Sur les points de rencontre de deux courbes.

Par

S. Saks (Varsovie).

M. Ważewski a démontré le théorème suivant[1]): *soient* $f_i(s), g_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $2n$ *fonctions dérivables resp. dans les ensembles* A, B. *Céci étant, il existe dans* A *et* B *deux sous-ensembles de mesure nulle* A_1 *et* B_1 *tels que l'ordre de la matrice*

$$\left\| \begin{matrix} f'_1(s), \ldots, f'_n(s) \\ g'_1(t), \ldots, g'_n(t) \end{matrix} \right\|$$

soit inférieur à 2 *lorsque*

1° s, t *appartiennent resp. à* $A - A_1$ *et* $B - B_1$;

2° $f_i(s) = g_i(t)$, *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Nous allons donner à cette proposition une démonstration qui est presque immédiate et qui prouve à la fois que les ensembles A_1, B_1 signalés par M. Ważewski comme de mesure nulle, sont en réalité *au plus dénombrables*[2]).

Nous traiterons le cas $n = 2$, d'où l'on passe immédiatement, par induction, au cas général.

---

[1]) Ważewski. *Un théorème sur les fonctions dérivables*, *Ann. Soc. Pol. Math.*, t. 6, (1927), p. 83; aussi: *Comptes Rendus du 1er Congrès Pol. des Mathém.*, (1929), p. 115.

[2]) On prouve tout pareillement l'énoncé suivant, d'ailleurs presque équivalent: *si* $C : p = p(s)$ *et* $C_1 : q = q(t)$ *sont deux courbes admettant la tangente pour toutes les valeurs* $s \epsilon A$, *resp.* $t \epsilon B$, *il existe un sous-ensemble au plus dénombrable* A_1 *de* A, *tel que lorsque* $s_0 \epsilon A - A_1$, $t_0 \epsilon B$ *et* $p(s_0) = q(t_0)$, *alors les tangentes resp. aux courbes* C *et* C_1 *et correspondant resp. aux points* s_0 *et* t_0, *coïncident également.*

Soit donc

$$f_1(s), \quad f_2(s)$$
$$g_1(t), \quad g_2(t)$$

deux couples de fonctions définies et dérivables resp. dans les ensembles A et B. Posons

$$W(s,t) = f_1'(s)g_2'(t) - f_2'(s)g_1'(t).$$

Nous prouverons qu'il *existe un ensemble au plus dénombrable* $A_1 \subset A$ *tel que*

$$W(s,t) = 0 \tag{1}$$

lorsque

$$1^0 \quad s \epsilon A - A_1,$$
$$2^0 \quad f_1(s) = g_1(t), \qquad f_2(s) = g_2(t).$$

On peut supposer évidemment que pour toutes les valeurs $s \epsilon A$, $t \epsilon B$

$$\begin{aligned} &[f_1'(s)]^2 + [f_2'(s)]^2 > 0 \\ &[g_1'(t)] \;\; + [g_2'(t)]^2 > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

car, lorsqu'une au moins de ces inégalités est en défaut, on a forcément $W(s,t) = 0$.

Ceci étant, soit A_1 l'ensemble des valeurs $s \epsilon A$ telles que pour chacune d'elles il y ait une valeur $t(s)$ de la variable t telle que

$$f_1(s) = g_1[t(s)], \quad f_2(s) = g_2[t(s)], \tag{3}$$

$$W[s, t(s)] \neq 0. \tag{4}$$

Supposons que A_1 soit non-dénombrable.

Soit M l'ensemble plan de points $[s, t(s)]$ où $s \epsilon A_1$. A_1 étant non-dénombrable, l'ensemble M l'est également; il contient, par conséquent, des points d'accumulation; soit $[s_0, t(s_0)]$ un tel point de M.

Il existe donc une suite de valeurs s_n tels que

$$s_n \to s_0, \quad t(s_n) \to t(s_0), \tag{5}$$

$$s_n \neq s_0, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \dots \tag{6}$$

Parmi les indices n il n'y a qu'un nombre fini de valeurs pour lesquelles $t_n(s) = t(s_0)$: en effet, dans le cas contraire, il existerait une suite infinie de valeurs n_k telles que

$$t(s_{n_k}) = t(s_0)$$

et l'on aurait, en vertu de (5), pour chaque k,

$$f(s_{n_k}) = g_1[t(s_{n_k})] = g_1[t(s_0)] = f_1(s_0),$$

et, tout pareillement,

$$f_2(s_{n_k}) = f_2(s_0),$$

d'où, en raison de (5) et (6),

$$f_1'(s) = f_2'(s_0) = 0$$

contrairement à (2).

Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les $t(s_n)$ diffèrent de $t(s_0)$, donc, en raison de (2), (5) et (3)

$$\frac{f_1'(s_0)}{f_2'(s_0)} = \lim_n \frac{f_1(s_n) - f_1(s_0)}{f_2(s_n) - f_2(s_0)} = \lim_n \frac{g_1[t(s_n)] - g_1[t(s_0)]}{g_2[t(s_n)] - g_2[t(s_0)]} = \frac{g_1'[t(s_0)]}{g_2'[t(s_0)]},$$

d'où évidemment

$$W[s_0, t(s_0)] = 0$$

contrairement à (1).

L'ensemble exceptionnel A_1 est donc au plus dénombrable ce qui prouve notre assertion.