52.

SUR LES DÉTERMINANTS COMPOSÉS.

[*Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, LXXXVIII. (1880), pp. 49—67.]

DANS l'article qui va suivre je m'occuperai de la théorie des déterminants composés, regardée sous un point de vue très général. Comme on sait, les déterminants composés sont des déterminants dont les éléments sont eux-mêmes des déterminants puisés dans la même matrice ou, ce qui est la même chose*, des sous-déterminants ou déterminants-mineurs d'un même déterminant primitif.

Servons-nous en premier lieu de la notation ombrale ordinaire pour représenter un déterminant simple—dans cette notation *une ligne double* c. à d. une paire de lignes de n ombres

$$\begin{matrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \end{matrix}$$

servira à représenter un déterminant du n^{me} ordre. On peut aussi se servir avantageusement de la notation

$$a_1 a_2 \dots a_n \divideontimes \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

pour représenter la même chose.

Un système de n quantités a étant donné, on se sert ordinairement de la notation

$$\Sigma a_1;\ \Sigma a_1 a_2;\ \dots$$

pour signifier $a_1 + a_2 + \dots + a_n;\ a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n;\ \dots$
En changeant un peu cette notation, les expressions

$$\Sigma a_1,\ \Sigma a_1 a_2,\ \dots$$

seront employées pour représenter l'ensemble des termes

$$(a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n),\ (a_1 a_2,\ a_1 a_3,\ \dots\ a_{n-1} a_n),\ \dots$$

au lieu de leur somme.

* Autant que la matrice est quadratique et non rectangulaire.

Un déterminant composé qui se rapporte à une seule ligne double

$$\begin{array}{c} a_1 a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{array}$$

sera représenté par la notation:

$$\Sigma a_1 a_2 \ldots a_i, \ \divideontimes\ \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i.$$

Soit p. e. $n = 4$, la notation

$$\Sigma a_1 a_2 a_3, \ \divideontimes\ \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3,$$

signifiera le déterminant composé

$$\begin{array}{cccc}
a_1 a_2 a_3 & a_1 a_2 a_4 & a_1 a_3 a_4 & a_2 a_3 a_4 \\
\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\
a_1 a_2 a_3 & a_1 a_2 a_4 & a_1 a_3 a_4 & a_2 a_3 a_4 \\
\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \\
a_1 a_2 a_3 & a_1 a_2 a_4 & a_1 a_3 a_4 & a_2 a_3 a_4 \\
\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 & \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 & \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 & \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 \\
a_1 a_2 a_3 & a_1 a_2 a_4 & a_1 a_3 a_4 & a_2 a_3 a_4 \\
\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 & \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 & \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 & \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.
\end{array}$$

Ce déterminant est du 4^me^ ordre par rapport aux lignes doubles qui forment ses éléments et qui sont elles-mêmes des déterminants simples du 3^me^ ordre. La notation

$$\Sigma a_1 a_2, \ \divideontimes\ \Sigma \alpha_1 \alpha_2,$$

signifiera de même un déterminant du 4^me^ ordre dont les éléments sont des déterminants simples du 2^me^ ordre. Enfin la notation

$$\Sigma a_1, \ \divideontimes\ \Sigma \alpha_1,$$

signifiera le déterminant

$$\begin{array}{cccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
\alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
\alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_4.
\end{array}$$

La dernière notation étant équivalente à

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \ \divideontimes\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$$

représente le même déterminant que l'on écrit plus simplement sous la forme

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \ \divideontimes\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.$$

L'identité des valeurs de

$$\Sigma a_1, \divideontimes \Sigma \alpha_1, \text{ et de } a_1 a_2 \ldots a_n \divideontimes \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

est un cas particulier (le cas extrême) d'un théorème général qui se rapporte aux déterminants composés à une seule ligne double (et que je nommerai déterminants composés à un seul argument). Dans le cas de n ombres a et d'autant d'ombres α le théorème relatif à cette classe (la plus simple qu'on puisse former) de déterminants composés s'énonce comme il suit:

$$\Sigma a_1 a_2 \ldots a_i, \divideontimes \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i, = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}^{\frac{n-1 \,.\, n-2 \ldots n-i+1}{1 \,.\, 2 \ldots i-1}}.$$

Ainsi si $i + j = n + 1$ on aura

$$\Sigma a_1 a_2 \ldots a_i, \divideontimes \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i, = \Sigma a_1 a_2 \ldots a_j, \divideontimes \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_j;$$

car l'indice de la puissance de

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$$

a la même valeur $\dfrac{\Pi(n-1)}{\Pi(i-1)\,\Pi(j-1)}$ dans les deux cas.

Un cas bien connu de ce théorème est celui où $i = n - 1$. Dans ce cas l'indice de la puissance

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$$

devient $n - 1$; c'est le théorème qui affirme qu'en désignant par D un déterminant du n^{me} ordre et par Δ le déterminant dont les éléments sont les dérivées de D par rapport à ses éléments, on aura $\Delta = D^{n-1}$*.

Avant de passer au théorème plus général qui se rapporte aux déterminants composés à un nombre quelconque de lignes doubles (ou disons plutôt à un nombre quelconque d'arguments) considérons d'abord un cas spécial qui est d'un grand intérêt par les applications qu'il admet, à savoir le cas dans lequel on attache à chaque ligne double dans le développement de

$$\Sigma a_1 a_2 \ldots a_i, \divideontimes \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i,$$

une ligne double constante

$$\begin{matrix} b_1 b_2 \ldots b_p \\ \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p. \end{matrix}$$

La matrice ainsi modifiée peut être désignée par la notation

$$[b_1 b_2 \ldots b_p \Sigma a_1 a_2 \ldots a_i,] \divideontimes [\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i,].$$

* Le théorème pour les valeurs générales de i a été retrouvé récemment et inséré dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* par un auteur distingué; depuis on a porté à sa connaissance que j'avais déjà publié le même théorème dans le *Philosophical Magazine* de 1851. [Vol. I. of this Reprint, p. 252.]

