

I.

SUI CAMPI ELETTROMAGNETICI PURI
DOVUTI A MOTI PIANI PERMANENTI

« Atti Ist. Veneto », t. LXVII, parte II (1907-8),
pp. 995-1010.

Fino a pochi anni or sono il fenomeno del movimento della elettricità era considerato soltanto sotto i due aspetti della conduzione (correnti galvaniche) e della convezione (trasporto in seno ad un nucleo coibente, come avviene ad es. per gli ioni elettrolitici).

Nello studio delle scariche nei gas rarefatti fu anzitutto esperita l'ipotesi convettiva, assimilandosi i raggi catodici ed affini ad un bombardamento di particelle *materiali* elettrizzate. Ma si dovette riconoscere che una tale ipotesi, senza essere in aperta contraddizione coi fatti osservati, implicava alcune conseguenze assai poco soddisfacenti circa la natura e le proprietà del materiale convettivo.

Fu allora avanzata, per opera specialmente dei signori ABRAHAM e KAUFMANN ⁽¹⁾, una ipotesi che certamente non inceppa in analoghe obiezioni, poichè esclude a priori qualsiasi intervento di materia ponderabile, considerando il caso limite di un puro movimento di elettricità.

Il concetto è assai semplice, ma ne rimane in sulle prime complicata la rigorosa deduzione di previsioni concrete.

Infatti, una volta escluso l'involucro materiale, non è più lecito isolare una carica, risguardandola come un sistema con un numero finito di gradi di libertà (sei, o tre soltanto se si prescinde dalla rotazione). Convieni invece prender in considerazione un flusso continuo, i cui elementi si influenzano mutuamente.

Per evitare l'analisi del continuo e render possibile il conseguimento di risultati altrettanto precisi quanto quelli forniti dalla teoria convettiva, fu invocata un'ipotesi ausiliaria, perfettamente ragionevole in via d'approssimazione e d'assaggio, insostenibile come postulato rigoroso.

⁽¹⁾ Cfr. per notizie bibliografiche e più ampi ragguagli sull'argomento il mio rapporto *Sulla massa elettromagnetica*, « Nuovo Cimento », Ottobre 1907, pp. 3-36, oppure « Rivista di Scienza » (1907), vol. II, n. IV, pp. 387-412 [in queste « Opere »: vol. secondo, XXXV, pp. 587-613].

Alludo all'ipotesi che il moto delle cariche soddisfaccia a legami cinematici prestabiliti, in particolare che il moto di ogni carica seguiti ad essere rigido anche nell'ipotesi limite, in cui viene del tutto a mancare il nucleo coibente.

Ciò val quanto ammettere l'esistenza di forze molecolari, delle quali, non più che dei corrispondenti legami, si può dare giustificazione plausibile, almeno quando si mantengono le ordinarie premesse.

Se si vuol essere conseguenti, conviene rinunciare ad ogni intervento addizionale di forze vincolari, e discutere il movimento dell'elettricità, esprimendo che valgono le relazioni fondamentali dei campi elettromagnetici, ed inoltre che è nulla, per ciascuna carica elementare, la forza meccanica totale.

Ciò dà luogo ad un sistema differenziale (completo) il quale caratterizza i così detti *campi elettromagnetici puri*.

Ne ho dato un primo esempio ⁽²⁾, assegnando un tipo di soluzioni, che corrispondono ad un trasporto di elettricità per onde piane, e comprendono come caso particolare le ordinarie onde eteree, in cui il trasporto è nullo.

In una memoria, testè pubblicata, la Sig.na CAFFARATTI ⁽³⁾ ha determinato le soluzioni, che corrispondono a moti rigidi e stazionari.

Nel presente lavoro mi propongo di indicare un'altra categoria di soluzioni: tutte quelle che corrispondono a moti piani, aventi carattere stazionario.

Se si immagina dato l'ambiente, in cui deve svolgersi il moto, la questione si trova analiticamente ricondotta all'integrazione, per speciali condizioni ai limiti, dell'equazione

$$\Delta_2 \varphi = \Phi'(\varphi),$$

designando Φ' una funzione a priori indeterminata della sola φ .

