni  $(G_1)$ .

2. Supponiamo ora inversamente che il sistema di equazioni ( $G_i$ ) ammetta per integrale

$$F = \text{cost.}$$

Mediante una sostituzione lineare nelle  $p$

$$(22) \quad q_i = \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \alpha_{is} p_s$$

riduciamo contemporaneamente le due funzioni T ed F ad essere rispettivamente della forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} q_i^2$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \lambda_i q_i^2$$

e supponiamo che le  $\lambda_i$  risultino tutte diverse fra loro. Allora le ( $G_i$ ) diverranno

$$(23) \quad q'_s = \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \beta_{sk}^{(r)} \frac{\partial F}{\partial q_r} \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \beta_{sk}^{(r)} \lambda_r q_r q_k$$

avendo posto

$$\beta_{sk}^{(r)} = \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \varphi_{xy}^{(z)} \alpha_{sx} \alpha_{ky} \alpha_{rz}.$$

Ora dalle (23) segue

$$\sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \lambda_s q_s q'_s = \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \beta_{sk}^{(r)} \lambda_r \lambda_s q_r q_k q_s,$$

quindi se  $F = \text{cost.}$ , ossia se

$$\sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \lambda_s q_s q'_s = 0,$$

dovremo avere

$$\sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \sum_{\mathbf{I}}^{\mathbf{V}} \beta_{sk}^{(r)} \lambda_r \lambda_s q_r q_k q_s = 0$$

per ogni sistema di valori delle  $q$ .

Calcolando il coefficiente di  $q_r q_k q_s$  si trova

$$(\lambda_s \lambda_r - \lambda_k \lambda_r) \beta_{sk}^{(r)} + (\lambda_r \lambda_k - \lambda_s \lambda_k) \beta_{rs}^{(k)} + (\lambda_k \lambda_s - \lambda_r \lambda_s) \beta_{kr}^{(s)};$$

otterremo dunque le equazioni

$$(24) \quad \lambda_r \beta_{sk}^{(r)} (\lambda_s - \lambda_k) + \lambda_k \beta_{rs}^{(k)} (\lambda_r - \lambda_s) + \lambda_s \beta_{kr}^{(s)} (\lambda_k - \lambda_r) = 0.$$

3. - Abbiamo supposto le  $\lambda_i$  tutte diverse fra loro; dalla (24) può dunque dedursi

$$\lambda_r \beta_{sk}^{(r)} = C_{skr} + \lambda_r D_{skr}$$



in cui le costanti  $C_{skr}$  e  $D_{skr}$  sono quantità che cambiano segno per una trasposizione degli indici.

Sostituendo nelle (23) per  $\lambda_r \beta_{sk}^{(r)}$  i valori trovati e riducendo i termini simili esse si scriveranno

$$(23') \quad q'_s = \sum_r \sum_k D_{skr} \lambda_r q_r q_k = \sum_r \sum_k D_{skr} \frac{\partial F}{\partial q_r} \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

4. Siano ora

$$p_s = \sum_i A_{is} q_i$$

le inverse delle (22); posto

$$e_{skr} = \sum_x \sum_y \sum_z D_{xyz} A_{xs} A_{yk} A_{zr},$$

le (23') diverranno

$$p'_s = \sum_r \sum_k e_{skr} \frac{\partial T}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial p_r}$$

o anche

$$p'_s = \sum_{rk} e_{skr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}$$

denotando con  $\sum_{rk}$  la somma estesa a tutte le combinazioni a due a due degli indici  $r$  e  $k$ .

La dimostrazione fatta per ottenere queste equazioni presuppone che  $F$  sia una forma a discriminante diverso da zero. Ora tale restrizione evidentemente può togliersi, tenendo presente che all'integrale  $F = \text{cost.}$ , può sostituirsi l'altro  $F + KT = \text{cost.}$ , ove  $K$  è una costante arbitraria, ed osservando pure che le equazioni precedenti non si alterano mutando  $F$  in  $F + KT$ .