Pour $n=2$ et $p=2$ la notation

$$[b_1 b_2 \Sigma a_1,] \divideontimes [\beta_1 \beta_2 \Sigma \alpha_1,]$$

représentera p. e. le déterminant:

$$\begin{array}{cc} b_1\, b_2\, a_1 & b_1\, b_2\, a_2 \\ \beta_1 \beta_2 \alpha_1 & \beta_1 \beta_2 \alpha_1 \\ b_1\, b_2\, a_1 & b_1\, b_2\, a_2 \\ \beta_1 \beta_2 \alpha_2 & \beta_1 \beta_2 \alpha_2. \end{array}$$

Cette classe de déterminants composés peut être désignée sous le nom de déterminants composés *à deux arguments dont l'un est non-distribué.*

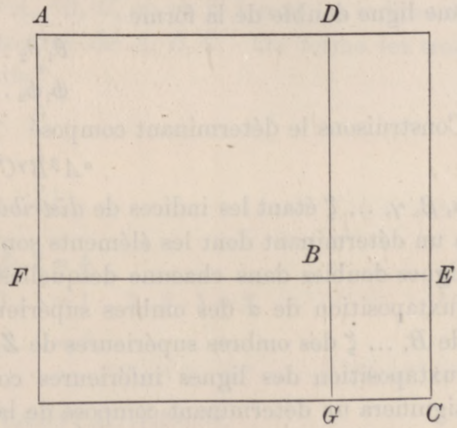
Je nommerai p et n les indices de l'étendue de B et de A respectivement et i l'indice de distribution de A; je me servirai pour le déterminant de la notation $B_p \,.\, {}^i A_n$; cela posé, je dis que l'on a*

$$B_p \,.\, {}^i A_n = B^\sigma (AB)^\tau,$$

où $\sigma = \dfrac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}{1.2\ldots i}$, $\tau = \dfrac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots(i-1)}$.

Il y a deux cas particuliers qui présentent un intérêt spécial, ce sont les cas de $i=n-1$ et de $i=1$.

Dans le premier cas on a $\sigma=1$, $\tau=n-1$, dans le second $\sigma=n-1$, $\tau=1$. Le premier cas de $i=n-1$ donne le théorème auquel on est parvenu antérieurement. Le cas de $i=1$ fournit une preuve immédiate de la règle connue pour trouver la valeur du déterminant de la matrice qui résulte de la multiplication de deux matrices carrées ou rectangulaires, comme on verra facilement à l'aide du diagramme suivant.



Imaginons que AB soit rempli de n lignes et de n colonnes, DE de n lignes et de p colonnes, FG de n colonnes et de p lignes d'éléments quelconques, enfin BC de p lignes et de p colonnes de zéros. Cela posé, et en se servant de AB, AC pour représenter les déterminants des éléments qui se trouvent dans ces carrés, le produit $(AB)^{n-1}\, AC$ sera égal au déterminant composé dont chaque élément est le déterminant du carré AB bordé par l'une des n colonnes de DE et par l'une des n lignes de FG.

Supposons que tous les éléments de AB s'évanouissent à l'exception des n éléments qui se trouvent dans la diagonale AB, et que ces derniers soient égaux à l'unité. Dans ce cas, si n est plus petit que p, le déterminant AC

[* As proved, pp. 249, 650 of Vol. I. of this Reprint.]

s'évanouira; de plus le carré AB bordé de la colonne $c_1c_2 \dots c_n$ et de la ligne $l_1l_2 \dots l_n$ produira le déterminant

$$(c_1, c_2, \dots c_n)(l_1, l_2, \dots l_n) \text{ c. à d. } c_1l_1 + c_2l_2 + \dots + c_nl_n:$$

de là on tire la conséquence que si l'on multiplie deux matrices rectangulaires selon la direction de leurs axes mineurs, le déterminant qui en résulte est égal à zéro. Dans le cas contraire où n est égal ou plus grand que p, AC devient la somme des produits de chaque déterminant de l'ordre p puisé dans DE multiplié par le déterminant correspondant puisé dans FG: et dans le cas particulier de $n = p$, c. à d. lorsque les matrices DE, FG deviennent des carrés, cette somme de produits se réduit au produit des déterminants DE, FG: ce qui est la règle élémentaire de multiplication des déterminants.

Voilà le point extrême jusqu'auquel j'avais précédemment avancé la théorie des déterminants composés—c. à d. jusqu'au cas dans lequel une ligne double non-distribuée s'attache comme une espèce de caput-mortuum aux lignes doubles puisées dans les combinaisons des ombres supérieures avec des ombres inférieures d'une seule ligne double: mais en y réfléchissant je me suis senti dans la nécessité morale d'étendre la théorie d'abord au cas où toutes les deux lignes doubles sont distribuées et puis au cas le plus général où l'on puise dans un nombre quelconque de lignes doubles les combinaisons des ombres supérieures et inférieures (chaque combinaison d'un ordre donné), et je vais donner l'expression générale des déterminants ainsi composés en termes des déterminants simples qui correspondent aux lignes doubles prises séparément ou combinées d'une manière quelconque entr'elles. Soient $A, B, C, \dots L, M, \dots Z$ un nombre quelconque i de lignes doubles; soient $a, b, c, \dots l, m, \dots z$ leurs indices d'étendue: ainsi par exemple A représentera une ligne double de la forme

$$\theta_1 \theta_2 \dots \theta_a$$
$$\phi_1 \phi_2 \dots \phi_a.$$

Construisons le déterminant composé

$$^{\alpha}A^{\beta}B^{\gamma}C \dots {}^{\zeta}Z,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots \zeta$ étant les indices de *distribution* de $A, B, C, \dots Z$, c. à d. que l'on a un déterminant dont les éléments sont des déterminants représentés par des lignes doubles dans chacune desquelles la ligne supérieure est formée par la juxtaposition de α des ombres supérieures de A, β des ombres supérieures de B, ... ζ des ombres supérieures de Z, et de même la ligne inférieure par la juxtaposition des lignes inférieures correspondantes: par exemple $^{\alpha}A^{\beta}B^{\gamma}C$ signifiera un déterminant composé de la forme

$$\Sigma p_1p_2 \dots p_\alpha, \times \Sigma q_1q_2 \dots q_\beta, \times \Sigma r_1r_2 \dots r_\gamma$$
$$\divideontimes \Sigma p_1'p_2' \dots p_\alpha', \times \Sigma q_1'q_2' \dots q_\beta', \times \Sigma r_1'r_2' \dots r_\gamma'.$$

Or je dis que le déterminant $^{\alpha}A^{\beta}B^{\gamma}C \dots {}^{\zeta}Z$ sera* un produit des puissances de

[* See however, Borchardt: *Remarque relative au mémoire de M. Sylvester sur les déterminants composés*, *Crelle*, Bd. LXXXIX. (1880).]

A, de B, ... de Z, de AB, AC, BC, ... AZ, BZ, CZ et en général des lignes doubles en nombre $2^i - 1$ qu'on peut former par la juxtaposition de toutes les manières possibles d'un nombre quelconque des A, B, ... Z.