Spero di poter prossimamente attestare in modo decisivo l'interesse dei campi elettromagnetici puri, traendone una spiegazione dei raggi catodici, esente da qualsiasi difficoltà.

1. - Richiamo delle equazioni fondamentali.

Si designino al solito con v , E ed H i tre vettori, che rappresentano la velocità del flusso di elettricità, la forza elettrica e la forza magnetica in un punto generico del campo elettromagnetico che si considera; con q

⁽²⁾ «Comptes Rendus», 19 Agosto 1907, pp. 417-420 [in queste «Opere»: vol. secondo, XXXIV, pp. 583-586].

⁽³⁾ *Sui campi elettromagnetici puri*, «Nuovo Cimento», Maggio 1908, pp. 369-394.

la densità della distribuzione; con A la costante universale $1/c$ (c velocità della luce nell'etere).

Le equazioni di HERTZ sono allora, con notazioni vettoriali ben note,

$$(I) \quad A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \mathbf{H} - 4\pi A \rho \mathbf{v} ,$$

$$(II) \quad A \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{E} ,$$

$$(III) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho ,$$

$$(IV) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 .$$

Esse presuppongono un sistema di riferimento *sinistrorso* (altrimenti bisognerebbe cambiare il segno al rot).

Ciò premesso, si ricordi che la legge elementare di LORENTZ (sintesi delle due leggi classiche di COULOMB e di BIOT e SAVART) esprime che l'unità di carica, posta in un punto generico di un campo elettromagnetico, subisce una forza meccanica \mathbf{F} , definita da

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + A\mathbf{H} \wedge \mathbf{v} .$$

(Conformemente alle proposte dei sig.ri MARCOLONGO e BURALI-FORTI, uso il simbolo \wedge per designare un prodotto vettoriale).

Il postulato fondamentale della meccanica esprime che, per un generico punto materiale,

$$\text{massa} \times \text{accelerazione} = \text{forza totale} .$$

Se si tratta di un campo elettromagnetico puro e se ne fissa un generico elemento di volume dS , deve porsi la massa eguale a zero, perchè si esclude l'intervento di materia ponderabile; d'altra parte, se si esclude anche ogni azione esterna, la forza totale (essendo ρdS la carica elettrica) vale $\rho dS\mathbf{F}$. Deve quindi sussistere in ogni punto del campo l'equazione

$$\rho\{\mathbf{E} + A\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}\} = 0 .$$

Questa, assieme alle (I)-(IV), è caratteristica dei campi elettromagnetici puri *sotto il triplice aspetto materiale, cinematico e dinamico*.

Per maggior generalità, converrà limitarsi ad escludere l'intervento di masse ponderabili e di legami cinematici, e porre la questione in modo da poter, quando si voglia, tener conto anche di azioni esterne a un dato sistema di cariche.

Considereremo perciò un campo, *materialmente e cinematicamente puro*, il quale si trovi immerso in un campo elettromagnetico D , preventivamente assegnato, e non influenzabile, o almeno non sensibilmente in-

fluenzato dal campo puro. Supporremo in particolare che, nella regione, in cui ρ (densità del campo puro) è diversa da zero, non risiedano masse elettriche spettanti a D .

In tal caso, dette \mathbf{e} e \mathbf{h} la forza elettrica e la forza magnetica del campo D , ove si eguagli a zero la forza meccanica *totale*, si ha ovviamente, in luogo della $\rho\{\mathbf{E} + A\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}\} = 0$, la equazione più generale

$$(V) \quad \rho\{(\mathbf{E} + \mathbf{e}) + A(\mathbf{H} + \mathbf{h}) \wedge \mathbf{v}\} = 0.$$

2. - Problema piano. Flusso stazionario.

Supponiamo in particolare che il moto dell'elettricità avvenga per piani paralleli con identico comportamento sopra ciascuno di essi, corrispondendosi i punti, che appartengono ad una medesima perpendicolare.