5. Scriviamo ora le due forme

$$T = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s E_{rs} p_r p_s$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \Lambda_{rs} p_r p_s.$$

Le  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$  saranno le radici dell'equazione di grado  $v$  in  $\lambda$

$$(K) \quad \begin{vmatrix} \Lambda_{11} - \lambda E_{11}, & \Lambda_{12} - \lambda E_{12}, & \dots, & \Lambda_{1v} - \lambda E_{1v} \\ \Lambda_{21} - \lambda E_{21}, & \Lambda_{22} - \lambda E_{22}, & \dots, & \Lambda_{2v} - \lambda E_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{v1} - \lambda E_{v1}, & \Lambda_{v2} - \lambda E_{v2}, & \dots, & \Lambda_{vv} - \lambda E_{vv} \end{vmatrix} = 0;$$

potremo dunque enunciare il teorema:

*Posto*

$$T = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s E_{rs} p_r p_s$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \Lambda_{rs} \dot{p}_r \dot{p}_s,$$

se l'equazione algebrica (K) non ammette radici eguali, la condizione necessaria e sufficiente affinché un moto spontaneo a caratteristiche indipendenti avente T per forza viva, ammetta l'integrale  $F = \text{cost.}$  è che le equazioni del moto siano della forma

$$(I) \quad \dot{p}'_s = \sum_{rk} e_{skr} \frac{d(T, F)}{d(\dot{p}_k, \dot{p}_r)}$$

in cui le  $e_{skr}$  sono costanti che cambiano segno per una trasposizione degli indici.

Chiameremo la equazione (K) la equazione determinante.

6. Allorché le equazioni differenziali assumono la forma (I), ogni nuovo integrale  $\Phi = \text{cost.}$ , dovendo verificare l'equazione

$$\sum_s \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{p}_s} \dot{p}'_s = 0,$$

dovrà esser tale che

$$\sum_{skr} e_{skr} \frac{d(T, F, \Phi)}{d(\dot{p}_s, \dot{p}_k, \dot{p}_r)} = 0$$

in cui  $\sum_{skr}$  denota una somma ottenuta facendo tutte le combinazioni tre a tre degli indici  $s, k, r$ .

#### § 10. — INTEGRALI DI PRIMO E DI SECONDO GRADO DELLE EQUAZIONI DEI MOTI SPONTANEI A CARATTERISTICHE INDIPENDENTI.

1. Se le equazioni del moto ammettono un integrale di secondo grado non omogeneo, si vede immediatamente che debbono essere separatamente integrali dell'equazione la parte di primo e quella di secondo grado.

Supponiamo di valerci di tutti gl'integrali di primo grado che si possono conoscere per ridurre le equazioni differenziali del moto alla forma (cfr. § 8)

$$(H'') \quad \dot{q}'_s = \sum_k \sum_r a_{sk}^{(r)} q_k q_r + \sum_k b_{sk} q_k.$$

L'integrale delle forze vive avrà allora la forma

$$(25) \quad T + \text{cost.} = \frac{1}{2} \sum_s q_s^2 = \text{cost.}$$

Supponiamo che esista un integrale di secondo grado

$$(26) \quad F(q_1, q_2, q_3, \dots) = \text{cost.}$$

Per mezzo di una sostituzione ortogonale nelle  $q$ , potrà sempre ridursi questo integrale a mancare dei termini contenenti i rettangoli delle variabili senza che perciò si alteri la forma delle equazioni (H''), né quella dell'inte-

grale (25). Potremo dunque supporre senz'altro che l'integrale (26) abbia la forma

$$(26') \quad F = \frac{1}{2} (\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \dots) + \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2 + \dots = \text{cost.}$$

Ammettiamo che le  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  siano tutte diverse fra loro; moltiplicando rispettivamente le (H'') per  $\lambda_s q_s + \mu_s$  e sommando si avrà, in virtù della (26'),

$$(27) \quad \sum_s \sum_k \sum_r \lambda_s a_{sk}^{(r)} q_s q_k q_r = 0$$

$$(27') \quad \sum_s \sum_k \sum_r a_{sk}^{(r)} \mu_s q_k q_r + \sum_s \sum_k b_{sk} \lambda_s q_s q_k = 0$$

$$(27'') \quad \sum_s \sum_k b_{sk} \mu_s q_k = 0.$$

Dalle (27) segue

$$(\lambda_s - \lambda_k) a_{sk}^{(r)} + (\lambda_r - \lambda_s) a_{rs}^{(k)} + (\lambda_k - \lambda_r) a_{kr}^{(s)} = 0$$

e quindi

$$a_{sk}^{(r)} = C_{skr} + \lambda_r D_{skr}$$

ove le  $C_{skr}$  e  $D_{skr}$  cambiano segno per ogni trasposizione degli indici.