Pour obtenir les exposants de ces puissances voici la règle. Servons-nous en général de la notation (l, λ) pour réprésenter le nombre du binôme

$$\frac{l\,(l-1)\ldots(l-\lambda+1)}{1\,.\,2\ldots\lambda},$$

et posons $$(a-1,\alpha)(b-1,\beta)\ldots(z-1,\zeta)=\varpi,$$

l'exposant de la puissance de $AB\ldots L$ sera

$$\frac{(a-1,\alpha-1)(b-1,\beta-1)\ldots(l-1,\lambda-1)}{(a-1,\alpha)(b-1,\beta)\ldots(l-1,\lambda)}\varpi.$$

Comme vérification numérique je remarquerai que l'on a

$$\frac{(a-1,\alpha)}{(a-1,\alpha-1)}=\frac{a-\alpha}{\alpha}.$$

Or en regardant une puissance P^n comme répétition n-tuple de P, on verra facilement que dans le produit de puissances donné ci-dessus le nombre de fois que les combinaisons α^{mes} des ombres de A et les combinaisons β^{mes} des ombres de B etc. se trouvent répétées, sera le produit de toutes les quantités de la forme

$$(a-1,\alpha-1)\left(1+\frac{(a-1,\alpha)}{(a-1,\alpha-1)}\right)=\frac{a}{\alpha}(a-1,\alpha-1)=(a,\alpha),$$

résultat qui s'accorde bien avec la remarque que l'ordre du déterminant composé dont il est question est évidemment égal au produit $(a,\alpha)\,(b,\beta)\ldots(z,\zeta)$.

Je conclurai en appliquant à un exemple le théorème énoncé ci-dessus. Considérons le déterminant composé ${}^mA_m\,{}^2B_3\,{}^1C_3$ où m, 2, 1 sont les indices de distribution et m, 3, 3 les indices d'étendue de A, B, C. On forme les trois couples de nombres binômes consécutifs *

$$\begin{matrix}1, & 0\\ 2, & 1\\ 1, & 2\,;\end{matrix}$$

alors en remarquant que

$$\begin{gathered}1\,.\,1\,.\,2=2,\quad 1\,.\,2\,.\,2=4,\\ 2\,.\,0\,.\,2=0,\quad 1\,.\,1\,.\,1=1,\quad 1\,.\,2\,.\,1=2,\\ 1\,.\,0\,.\,1=0,\quad 1\,.\,2\,.\,0=0,\end{gathered}$$

on en déduit la conséquence que

$${}^mA_m\,{}^2B_3\,{}^1C_3=A^2\,(AB)^4\,(AC)\,(ABC)^2.$$

Soient $$A=\frac{a_1a_2\ldots a_m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m},\quad B=\frac{b_1\,b_2\,b_3}{\beta_1\beta_2\beta_3},\quad C=\frac{c_1\,c_2\,c_3}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3},$$

* On remarquera que 1, 2 sont les coefficients de t^0, t^1 dans $(1+t)^{3-1}$, 2, 1 de t^1, t^2 dans $(1+t)^{3-1}$ et 1, 0 de t^{m-1}, t^m dans $(1+t)^{m-1}$.

on aura le déterminant composé du 9^{me} ordre dont la première ligne est

$$\frac{a_1\ldots a_m\, b_1\, b_2\, c_1}{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\gamma_1},\ \frac{a_1\ldots a_m\, b_1\, b_2\, c_2}{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\gamma_1},\ \frac{a_1\ldots a_m\, b_1\, b_2\, c_3}{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\gamma_1},\ \frac{a_1\ldots a_m\, b_1\, b_3\, c_1}{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\gamma_1},\ \frac{a_1\ldots a_m\, b_1\, b_3\, c_2}{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\gamma_1},$$

$$\frac{a_1\ldots a_m\, b_1\, b_3\, c_3}{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\gamma_1},\ \frac{a_1\ldots a_m\, b_2\, b_3\, c_1}{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\gamma_1},\ \frac{a_1\ldots a_m\, b_2\, b_3\, c_2}{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\gamma_1},\ \frac{a_1\ldots a_m\, b_2\, b_3\, c_3}{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\gamma_1},$$

et dont on forme les autres lignes en remplaçant $\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\gamma_1$ successivement par

$$\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\gamma_2,\quad \alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_3\gamma_1,\quad \alpha_1\ldots\alpha_m\beta_2\beta_3\gamma_1,$$

$$\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\gamma_3,\quad \alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_3\gamma_2,\quad \alpha_1\ldots\alpha_m\beta_2\beta_3\gamma_2,$$

$$\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\beta_3\gamma_3,\quad \alpha_1\ldots\alpha_m\beta_2\beta_3\gamma_3.$$

La valeur de ce déterminant est donnée par le produit:

$$\binom{a_1 a_2\ldots a_m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}^2\binom{a_1 a_2\ldots a_m b_1\, b_2\, b_3}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\beta_3}^4\binom{a_1 a_2\ldots a_m\, c_1\, c_2\, c_3}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\binom{a_1 a_2\ldots a_m\, b_1\, b_2\, b_3\, c_1\, c_2\, c_3}{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3}^2.$$

Le théorème général énoncé ci-dessus contient le résultat le plus général sur l'évaluation des déterminants composés du deuxième rang, c. à d. des déterminants dont les éléments sont des déterminants simples. On pourrait étendre ces recherches aux déterminants du 3^{me} rang, c. à d. dont les éléments sont des déterminants du 2^{me} rang, et même aux déterminants composés d'un rang quelconque.

J'introduirai une légère modification dans l'énoncé du théorème général. On peut toujours supposer qu'aux i arguments distribués désignés par $A, B, \ldots Z$ soit associé un $i+1^{me}$ argument non distribué Ω, bien entendu que dans un cas donné ce dernier peut disparaître. On n'a pas besoin de supposer l'existence de plus d'un seul argument non distribué, parce que, s'il y en avait plusieurs, on pourrait toujours les réunir en un seul.

Soient $a, b, \ldots z$ les indices d'étendue et $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ les indices de distribution des arguments $A, B, \ldots Z$, et désignons comme ci-dessus par (a, α) le nombre binôme

$$(a, \alpha) = \frac{a\,.\,a-1\ldots a-\alpha+1}{1\,.\,2\ldots\alpha},$$

par ϖ le produit

$$\varpi = (a-1, \alpha)\,(b-1, \beta)\ldots(z-1, \zeta),$$

et par $a', b', \ldots z'$ les quotients

$$a' = \frac{\alpha}{a-\alpha},\ b' = \frac{\beta}{b-\beta},\ \ldots z' = \frac{\zeta}{z-\zeta}.$$

Cela posé, le théorème général pour l'évaluation des déterminants composés prendra la forme:

$$(\Omega^{\alpha}A_a{}^{\beta}B_b\ldots{}^{\zeta}Z_z) = P^{\varpi},$$

P désignant le produit des 2^i facteurs

$$\begin{array}{l}(\Omega) \\ (\Omega A)^{a'}(\Omega B)^{b'}\dots(\Omega Z)^{z'} \\ (\Omega AB)^{a'b'}(\Omega AC)^{a'c'}\dots(\Omega BC)^{b'c'}\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\Omega AB\dots Z)^{a'b'\dots z'}.\end{array}$$

Quand Ω disparaît il faut remplacer (Ω) par l'unité.