Assunto un piano qualunque del fascio per piano $z = 0$, l'aspetto cinematico del fenomeno risulta indipendente da z . Qualora anche le circostanze esterne, riassunte per ipotesi nei due vettori \mathbf{e} , \mathbf{h} , siano indipendenti da z , lo stesso dovrà evidentemente avvenire per il campo elettromagnetico puro, corrispondente al detto moto. Basterà quindi occuparsi dei punti del piano $z = 0$.

Se si suppone ulteriormente che il fenomeno abbia carattere di stazionarietà, sarà *tutto indipendente, non solo da z , ma anche da t* .

Teniamo conto di ciò, nonchè dell'ipotesi preliminare $v_z = 0$, ed esplicitiamo le (I)-(V).

Le raggrupperemo in due distinti sistemi (a) e (b) con questo criterio: attribuiremo al sistema (a) e segneremo (I_a), (II_a), ecc., tutte quelle equazioni, che *non* contengono le incognite E_z , H_x , H_y ; attribuiremo al sistema (b) le equazioni rimanenti, segnandole (I_b), (II_b), ecc. Troviamo così, scrivendo semplicemente H e h , in luogo di H_z , h_z :

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} (I_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi A \rho v_x = -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ 4\pi A \rho v_y = \frac{\partial H}{\partial x}; \end{array} \right. \\ (II_a) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0; \\ (III) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 4\pi \rho; \\ (V_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho\{(\mathbf{E}_x + \mathbf{e}_x) - A(\mathbf{H} + \mathbf{h})v_y\} = 0, \\ \rho\{(\mathbf{E}_y + \mathbf{e}_y) + A(\mathbf{H} + \mathbf{h})v_x\} = 0; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} \text{(I}_b\text{)} \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0; \\ \text{(II}_b\text{)} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0; \\ \text{(IV)} \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0; \\ \text{(V}_b\text{)} \quad \varrho\{(E_z + e_z) + A[(H_x + h_x)v_y - (H_y + h_y)v_x]\} = 0. \end{array} \right.$$

3. - Specificazione dei caratteri qualitativi.

Comportamento del campo esterno D nella regione del moto.

Designeremo con σ la regione del piano $z = 0$, in cui ϱ non è nullo (⁴), in cui cioè si trova effettivamente dell'elettricità (spettante al campo puro); con s il contorno di σ .

Supporremo che la funzione ϱ sia finita e continua entro σ , senza escludere che passi bruscamente al valore zero al di là del contorno.

Supporremo poi che le forze elettromagnetiche sieno continue tanto entro σ , quanto fuori, mantenendosi ovunque finite (anche sul contorno s). Questo implica continuità completa del campo anche attraverso s : per convincersene, basta applicare alle equazioni differenziali (I)–(IV) (in prossimità del contorno s) il noto ragionamento di HERTZ, tenendo presente che ϱ non diventa mai infinita (la quale ipotesi esclude in particolare l'esistenza di distribuzioni superficiali su s , o meglio sul cilindro avente s per sezione retta).

Per fissare le idee, riterremo ancora che l'area σ sia semplicemente connessa e tutta situata a distanza finita; le considerazioni, che seguono, sussistono però, con ovvie modificazioni, anche per aree pluriconnesse od estendentisi indefinitamente.

Precisiamo ancora la natura delle funzioni, che definiscono il campo esterno D .

In primo luogo le forze elettromagnetiche \mathbf{e} , \mathbf{h} sono legate esse pure dalle equazioni di HERTZ (I)–(IV).

Entro σ la corrispondente densità è nulla; per ipotesi, si tratta sempre di un campo stazionario. Le (I)–(IV) si riducono così a

$$\text{rot } \mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{e} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{e} = 0,$$

(⁴) Più precisamente, in cui ϱ può al più annullarsi su linee isolate.

le quali esprimono notoriamente che \mathbf{e} ed \mathbf{h} derivano da due potenziali armonici (e del resto arbitrari), f_1, v_1 , a norma delle formole

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial f_1}{\partial x}, & e_y &= \frac{\partial f_1}{\partial y}, & e_z &= \frac{\partial f_1}{\partial z}; \\ h_x &= \frac{\partial v_1}{\partial x}, & h_y &= \frac{\partial v_1}{\partial y}, & h_z &= h = \frac{\partial v_1}{\partial z}. \end{aligned}$$

Tenendo conto della indipendenza del campo dalla variabile z , si riconosce ovviamente che e_z ed $h_z = h$ sono costanti, mentre e_x ed e_y , h_x ed h_y possono considerarsi come derivate di due funzioni armoniche f e v delle sole variabili x ed y ($f = f_1 - e_z z$, $v = v_1 - h z$).

