III.

SULL'ATTRAZIONE ESERCITATA DA UNA LINEA MATERIALE IN PUNTI PROSSIMI ALLA LINEA STESSA

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. $XVII_2$, (1908_2), pp. 3-15.

Nella teoria del potenziale e nelle sue varie applicazioni ha essenziale importanza il comportamento dell'attrazione newtoniana nell'interno o nell'immediata prossimità dell'agente. La questione, esaurientemente trattata per le distribuzioni a tre e a due dimensioni, attende ancora una risposta sistematica per il caso di una linea materiale. La maggior parte degli autori si limita ad osservare che nè la funzione potenziale V, nè le sue derivate si mantengono in generale finite, quando il punto potenziale si avvicina indefinitamente alla linea. Ora è ben chiaro che interessa sapere qualche cosa di più, e precisamente in qual modo tali funzioni diventano infinite, ciò che è messo in evidenza dalle così dette espressioni asintotiche.

Nell'idrodinamica, lo studio dei filetti vorticosi rettilinei o circolari aveva imposto da tempo la considerazione di speciali espressioni asintotiche. Spetta però al sig. Da Rios [1] il merito di aver per primo istituita una ricerca generale di questo tipo. Egli ha trovato (prescindo dall'interpretazione idrodinamica, per rilevare soltanto il contenuto analitico) espressioni asintotiche, valide per una linea qualunque, le quali competono a certe tre differenze formate con derivate di potenziali newtoniani (componenti del rotor di un potenziale vettore).

Il metodo del Da Rios si potrebbe facilmente trasportare a casi analoghi; in particolare alle derivate di un potenziale di linea.

È tuttavia preferibile riprendere la ricerca *ab initio*, sostituendo all'indagine diretta delle tre componenti dell'attrazione quella di un

[1] *Sul moto di un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo XXII, 1906, pp. 117-135.

unico elemento: il relativo potenziale V. Con opportuna trasformazione vien fatto di distinguere nella funzione sotto il segno una parte principale ed un termine complementare, il contributo del quale si mantiene finito assieme alle sue prime derivate, anche quando il punto potenziato si avvicina indefinitamente alla linea potenziante.

Eseguendo la effettiva integrazione della parte principale, e riducendo, si ha una espressione asintotica $V^{(a)}$ del potenziale V, *atta alla derivazione*, tale cioè che non soltanto la differenza $V - V^{(a)}$, ma anche le derivate di $V - V^{(a)}$ si mantengono finite. Ciò val quanto dire che le derivate di $V^{(a)}$ forniscono senz'altro le cercate espressioni asintotiche delle componenti dell'attrazione (²).

Con questo procedimento si ha il vantaggio che tutto è sostanzialmente riassunto in una formula unica, l'eguaglianza asintotica $V = V^{(a)}$, da cui discendono come corollari immediati le particolarizzazioni e combinazioni, che interessano dal punto di vista idrodinamico od elettrodinamico.

Ho così ritrovato, a titolo di esempio, le espressioni asintotiche dovute al DA RIOS. Seguirà prossimamente un'applicazione ai campi elettromagnetici puri.

1. - Preliminari.

Sia L una linea materiale (aperta o chiusa); O un suo punto qualunque; λ un tratto *non nullo* di L, avente uno degli estremi in O; λ^* un analogo tratto in verso opposto a partire da O, coll'ovvia avvertenza che λ^* viene a mancare, qualora O sia un estremo di L.

Diciamo Λ ciò che resta di L, quando se ne tolgono i tratti λ e λ^* (il solo λ, se O è un estremo); dL un generico elemento della linea; μ la densità (lineare) spettante all'elemento; P il punto potenziato, esterno ad L, che faremo poi avvicinare indefinitamente al punto (arbitrariamente prescelto) O di L; r la distanza fra P e il generico elemento potenziante.

Il potenziale newtoniano dell'attrazione, esercitata dalla linea L su P, può manifestamente scindersi in tre (due, nel caso particolare, in cui O coincide con un estremo di L) addendi, che corrispondono ai tratti λ, λ^* e Λ (o, rispettivamente, λ e Λ).

(²) Una espressione asintotica del potenziale V, valida per una linea materiale di forma qualunque, si trova nella *Théorie du potentiel newtonien* [Paris, Carré et Naud, 1899, p. 128] del sig. POINCARÉ. Va notato tuttavia che tale espressione non è atta alla derivazione, essendo ricavata in base alla sola condizione che resti finita la differenza fra essa e V. Non si può quindi pretendere che rimangano finite anche le derivate. Il confronto colla nostra $V^{(a)}$ mostra anzi che ciò in generale non accade.

Ponendo

$$(1) \qquad V_\lambda = \int_\lambda \frac{\mu\, dL}{r},$$

$$(2) \qquad V_{\lambda^*} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\lambda^*} \frac{\mu\, dL}{r} & \text{(se } O \text{ è un punto intermedio)}, \\ 0 & \text{(se } O \text{ è un estremo)}, \end{cases}$$

$$(3) \qquad V_\Lambda = \int_\Lambda \frac{\mu\, dL}{r},$$

scriveremo in conformità

$$(4) \qquad V = V_\lambda + V_{\lambda^*} + V_\Lambda .$$

Occupiamoci ora del primo addendo.