Cette formule s'écrit plus aisément sous la forme logarithmique suivante:

$$\frac{1}{\varpi}\cdot\log\left(\Omega^{a}A_{a}{}^{\beta}B_{b}\dots{}^{\zeta}Z_{z}\right)=\log(\Omega)+\Sigma\frac{\alpha}{a-\alpha}\log(\Omega A)$$
$$+\Sigma\frac{\alpha}{a-\alpha}\cdot\frac{\beta}{b-\beta}\log(\Omega AB)+\dots+\frac{\alpha}{a-\alpha}\cdot\frac{\beta}{b-\beta}\dots\frac{\zeta}{z-\zeta}\log(\Omega AB\dots Z),$$

les sommations s'étendant à tous les expressions semblables.

Il est bon de remarquer que la valeur du déterminant simple représenté par la juxtaposition d'un nombre quelconque d'arguments A, B, ... ne dépend, ni pour sa valeur, ni pour son signe algébrique, de l'ordre de la juxtaposition, car on a $(AB)=(BA)$ et de même pour un nombre quelconque d'arguments.

Pour donner une idée nette du théorème général, faisons disparaître Ω et considérons le cas de trois arguments A, B, C aux indices d'étendue a, b, c et aux indices de distribution α, β, γ. Dans la figure les carrés A, B, C correspondent aux déterminants (A), (B), (C); $AMBM'$, $AN'CN$, $BPCP'$ aux déterminants (AB), (AC) (BC); enfin le carré complet au déterminant (ABC).

A	M	N'
M'	B	P
N	P'	C

Les éléments du déterminant composé ${}^{\alpha}A_{a}{}^{\beta}B_{b}{}^{\gamma}C_{c}$ sont des déterminants simples de l'ordre $\alpha+\beta+\gamma$, formés avec

$$\alpha^2,\ \alpha\beta,\ \alpha\gamma,\ \beta\alpha,\ \beta^2,\ \beta\gamma,\ \gamma\alpha,\ \gamma\beta,\ \gamma^2,$$

éléments puisés respectivement dans

$$A,\ M,\ N',\ M',\ B,\ P,\ N,\ P',\ C.$$

Les éléments des déterminants simples se trouvent aux intersections de

α lignes qui passent par A, M, N',
β „ „ „ „ M', B, P,
γ „ „ „ „ N, P', C,

avec $\quad\alpha$ colonnes qui passent par A, M', N,

β „ „ „ „ M, B, P',

γ „ „ „ „ N', P, C.

Posons $\quad \alpha' = a - \alpha, \quad \beta' = b - \beta, \ \ldots \ \zeta' = z - \zeta$

et nommons déterminants complémentaires du déterminant $({}^{\alpha}\Omega A_a {}^{\beta} B_b \ldots {}^{\zeta} Z_z)$ tous ceux dans lesquels un nombre quelconque d'indices de distribution $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ sont remplacées par leurs indices complémentaires $\alpha', \beta', \ldots \zeta'$. Cela posé, il existe une relation très-simple qui lie ensemble les 2^i déterminants complémentaires. En effet, en ajoutant les expressions que fournit le théorème général pour le logarithme de chacun de ces 2^i déterminants composés on trouve par un calcul facile que la somme de ces logarithmes est égale à

$$\frac{\Pi a \,.\, \Pi b \ldots \Pi z}{\Pi\alpha \,.\, \Pi\alpha' \,.\, \Pi\beta \,.\, \Pi\beta' \ldots \Pi\zeta \,.\, \Pi\zeta'} \{\log(\Omega) + \Sigma \log(\Omega A) + \Sigma \log(\Omega A B) + \ldots$$
$$+ \log(\Omega A B \ldots Z)\}.$$

La quantité, qui se trouve en parenthèse, étant indépendante de $\alpha, \beta, \ldots \zeta$, on est arrivé à ce résultat remarquable: de quelque manière que l'on fasse la partition en deux nombres

$$\alpha, \alpha', \ \beta, \beta', \ \ldots \ \zeta, \zeta'$$

des nombres donnés $a, b, \ldots z$, la somme des logarithmes des 2^i déterminants mutuellement complémentaires sera toujours, à un facteur numérique près, la même.

En faisant disparaître dans le théorème général l'argument non-distribué Ω, on revient à la forme première dans laquelle le résultat a été énoncé, c. à d. à l'équation

$$\frac{\log({}^{\alpha}A_a {}^{\beta}B_b \ldots {}^{\zeta}Z_z)}{(a-1, \alpha)(b-1, \beta) \ldots (z-1, \zeta)} = \Sigma \frac{\alpha}{a-\alpha} \log(A) + \Sigma \frac{\alpha}{a-\alpha} \frac{\beta}{b-\beta} \log(AB) + \ldots$$
$$+ \Sigma \frac{\alpha}{a-\alpha} \frac{\beta}{b-\beta} \cdots \frac{\zeta}{z-\zeta} \log(AB \ldots Z).$$

L'indice de distribution α pouvant prendre toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à a, considérons le cas particulier de $\alpha = a$. En multipliant par $(a-1, \alpha)$, nombre qui s'évanouit pour $\alpha = a$, et en posant $\alpha = a$, de tous les termes de la seconde partie de l'équation tous ceux qui ne contiennent pas la lettre A s'évanouissent et il vient

$$\frac{\log({}^{a}A_a {}^{\beta}B_b \ldots {}^{\zeta}Z_z)}{(b-1, \beta) \ldots (z-1, \zeta)} = \log(A) + \Sigma' \frac{\beta}{b-\beta} \log(AB) + \ldots$$
$$+ \Sigma' \frac{\beta}{b-\beta} \cdots \frac{\zeta}{z-\zeta} \log(AB \ldots Z)$$

où les sommations Σ' se rapportent seulement aux arguments $B \ldots Z$ à l'exclusion de A.