4. - Integrazione del sistema (a).

Le (V_a) si trovano identicamente soddisfatte nei punti esterni a σ ; mentre, entro σ , profittando delle (I_a) e dividendo per ϱ , ove si tenga conto che h è costante e che $e_x = \partial f / \partial x$, $e_y = \partial f / \partial y$, possono essere scritte

$$\begin{aligned} E_x + \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{8\pi\varrho} \frac{\partial}{\partial x} (H + h)^2, \\ E_y + \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{8\pi\varrho} \frac{\partial}{\partial y} (H + h)^2. \end{aligned}$$

La (II_a) sta ad esprimere che E_x, E_y derivano da un potenziale $\psi(x, y)$. Con ciò le due equazioni precedenti si compendiano in

$$(1) \quad d(\psi + f) = \frac{1}{8\pi\varrho} d(H + h)^2,$$

mentre la (III) assume la forma

$$(2) \quad \Delta_2 \psi = 4\pi\varrho.$$

Sarà in particolare

$$(3) \quad \Delta_2 \psi = 0 \quad (\text{nei punti esterni a } \sigma),$$

dacchè, per ipotesi, fuori di σ , $\varrho = 0$.

Quanto alle (I_a), esse costituiscono, si può dire, la definizione di v_x ,

v_y , finchè ρ è diversa da zero, mentre, nei punti esterni a σ , porgono $H = \text{cost.}$ Dacchè le masse elettriche, spettanti al campo puro, non si estendono indefinitamente, il campo stesso dovrà ritenersi nullo all'infinito; sarà per conseguenza

$$(4) \quad H = 0 \quad (\text{nei punti esterni a } \sigma),$$

nonchè sul contorno s , data la continuità.

Dalla (1), che è valida nell'interno di σ , deduciamo, avvicinandoci indefinitamente ad s , e prendendo i differenziali nella direzione di un elemento di contorno,

$$d\psi = -df \quad (\text{lungo } s),$$

inquantochè $dH = 0$.

Per la continuità delle

$$E_x = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad E_y = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad e_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial f}{\partial y},$$

questa stessa condizione dovrà essere verificata anche avvicinandoci indefinitamente ad s dall'esterno.

La funzione ψ assume pertanto sul contorno valori del tipo $-f + \text{cost.}$

Nei punti esterni a σ , essa è armonica, in virtù della (3), e possiede, per ipotesi, derivate prime continue. Se poi si ammette, come è ragionevole, che a distanza infinitamente grande dalle masse agenti non possa essere localizzata una quantità infinita di energia, si deve pure ammettere — sarebbe facile il constatarlo — che $E_x = \partial\psi/\partial x$, $E_y = \partial\psi/\partial y$ si annullano all'infinito d'ordine superiore al primo.

Se ne conclude, con procedimento ben noto, che, a meno di una inesistente costante additiva,

$$(5) \quad \psi = -f^*, \quad (\text{nei punti esterni a } \sigma)$$

designando f^* quella funzione armonica e regolare del campo esterno a σ , che assume sul contorno i valori f .

Esaminiamo ora quel che accade nei punti interni.

Posto, per maggior comodo,

$$(6) \quad \psi + f = \varphi,$$

la (1) implica anzi tutto che H e ρ siano funzioni della sola φ .