La (27') dunque si scriverà

$$\sum_s \sum_k q_s q_k [b_{sk} - \sum_r \mu_r D_{skr}] \lambda_s = 0$$

e quindi

$$(\lambda_s - \lambda_k) [b_{sk} - \sum_r \mu_r D_{skr}] = 0$$

da cui segue

$$b_{sk} = \sum_r D_{skr} \mu_r.$$

Questi valori delle  $b_{sk}$  verificano evidentemente le (27'').

Le (H'') potranno dunque scriversi

$$\begin{aligned} q'_s &= \sum_k \sum_r D_{skr} \lambda_r q_k q_r + \sum_k \sum_r D_{skr} q_k \mu_r \\ &= \sum_k \sum_r D_{skr} q_k (\lambda_r q_r + \mu_r) = \sum_k \sum_r D_{skr} \frac{\partial T}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial q_r}. \end{aligned}$$

Eseguendo sopra le  $q$  una sostituzione lineare qualsiasi che conduca alle  $p$ , avremo che la forma delle equazioni non cambierà e si otterrà

$$(L) \quad p'_s = \sum_k \sum_r e_{skr} \frac{\partial T}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial p_r} = \sum_{kr} e_{skr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}$$

ove le  $e_{skr}$  saranno quantità che cambieranno segno per una trasposizione degli indici.

## § II. - TEOREMA GENERALE SULLA INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DEI MOTI SPONTANEI A CARATTERISTICHE INDIPENDENTI.

I. - Prendiamo le equazioni sotto la forma (vedi § 9)

$$(I) \quad p'_s = \sum_{kr} e_{skr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}.$$

Si verifica facilmente che

$$\begin{aligned} & \sum_s \frac{\partial}{\partial p_s} \sum_{kr} e_{skr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)} \\ &= \sum_{skr} e_{skr} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_s} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)} + \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d(T, F)}{d(p_r, p_s)} + \frac{\partial}{\partial p_r} \frac{d(T, F)}{d(p_s, p_k)} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Dunque il sistema di equazioni differenziali

$$(I') \quad \frac{dp_1}{\sum_{kr} e_{1kr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}} = \frac{dp_2}{\sum_{kr} e_{2kr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}} = \frac{dp_3}{\sum_{kr} e_{3kr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}} = \dots$$

ammette il moltiplicatore 1.

2. Il numero dei parametri  $p_1, p_2, \dots$  di un sistema a caratteristiche indipendenti se ne dirà l'ordine. Supponiamo che il sistema che si considera sia di ordine  $\nu$  e che si conoscano  $\nu - 4$  integrali delle (I) indipendenti dal tempo e dai due integrali quadratici  $T = \text{cost.}$ ,  $F = \text{cost.}$  Tenendo conto di questi due integrali, avremo che si conosceranno  $\nu - 2$  integrali del sistema (I'), e siccome se ne conosce un moltiplicatore, così con una quadratura potremo ottenere l'ultimo integrale. Determinati così  $\nu - 1$  integrali delle (I) indipendenti dal tempo con una ulteriore quadratura avremo l'equazione del tempo.

Possiamo dunque enunciare il teorema: *Se, oltre l'integrale delle forze vive, si conoscono  $\nu - 3$  integrali indipendenti dal tempo delle equazioni d'un moto spontaneo a caratteristiche indipendenti d'ordine  $\nu$ , ed uno di essi è un integrale di secondo grado (la cui equazione determinante abbia radici diseguali) la determinazione delle caratteristiche si riduce alle quadrature.*