Mais dans le cas général dans lequel la valeur de α est quelconque la seconde partie de l'équation qui donne la valeur de $\log({}^{\alpha}A_a{}^{\beta}B_b \ldots {}^{\zeta}Z_z)$ peut être présentée sous la forme

$$\frac{\alpha}{a-\alpha}\left\{\log(A) + \Sigma' \frac{\beta}{b-\beta}\log(AB) + \ldots + \Sigma' \frac{\beta}{b-\beta}\cdots\frac{\zeta}{z-\zeta}\log(AB\ldots Z)\right\}$$

$$+\Sigma' \frac{\beta}{b-\beta}\log(B) + \Sigma' \frac{\beta}{b-\beta}\frac{\gamma}{c-\gamma}\log(BC) + \ldots$$

$$+\Sigma' \frac{\beta}{b-\beta}\frac{\gamma}{c-\gamma}\cdots\frac{\zeta}{z-\zeta}\log(BC\ldots Z)$$

équivalente à

$$\frac{\alpha}{a-\alpha}\cdot\frac{\log({}^{\alpha}A_a{}^{\beta}B_b \ldots {}^{\zeta}Z_z)}{(b-1,\,\beta)\ldots(z-1,\,\zeta)} + \frac{\log({}^{\beta}B_b{}^{\gamma}C_c \ldots {}^{\zeta}Z_z)}{(b-1,\,\beta)\ldots(z-1,\,\zeta)}.$$

Donc puisque $\dfrac{\alpha}{a-\alpha}(a-1,\,\alpha) = (a-1,\,\alpha-1)$, on est conduit à la relation

$$(\vartheta.)\quad \log({}^{\alpha}A_a{}^{\beta}B_b \ldots {}^{\zeta}Z_z) = (a-1,\,\alpha)\log({}^{\beta}B_b \ldots {}^{\zeta}Z_z)$$
$$+(a-1,\,\alpha-1)\log({}^{\alpha}A_a{}^{\beta}B_b \ldots {}^{\zeta}Z_z).$$

Je me bornerai au cas particulier de cette formule dans lequel le nombre des arguments ne s'élève qu'à deux, et je passerai à une formule plus générale qui forme une extension de l'équation (ϑ.) relative au cas de deux arguments. Concevons un carré composé contenant b^2 carrés simples chacun de κ^2 éléments. Rangeant ces b^2 carrés simples en b lignes et b colonnes et choisissant β de ces b lignes et β de ces b colonnes on est conduit à un déterminant composé de l'ordre $(b,\,\beta)$ et que je désignerai par ${}^{\kappa^2\cdot\beta}B_{\kappa^2.\,b}$. Les éléments de ce déterminant sont eux-mêmes des déterminants composés de l'ordre β dont chaque élément est un déterminant simple comprenant κ^2 éléments.

Ayant défini le sens de ${}^{\kappa^2\cdot\beta}B_{\kappa^2.\,b}$, passons à l'interprétation de la notation ${}^{\alpha}A_a{}^{\kappa^2\cdot\beta}B_{\kappa^2.\,b}$. Concevons un carré de $a+\kappa b$ lignes et d'autant de colonnes, divisé en deux carrés A et B_κ, de a^2 et de $\kappa^2 b^2$ termes respectivement, et en deux rectangles de $a\,.\,\kappa b$ termes. Choisissons α lignes et autant de colonnes qui passent par A, choisissons β groupes de κ lignes et autant de groupes de κ colonnes qui passent par B_κ. Les déterminants formés des $(\alpha+\kappa b)^2$ termes choisis formeront les éléments d'un déterminant composé, de l'ordre $(a,\alpha)(b,\beta)$ par rapport à ses éléments composés, et que je désignerai par ${}^{\alpha}A_a{}^{\kappa^2\cdot\beta}B_{\kappa^2.\,b}$. Pour les déterminants ainsi définis on peut énoncer le théorème suivant

$$(\eta.)\quad \log({}^{\alpha}A_a{}^{\kappa^2\cdot\beta}B_{\kappa^2.\,b}) = (a-1,\,\alpha)\log({}^{\alpha}A_a{}^{\kappa^2\cdot\beta}B_{\kappa^2.\,b}) + (a-1,\,\alpha-1)\log({}^{\kappa^2\cdot\beta}B_{\kappa^2.\,b}).$$

Considérons l'exemple de

$$a=2,\quad b=2,\quad \kappa=2,\quad \alpha=1,\quad \beta=1,$$

qui se rapporte aux déterminants mineurs de la matrice

$$\left|\begin{array}{cc|cccc}
p & q & r & s & t & u \\
p' & q' & r' & s' & t' & u' \\
\hline
p'' & q'' & l & l' & m & m' \\
p''' & q''' & l'' & l''' & m'' & m''' \\
p^{\mathrm{IV}} & q^{\mathrm{IV}} & \lambda & \lambda' & \mu & \mu' \\
p^{\mathrm{V}} & q^{\mathrm{V}} & \lambda'' & \lambda''' & \mu'' & \mu'''
\end{array}\right|.$$

Dans ce cas les déterminants

$$d=({}^{\kappa^2\cdot\beta}B_{\kappa^2\cdot b}),\quad D=({}^{a}A_{a}{}^{\kappa^2\cdot\beta}B_{\kappa^2\cdot b}),\quad \Delta=({}^{\alpha}A_{a}{}^{\kappa^2\cdot\beta}B_{\kappa^2\cdot b})$$

ont les valeurs

$$d=\left|\begin{array}{cc|cc}
l & l' & m & m' \\
l'' & l''' & m'' & m''' \\
\hline
\lambda & \lambda' & \mu & \mu' \\
\lambda'' & \lambda''' & \mu'' & \mu'''
\end{array}\right|,$$

$$D=\left|\begin{array}{cccc|cccc}
p & q & r & s & p & q & t & u \\
p' & q' & r' & s' & p' & q' & t' & u' \\
p'' & q'' & l & l' & p'' & q'' & m & m' \\
p''' & q''' & l'' & l''' & p''' & q''' & m'' & m''' \\
\hline
p & q & r & s & p & q & t & u \\
p' & q' & r' & s' & p' & q' & t' & u' \\
p^{\mathrm{IV}} & q^{\mathrm{IV}} & \lambda & \lambda' & p^{\mathrm{IV}} & q^{\mathrm{IV}} & \mu & \mu' \\
p^{\mathrm{V}} & q^{\mathrm{V}} & \lambda'' & \lambda''' & p^{\mathrm{V}} & q^{\mathrm{V}} & \mu'' & \mu'''
\end{array}\right|,$$