Infatti φ non è certo una costante (perchè, in virtù delle (6) e (2), $\Delta_2\varphi = 4\pi\rho \neq 0$); si possono quindi adottare per un momento come variabili indipendenti, in luogo di x , y , la stessa φ e un'altra combinazione indipendente qualsiasi $\varphi_1(x, y)$. Con ciò il differenziale $d(H+h)^2$ assume

l'aspetto

$$\frac{\partial(H+h)^2}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial(H+h)^2}{\partial\varphi_1}d\varphi_1.$$

Portando nella (1) e tenendo conto che essa deve essere verificata per incrementi arbitrari di φ e di φ_1 , si ricava in primo luogo

$$\frac{\partial(H+h)^2}{\partial\varphi_1} = 0,$$

ossia H funzione della sola φ .

Potremo quindi porre

$$(7) \quad \frac{1}{2}(H+h)^2 = \Phi(\varphi),$$

e la (I) si ridurrà a

$$(8) \quad 4\pi\rho = \Phi'(\varphi),$$

l'apice designando derivazione rispetto all'argomento φ .

H e ρ sono così espresse per φ . Questa, in virtù delle (2), (6) ed (8), deve verificare la equazione indefinita

$$(9) \quad \Delta_2\varphi = \Phi'(\varphi) \quad (\text{entro } \sigma),$$

ed inoltre, data la (5) e la incondizionata continuità di E_x , E_y , le due condizioni ai limiti

$$(10) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial(f-f^*)}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial(f-f^*)}{\partial y} \quad (\text{sul contorno } s).$$

Giova rilevare che la funzione $\Phi'(\varphi)$ è a priori indeterminata.

Se così non fosse, ma si riguardasse Φ' come data, riuscirebbe in generale impossibile soddisfare alle (9) e (10), per esuberanza di condizioni ai limiti.

Per convincersene, basta pensare al caso di una distribuzione uniforme ($\Phi' = \text{cost.}$). La (10) assegna sul contorno tanto la derivata tangenziale, quanto la derivata normale di φ . Viceversa è ben noto che una sola di queste condizioni, in concorso con $\Delta_2\varphi = \text{cost.}$, individua una funzione regolare (a meno di una costante additiva); nè c'è manifestamente ragione perchè l'altra condizione rimanga anch'essa soddisfatta.

Ne consegue che l'esistenza di un integrale φ della (9), per cui sieno verificate le condizioni ai limiti (10), è in generale subordinata ad un'opportuna scelta della funzione $\Phi'(\varphi)$.

Sarà *sempre* possibile, per un assegnato campo σ , disporre di $\Phi'(\varphi)$ in modo che esista un tale integrale?

È questa una questione di analisi, che io non intendo discutere nella presente nota.

Mi limiterò a mostrare (§ 5), per dare almeno un esempio di effettiva esistenza delle soluzioni in discorso, che la risposta è affermativa nel caso di un campo σ di forma circolare.

Completiamo la discussione del sistema (a) nell'ipotesi che esista realmente una φ dotata delle proprietà volute. Una tale φ si può intanto ritenere nulla sul contorno s (aggiungendo, se occorre, una opportuna costante e modificando in conformità la Φ'): è ciò che segue dalle (10), le quali danno

$$d\varphi = d(f - f^*) \quad (\text{lungo il contorno } s)$$

e quindi, per essere sullo stesso contorno $f^* = f$, $d\varphi = 0$.

Si ha poi, riassumendo:

La integrazione del sistema (a) si può far dipendere dal problema esterno di Dirichlet (determinazione della funzione f^) e dalla integrazione dell'unica equazione indefinita (9), colla condizione qualitativa di regolare comportamento entro σ , e colle due condizioni ai limiti (10), le quali permettono in particolare di ritenere*