$$\Delta = \begin{array}{|ccc|ccc|ccc|ccc|}
\hline
p & r & s & q & r & s & p & t & u & q & t & u \\
p'' & l & l' & q'' & l & l' & p'' & m & m' & q'' & m & m' \\
p''' & l'' & l''' & q''' & l'' & l''' & p''' & m'' & m''' & q''' & m'' & m''' \\
\hline
p' & r' & s' & q' & r' & s' & p' & t' & u' & q' & t' & u' \\
p'' & l & l' & q'' & l & l' & p'' & m & m' & q'' & m & m' \\
p''' & l'' & l''' & q''' & l'' & l''' & p''' & m'' & m''' & q''' & m'' & m''' \\
\hline
p & r & s & q & r & s & p & t & u & q & t & u \\
p^{\text{IV}} & \lambda & \lambda' & q^{\text{IV}} & \lambda & \lambda' & p^{\text{IV}} & \mu & \mu' & q^{\text{IV}} & \mu & \mu' \\
p^{\text{V}} & \lambda'' & \lambda''' & q^{\text{V}} & \lambda'' & \lambda''' & p^{\text{V}} & \mu'' & \mu''' & q^{\text{V}} & \mu'' & \mu''' \\
\hline
p' & r' & s' & q' & r' & s' & p' & t' & u' & q' & t' & u' \\
p^{\text{IV}} & \lambda & \lambda' & q^{\text{IV}} & \lambda & \lambda' & p^{\text{IV}} & \mu & \mu' & q^{\text{IV}} & \mu & \mu' \\
p^{\text{V}} & \lambda'' & \lambda''' & q^{\text{V}} & \lambda'' & \lambda''' & p^{\text{V}} & \mu'' & \mu''' & q^{\text{V}} & \mu'' & \mu''' \\
\hline
\end{array};$$

et la relation qui existe entre eux se réduit à

$$\Delta = d \,.\, D.$$

Du théorème $(\eta.)$ relatif à deux arguments dont l'un est complexe* on pourrait faire l'extension à un nombre quelconque d'arguments complexes, mais sans m'y arrêter je vais au contraire passer à un cas particulier du théorème $(\eta.)$ et que je nommerai le théorème du gnomon†. Faisons coincider respectivement dans l'exemple donné ci-dessus les huit quantités

$$r,\ \ s,\ \ r',\ \ s',\ \ p'',\ \ q'',\ \ p''',\ \ q'''$$

avec

$$t,\ \ u,\ \ t',\ \ u',\ \ p^{\text{IV}},\ \ q^{\text{IV}},\ \ p^{\text{V}},\ \ q^{\text{V}}.$$

Dans ce cas chaque carré dont le déterminant forme un élément de d doit être enveloppé par le gnomon non distribué

$$(G.)\quad \left\{ \begin{array}{llll} p & q & r & s \\ p' & q' & r' & s' \\ p'' & q'' & & \\ p''' & q''' & & \end{array} \right.$$

pour passer des éléments de d aux éléments de D.

* Je me sers ici du mot complexe dans un autre sens que dans celui qui est généralement en usage dans l'analyse.

† γνώμων (équerre), voyez le premier livre des éléments d'Euclide.

De même pour obtenir les éléments de Δ déduisons du gnomon ($G.$) les gnomons partiels

$$\begin{array}{llllllll} p & r & s & & q & r & s \\ p'' & & & & q'' & & \\ p''' & & & & q''' & & \\ p' & r' & s' & & q' & r' & s' \\ p'' & & & & q'' & & \\ p''' & & & & q''' & & \end{array}$$

et enveloppons successivement chaque élément de d par ces quatre gnomons partiels, ce procédé que l'on peut nommer enveloppement distributif nous conduit aux éléments de Δ.

Les mêmes lois de formation existent pour un gnomon d'ordre quelconque que je désignerai par ${}^{a,\kappa}G_{a,\kappa}$ et que l'on combinera avec un carré de l'ordre b de carrés de l'ordre κ.

En dénotant pour plus de brièveté par B_κ le carré de b^2 carrés de κ^2 éléments on a donc l'équation

$$\log({}^{a,\kappa}G_{a,\kappa}B_\kappa) = (a-1,\alpha)\log(B_\kappa) + (a-1,\alpha-1)\log({}^{a,\kappa}G_{a,\kappa}B_\kappa),$$

résultat que l'on peut énoncer de la manière suivante. Étant donné un carré de carrés simples et un gnomon ayant ses deux branches rectangulaires de longueur égale au côté des carrés simples: le déterminant composé du second rang dont les éléments sont les déterminants des carrés simples donnés enveloppés par un carré de gnomons partiels dérivés du gnomon donné sera égal au produit de puissances entières de deux déterminants composés. Les éléments de ces déterminants sont les déterminants des carrés simples donnés et les déterminants de ces carrés simples enveloppés par le gnomon donné.

Les exposants des puissances qui entrent dans la formule en question ne dépendent que de l'indice a d'étendue et de l'indice α de distribution de la partie carrée du gnomon.

Le théorème du gnomon contient comme cas particulier l'équation ($\vartheta.$). Pour s'en convaincre on n'a qu'à former le carré composé qui correspond à ${}^{\beta}B_b \ldots {}^{\zeta}Z_z$, carré qui porte la notation (b,β) $(c,\gamma) \ldots (z,\zeta)$ et qui comprend des carrés simples de l'ordre $\beta+\gamma+\ldots+\zeta$. Ces deux nombres devront remplacer les nombres b et κ que l'on a considérés dans l'étude du gnomon. En appliquant à ce carré composé un gnomon dont l'étendue des branches est égale à $\beta+\gamma+\ldots+\zeta$ et l'étendue de la partie carrée égale à $(b,\beta)(c,\gamma)\ldots(z,\zeta)$ on retrouve l'équation ($\vartheta.$).

En désignant par Φ le symbole

$${}^{\beta}B_b{}^{\gamma}C_c \ldots {}^{\zeta}Z_z$$

l'équation (ϑ.) prend la forme

$$\log({}^{a}A_{a}\Phi) = (a-1,\, \alpha)\log(\Phi) + (a-1,\, \alpha-1)\log({}^{a}A_{a}\Phi).$$

On peut énoncer le résultat plus général qu'entre les trois expressions

$$\log{}^{\alpha_1}A_a\Phi,\quad \log{}^{\alpha_2}A_a\Phi,\quad \log{}^{\alpha_3}A_a\Phi$$

il y a toujours une relation linéaire à coefficients indépendants de b, β, c, γ, ... z, ζ. En effet soit

$$\alpha_1' = a - \alpha_1,\quad \alpha_2' = a - \alpha_2,\quad \alpha_3' = a - \alpha_3,$$

la relation dont il s'agit s'exprime par l'équation

$$\sum_1^3 \Pi\alpha_3 \,.\, \Pi\alpha_3'\,(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1')\log{}^{\alpha_3}A_a\Phi = 0,$$

le signe $\sum\limits_1^3$ exprimant la somme que l'on obtient en ajoutant au terme écrit les deux autres qui en dérivent par une permutation cyclique des trois indices 1, 2, 3. Cette équation ne change pas quand on échange α_1, α_2, α_3 avec α_1', α_2', α_3', de plus elle peut être présentée dans cette forme plus simple

$$\Sigma\Pi\alpha_3\Pi\alpha_3'(\alpha_1 - \alpha_2)\log{}^{\alpha_3}A_a\Phi = 0.$$

Désignant par Ψ le symbole

$${}^{\gamma}C_c \ldots {}^{\zeta}Z_z$$

on trouvera aisément la relation

$$\log{}^{a}A_a{}^{\beta}B_b\Psi = (a-1,\,\alpha)(b-1,\,\beta)\log\Psi + (a-1,\,\alpha-1)(b-1,\,\beta)\log A\Psi$$
$$+ (a-1,\,\alpha)(b-1,\,\beta-1)\log B\Psi + (a-1,\,\alpha-1)(b-1,\,\beta-1)\log AB\Psi$$

dans laquelle A, B sont écrits au lieu de ${}^{a}A_a{}^{b}B_b$. On peut énoncer le résultat plus général qu'entre cinque expressions de la forme

$$\log{}^{\alpha_r}A_a{}^{\beta_r}B_b\Psi \qquad (r = 1, 2, 3, 4, 5)$$

il existe une relation linéaire. En effet, soit

$$\alpha_r + \alpha_r' = a,\quad \beta_r + \beta_r' = b,$$

la relation dont il s'agit prend la forme

$$\Sigma\Pi\alpha_5\Pi\alpha_5'\Pi\beta_5\Pi\beta_5' D_{1,2,3,4}\log{}^{\alpha_5}A_a{}^{\beta_5}B_b\Psi = 0.$$

Dans cette équation $D_{1,2,3,4}$ désigne le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_1' & \alpha_1'\beta_1 & \alpha_1'\beta_1' \\ \alpha_2\beta_2 & \alpha_2\beta_2' & \alpha_2'\beta_2 & \alpha_2'\beta_2' \\ \alpha_3\beta_3 & \alpha_3\beta_3' & \alpha_3'\beta_3 & \alpha_3'\beta_3' \\ \alpha_4\beta_4 & \alpha_4\beta_4' & \alpha_4'\beta_4 & \alpha_4'\beta_4' \end{vmatrix}.$$

En divisant par a^2b^2 il prend la forme plus simple

$$\begin{matrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1\beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_2\beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_3\beta_3 \\ 1 & \alpha_4 & \beta_4 & \alpha_4\beta_4. \end{matrix}$$

Ce résultat peut être aisément étendu à un nombre quelconque d'arguments. En effet désignons par Θ le symbole

$${}^{\alpha_{i+1}}A^{(i+1)}_{a_{i+1}}\,{}^{\alpha_{i+2}}A^{(i+2)}_{a_{i+2}}\dots{}^{\alpha_m}A^{(m)}_{a_m}$$

et soit

$$j = 2^i;$$

cela posé, il y aura toujours entre les $j+1$ expressions

$$\log{}^{\alpha_{1,q}}A^{(1)}_{a_1}\,{}^{\alpha_{2,q}}A^{(2)}_{a_2}\dots{}^{\alpha_{i,q}}A^{(i)}_{a_i}\,\Theta \qquad (q = 1, 2, \dots j+1)$$

une relation linéaire exprimée par l'équation

$$\Sigma\left\{\begin{matrix}\Pi\alpha_{1,j+1}\Pi\alpha'_{1,j+1}\Pi\alpha_{2,j+1}\Pi\alpha'_{2,j+1}\dots\Pi\alpha_{i,j+1}\Pi\alpha'_{i,j+1} \\ \times D_{1,2,\dots j}\log{}^{\alpha_{1,j+1}}A^{(1)}_{a_1}\,{}^{\alpha_{2,j+1}}A^{(2)}_{a_2}\dots{}^{\alpha_{i,j+1}}A^{(i)}_{a_i}\end{matrix}\right\} = 0$$

dans laquelle

$$\alpha'_{p,q} + \alpha_{p,q} = a_p$$

et où $D_{1,2,\dots j}$ désigne le déterminant dialytique formé par les développements des expressions:

$$\begin{gathered}(1+\alpha_{1,1}x_1)(1+\alpha_{2,1}x_2)\dots(1+\alpha_{i,1}x_i) \\ (1+\alpha_{1,2}x_1)(1+\alpha_{2,2}x_2)\dots(1+\alpha_{i,2}x_i) \\ \vdots \\ (1+\alpha_{1,j}x_1)(1+\alpha_{2,j}x_2)\dots(1+\alpha_{i,j}x_i)\end{gathered}$$

dans lesquelles les j produits différents des variables sont considérés comme j variables indépendantes.

Remarquons encore que lorsque $i = 2$ ou > 2 on aura même une relation entre $j = 2^i$ logarithmes, pourvu qu'entre les nombres $\alpha_{p,q}$ une condition se trouve remplie.

Pour $i = 2$, p. e. si α_1, β_1, α_2, β_2, α_3, β_3, α_4, β_4 sont les coordonnées de quatre points d'une hyperbole dans un système de coordonnées parallèles aux asymptotes, on aura l'équation

$$\begin{vmatrix} U_1 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ U_2 & \alpha_2 & \beta_2 & 1 \\ U_3 & \alpha_3 & \beta_3 & 1 \\ U_4 & \alpha_4 & \beta_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

U_r désignant l'expression

$$U_r = \Pi\alpha_r \Pi(a-\alpha_r)\Pi\beta_r\Pi(b-\beta_r)\log {}^{\alpha_r}A_a{}^{\beta_r}B_b\Psi.$$

Des valeurs particulières des α_r, β_r qui satisfont à la condition indiquée sont p. e. les suivantes :

$$\alpha_1 = 1+\lambda,\quad \alpha_2 = p+\lambda,\quad \alpha_3 = q+\lambda,\quad \alpha_4 = pq+\lambda,$$
$$\beta_1 = pq+\mu,\quad \beta_2 = q+\mu,\quad \beta_3 = p+\mu,\quad \beta_4 = 1+\mu;$$

pour ces valeurs la relation linéaire entre U_1, U_2, U_3, U_4 se réduit à la forme

$$\begin{vmatrix} U_1 & p & q & 1 \\ U_2 & q & p & 1 \\ U_3 & 1 & pq & 1 \\ U_4 & qp & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que l'on obtient par la remarque que les coefficients des U ne changent point lorsqu'on fait coincider avec le centre de l'hyperbole l'origine des coordonnées. De plus en divisant par le facteur commun $(1-p)(1-q)$ l'équation devient

$$(pq-1)(U_2-U_1) = (q-p)(U_4-U_3),$$

ce qui fait voir que deux déterminants $({}^{\alpha_r}A_a{}^{\beta_r}B_b\Psi)$ élevés chacun à une puissance entière et multipliés ensemble donnent un produit égal à une expression semblable relative aux deux autres déterminants de la même forme.