$$(10') \quad \varphi = 0 \quad (\text{sul contorno } s).$$

Le incognite del sistema (a), nei punti interni a σ , sono tutte esprimibili mediante φ (nonchè mediante f ed h , che sono dati della questione); e precisamente le componenti E_x , E_y della forza elettrica come derivate di $\varphi - f$; la componente H della forza magnetica a norma della (7), specificando Φ [perchè vi sia raccordo colla (4)] come quell'integrale di $\Phi'(\varphi)$, che assume il valore $\frac{1}{2}h^2$ per $\varphi = 0$; la densità ϱ a norma della (8); infine le componenti v_x , v_y della velocità a norma delle (I_a). Si hanno così le formole risolutive:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{\partial(\varphi - f)}{\partial x}, \quad E_y = \frac{\partial(\varphi - f)}{\partial y}; \\ \frac{1}{2}(H + h)^2 = \Phi(\varphi); \\ \varrho = \frac{1}{4\pi} \Phi'(\varphi); \\ v_x = \frac{-1}{4\pi A \varrho} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{-c}{H + h} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ v_y = + \frac{1}{4\pi A \varrho} \frac{\partial H}{\partial x} = + \frac{c}{H + h} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{array} \right.$$

valide nei punti interni a σ (contorno incluso).

All'esterno, dove per ipotesi non c'è elettricità ($\rho = 0$), si ha invece

$$(12) \quad H = 0, \quad E_x = -\frac{\partial f^*}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial f^*}{\partial y},$$

come segue immediatamente dalle (4) e (5).

Le ultime due equazioni (11) danno

$$v_x dy - v_y dx = \frac{c}{H + h} d\varphi,$$

donde apparisce che le linee di flusso coincidono colle linee

$$\varphi = \text{cost.}$$

Il contorno s del campo σ ($\varphi = 0$) è dunque una particolare linea di flusso, come del resto era chiaro a priori.

Si noti ancora che avendosi, per definire H , l'equazione

$$\frac{1}{2} (H + h)^2 = \Phi(\varphi),$$

è d'uopo che la funzione Φ non scenda mai al disotto di zero. È anzi da escludere anche il valore zero, se si vuol esser sicuri che le componenti v_x , v_y della velocità, le quali contengono a divisore $H + h$, si conservino esse pure finite e continue.

Siamo così condotti ad introdurre un'ultima restrizione qualitativa, ed è che $\Phi(\varphi)$ si mantenga sempre positiva entro σ .

5. - Campo di forma circolare.

Suppongasi in particolare che σ sia un cerchio di raggio R e che il campo elettrico esterno sia simmetrico rispetto al centro O . Ciò val quanto dire che il relativo potenziale f dipende da un solo argomento: la distanza r da O . Lo stesso ha luogo manifestamente per la funzione f^* , regolare all'esterno del cerchio, la quale coincide con f , per $r = R$.

In questo caso si può soddisfare in infiniti modi alle (9), (10) (e a tutte le volute condizioni qualitative) mediante funzioni φ , dipendenti anch'esse dalla sola r .

Per provarlo, cominciamo coll'osservare che, dipendendo tanto φ ,

quanto $f - f^*$ dalle coordinate x, y soltanto per tramite dell'argomento r , le due condizioni (10) si riducono ad una sola. Chiamando g il valore costante di $d(f - f^*)/dr$ per $r = R$, si può attribuirle la forma

$$(10'') \quad \frac{d\varphi}{dr} = g, \quad \text{per } r = R.$$

Se poi si osserva che (attesa la dipendenza dalla sola r)

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}$$

è senz'altro esprimibile per mezzo di una qualsiasi funzione di r , e in particolare quindi di φ , si riconosce che la condizione (9) è identicamente soddisfatta, purchè si chiami $\Phi'(\varphi)$ il valore di $\Delta_2\varphi$, espresso per φ .

Resta da precisare il comportamento qualitativo.

In primo luogo,

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \Delta_2\varphi = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

deve mantenersi generalmente diversa da zero e sempre finita, anche per $r = 0$; conviene dunque supporre che $d\varphi/dr$ si annulli almeno di prim'ordine per $r = 0$.

Inoltre, avendosi

$$\Phi = \frac{1}{2} h^2 + \int_0^\varphi \Phi'(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} h^2 + \int_0^\varphi \Delta_2\varphi \cdot d\varphi,$$

ove si assuma r per variabile di integrazione e si sostituisca a $\Delta_2\varphi$ il suo valore, potremo scrivere

$$\Phi = \frac{1}{2} h^2 + \int_R^r \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) \frac{d\varphi}{dr} dr,$$

od anche, avendo riguardo alla (10''),

$$\Phi = \frac{1}{2} \left\{ h^2 - g^2 + \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \right\} - \int_r^R \frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 dr,$$

talchè la condizione che Φ resti sempre positiva entro σ , dà luogo alla disuguaglianza

$$h^2 + \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 > g^2 + 2 \int_0^R \frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 dr \quad (0 \leq r \leq R).$$

A questa si può sostituire una semplice disuguaglianza numerica, ove si osservi che il minimo valore del primo membro è h^2 , mentre il massimo del secondo è

$$g^2 + 2 \int_0^R \frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 dr,$$

e che questi valori sono entrambi assunti per $r = 0$.

È così necessario e sufficiente che si abbia

$$(13) \quad h^2 > g^2 + 2 \int_0^R \frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 dr.$$

Viceversa si constata ovviamente che, scelta per $d\varphi/dr$ una qualunque funzione finita e continua assieme alla sua derivata prima nel tratto $(0, R)$, la quale si annulli di prim'ordine almeno per $r = 0$, assuma il valore g per $r = R$, non renda identicamente nulla l'espressione

$$A_2\varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr},$$

e soddisfaccia inoltre alla disuguaglianza (13), le (11) definiscono effettivamente funzioni finite e continue.

A titolo d'esempio, ove sia $h^2 > 2g^2 > 0$, si può prendere

$$\frac{d\varphi}{dr} = g \frac{r}{R}.$$

6. - Conseguenze del sistema (b).

Dobbiamo ancora tener conto del sistema (b). Esso porge anzi tutto

$$(14) \quad E_z = H_x = H_y = 0;$$

inoltre, avuto riguardo ai precedenti risultati, implica condizioni restrittive per il dato campo esterno. In modo preciso, si arriva alla conclusione che l'ipotesi preliminarmente assunta di un flusso per piani paralleli è legittima solo a patto che il campo esterno D verifichi le condizioni [analoghe alle (14)]

$$(15) \quad e_z = h_x = h_y = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. — Cominciamo dalle (II_b). Esse esprimono che E_z è costante, e quindi zero, dato che deve annullarsi all'infinito.

Pure costante è e_z (§ 3).

Le (I_b) e (IV) stanno a dire che H_x, H_y derivano da un potenziale armonico. Tenuto conto che H_x, H_y devono mantenersi finite e continue *in tutto lo spazio* e annullarsi all'infinito, ne segue $H_x = H_y = 0$.

Rimane da tener conto della (V_b). Sostituendovi per v_x, v_y i loro valori (11) e ricordando (§ 3) che h_x, h_y derivano da un potenziale armonico v , essa può essere scritta

$$(16) \quad \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = e_z(H + h) = e_z \sqrt{2\Phi}.$$

Moltiplichiamone entrambi i membri per $d\sigma$ e integriamo, estendendo l'integrazione a tutto il campo σ .

L'integrale del primo membro equivale a

$$-\int_{\sigma} \varphi \Delta_2 v d\sigma - \int_{\sigma} \varphi \frac{dv}{dn} ds,$$

designando n la normale in un punto generico del contorno s , vólta verso l'interno del campo. I due integrali si annullano, per essere v armonica, e $\varphi = 0$ sul contorno, a norma della (10').

Ne viene

$$e_z \int_{\sigma} \sqrt{2\Phi} d\sigma = 0;$$

ma, come abbiamo rilevato alla fine del § 4, 2Φ è sempre > 0 , talchè il radicale non può cambiar segno e l' $\int_{\sigma} \sqrt{2\Phi} d\sigma$ è certamente diverso da zero.

Deve pertanto annullarsi la costante e_z .

Con ciò la (16) si riduce a

$$\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

la quale sta ad esprimere che è nulla la derivata di v secondo la direzione normale ad una generica linea di flusso $\varphi = \text{cost.}$, in particolare secondo la normale al contorno s .

Siccome la v è armonica e regolare entro σ , la condizione $dv/dn = 0$ sul contorno implica che essa si riduca ad una costante, donde

$$h_x = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad h_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{c. d. d.}$$