Le cas de $i=1$ fait exception. Dans ce cas une relation linéaire entre moins de trois expressions différentes est impossible.

Sans sortir de la sphère des déterminants composés du 2^me rang il reste à faire une grande généralisation de la théorie précédente.

Jusqu'ici on n'a considéré que des matrices à forme carrée ou, ce qui est la même chose, on ne s'est servi que d'arguments à un seul indice d'étendue et à un seul indice de distribution.—Mais il y a une théorie à construire relative aux arguments ayant chacun deux indices distincts et d'étendue et de distribution. Pour le moment je me borne au cas comparativement simple dans lequel il n'y a qu'un seul indice de distribution tandis que chaque argument a deux indices distincts d'étendue et se rapporte par conséquent à une matrice de forme rectangulaire. Comme il n'y a qu'un seul indice de distribution, les matrices que l'on forme au moyen des matrices rectangulaires données seront des matrices carrées représentant des déterminants comme dans le cas traité jusqu'à présent.

Il sera utile de se servir de l'expression 'déterminant virtuel' ou 'valeur virtuelle d'une matrice rectangulaire.' Cette dénomination ne définit point une quantité que l'on peut directement mettre en évidence, mais plutôt une valeur de nature ombrale ou idéale : cependant, comme je vais faire voir, on pourra établir des rapports actuels entre ces valeurs idéales.

Soient $\mathfrak{D}$ et D deux matrices rectangulaires qui contiennent en dernier lieu les mêmes éléments simples (réels ou ombrals). Accentuons les éléments primitifs et désignons par $\mathfrak{D}'$, D' ce que deviennent alors $\mathfrak{D}$, D.

Multiplions ensemble $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$, D et D', suivant la règle ordinaire pour la multiplication des matrices, appliquée dans la direction de leur plus grande étendue, et comparons les valeurs des déterminants $(\mathfrak{D}\,.\,\mathfrak{D}')$, $(D\,.\,D')$.

Supposons que ces déterminants remplissent identiquement l'équation

$$(\mathfrak{D}\,.\,\mathfrak{D}')^i = (D\,.\,D')^j,$$

comprenant comme cas particulier l'équation

$$(\mathfrak{D}^2)^i = (D^2)^j,$$

dans ce cas j'écrirai l'équation idéale

$$\mathfrak{D}^i = D^j.$$

Avec cette notion des valeurs virtuelles on peut donner avec un trait de plume une grande extension au théorème général établi dans le mémoire précédent.

En effet, considérons $\Omega, A, B, C, \ldots Z$ comme des matrices non plus carrées mais rectangulaires avec cette convention que A_a représente une matrice aux indices d'étendue a et a' et *que a' ne soit pas moindre que a.* Alors ${}^{\alpha}A_a$ représentera une matrice dont les deux indices d'étendue sont (a, α), (a', α) respectivement.

En définissant de cette manière le sens des notations Ω, ${}^{\alpha}A_a$, ${}^{\beta}B_b$, … *je dis que la valeur fournie par le théorème général pour*

$$\frac{\log \Omega\, {}^{\alpha}A_a {}^{\beta}B_b \ldots {}^{\zeta}Z_z}{\varpi}$$

ne subit point de changement, quand on remplace les déterminants réels par les déterminants virtuels dans le cas où les matrices carrées se changent en matrices rectangulaires et que l'on n'a pas besoin de tenir compte de l'excès de a' sur a, de b' sur b, etc.

Pour donner un exemple bien simple des déterminants virtuels j'énoncerai l'extension que l'on peut donner à l'équation élémentaire qui dit que le déterminant actuel

$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} ab' - a'b & ac' - a'c & bc' - b'c \\ ab'' - a''b & ac'' - a''c & bc'' - b''c \\ a'b'' - a''b' & a'c'' - a''c' & b'c'' - b''c' \end{vmatrix}$$

est égal au carré du déterminant actuel

$$C = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Cette extension consiste à dire que le déterminant virtuel de

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} ab'-a'b & ac'-a'c & ad'-a'd & bc'-b'c & bd'-b'd & cd'-c'd \\ ab''-a''b & ac''-a''c & ad''-a''d & bc''-b''c & bd''-b''d & cd''-c''d \\ a'b''-a''b' & a'c''-a''c' & a'd''-a''d' & b'c''-b''c' & b'd''-b''d' & c'd''-c''d' \end{vmatrix}$$

est égal au carré du déterminant virtuel de

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{vmatrix}.$$

En effet désignons par $\mathfrak{D}_1$, D_1 ce que deviennent les matrices $\mathfrak{D}$, D lorsqu'on y remplace les a, b, c, d par des $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; alors des déterminants actuels $(\mathfrak{D}\,.\,\mathfrak{D}_1)$ et $(D\,.\,D_1)$ sont liés par l'équation

$$(\mathfrak{D}\,.\,\mathfrak{D}_1) = (D\,.\,D_1)^2,$$

d'où l'on est en droit de tirer la conséquence énoncée ci-dessus relativement aux déterminants virtuels.

Comme second exemple je considère la ligne-couple

$$\begin{bmatrix} a_1 a_2 \ldots a_m b_1 b_2 \ldots b_m \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \end{bmatrix}$$

qui représente une matrice de longueur double de sa largeur. Formons le déterminant composé

$$[(\Sigma a_1 a_2 \ldots a_i,) \times (\Sigma b_1 b_2 \ldots b_j,)] \divideontimes (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m)$$

où $$i + j = m.$$

D'après un théorème bien connu ce déterminant est égal à

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_m \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \end{pmatrix}^{(m-1,\, i)} . \begin{pmatrix} b_1 b_2 \ldots b_m \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \end{pmatrix}^{(m-1,\, j)}.$$

Or considérons la ligne-couple

$$\begin{bmatrix} a_1 a_2 \ldots a_\nu b_1 b_2 \ldots b_\pi \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \end{bmatrix}$$

et supposons que m ne surpasse ni ν ni π, soit de plus comme auparavant

$$i + j = m,$$

cela posé, je dis qu'on aura toujours l'équation

$$[(\Sigma a_1 a_2 \ldots a_i,) \times (\Sigma b_1 b_2 \ldots b_j,)] \divideontimes (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m)$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_\nu \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \end{pmatrix}^{(m-1,\, i)} . \begin{pmatrix} b_1 b_2 \ldots b_\pi \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \end{pmatrix}^{(m-1,\, j)}.$$

Dans cette équation et relativement à chacune des trois matrices qu'elle contient il faut substituer lorsqu'il est nécessaire la valeur virtuelle du déterminant au déterminant même, lorsque la matrice est rectangulaire au lieu d'être carrée.