2. - Specificazione delle ipotesi concernenti λ.

Supponiamo che il tratto di linea λ sia regolare; più generalmente, che le coordinate dei suoi punti siano esprimibili come funzioni dell'arco, finite assieme alle loro derivate prime, seconde e terze.

Detta s la lunghezza dell'arco, compreso fra l'estremo O e un punto generico di λ, l la lunghezza totale di λ, sarà $dL = ds$ e la (1) potrà scriversi

$$(1') \qquad V_\lambda = \int_0^l \frac{\mu(s)}{r}\, ds .$$

Supponiamo ancora che la densità $\mu(s)$ sia, in tutto l'intervallo $(0, l)$, funzione finita assieme alle sue derivate prima e seconda. Ciò permette di applicare ad essa lo sviluppo di MACLAURIN, arrestato al secondo termine, e porge

$$(5) \qquad \mu(s) = \mu_0 + \mu_0' s + \mu_1 s^2$$

essendo μ_0 e μ_0' i valori di μ e della sua derivata per $s = 0$, e μ_1 una funzione di s, anch'essa finita e continua.

Assumiamo una terna di riferimento coll'origine in O e cogli assi orientati come segue: asse x diretto secondo la tangente, nel senso della linea λ; asse y secondo la normale principale, nel senso della concavità (a piacere, ove fosse nulla la curvatura); asse z diretto in modo da rendere la terna trirettangola e, diciamo, sinistrorsa.

Indichiamo con ξ, η, ζ le coordinate di un punto generico di λ, e con c il valore della curvatura nel punto O.

Avremo, per $s = 0$,

$$\xi = 0\,, \qquad \eta = 0\,, \qquad \zeta = 0\,;$$

$$\frac{d\xi}{ds} = 1\,, \qquad \frac{d\eta}{ds} = 0\,, \qquad \frac{d\zeta}{ds} = 0\,;$$

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = 0\,, \qquad \frac{d^2\eta}{ds^2} = c\,, \qquad \frac{d^2\zeta}{ds^2} = 0\,,$$

con che lo sviluppo abbreviato di Maclaurin, arrestato al terzo termine, porge, in tutto l'intervallo $(0, l)$

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} \xi = s + s^3\xi_1\,, \\ \eta = c\dfrac{s^2}{2} + s^3\eta_1\,, \\ \zeta = s^3\zeta_1\,, \end{cases}$$

ξ_1, η_1, ζ_1 rappresentando funzioni di s, finite e continue.

Introduciamo infine: le coordinate x, y, z del punto potenziato P; la sua distanza ε da O; l'inclinazione ϑ di OP sulla direzione positiva x della tangente; l'angolo φ (contato nel verso $y \to z$), che la proiezione di OP sul piano normale (ad L in O) forma colla direzione positiva y della normale principale.

Sarà evidentemente:

$$\text{(7)} \qquad x = \varepsilon\cos\vartheta\,, \qquad y = \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\varphi\,, \qquad z = \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,;$$

dopo di che, avendo riguardo alle (6) e ponendo

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} s^2\xi_1^2 + 2\xi_1 + s^2\eta_1^2 + cs\eta_1 + \dfrac{c^2}{4} + s^2\zeta_1^2 = \sigma\,, \\ \qquad -2(\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z) = S\,, \\ \qquad \sigma s + S = T\,, \end{cases}$$

risulta

$$(9) \qquad r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 =$$
$$= s^2 - 2s\,\varepsilon \cos\vartheta + \varepsilon^2 + (-cy + Ts)s^2 .$$

Il nostro scopo è di indagare il comportamento di V_λ quando P si avvicina indefinitamente ad O, quando cioè si fa convergere a zero la distanza ε, pur seguitando — questo si intende bene — a ritenere P esterno alla linea e quindi $\varepsilon > 0$ (senza di che l'integrale (1') sarebbe privo di significato).

Circa le modalità con cui P si avvicina ad O, non faremo ipotesi speciali, come sarebbe l'ammettere che ciò avvenga secondo un determinato cammino.

Ci basterà precisare una limitazione, che risiede nella natura delle cose, ed è la seguente: trattandosi di un punto P esterno alla linea, il suo avvicinamento ad O non può seguire in direzione tangenziale; noi ammetteremo che, al convergere di ε a zero, la direzione OP si mantenga, non soltanto distinta da x, ma addirittura esterna ad un cono rotondo, tracciato attorno ad x con apertura ϑ_0 *non nulla*. Con tale restrizione, sarà in ogni caso

$$\vartheta_0 < \vartheta < \pi - \vartheta_0$$

e per conseguenza

$$(10) \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta} < \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta_0},$$

essendo $1/\operatorname{sen}\vartheta_0$ una costante finita.

3. - La distanza ridotta Δ e i rapporti s/Δ, ε/Δ.

Fissiamo i primi tre termini dell'espressione (9) di r^2, e poniamo

$$(11) \qquad \Delta^2 = s^2 - 2s\varepsilon\cos\vartheta + \varepsilon^2 = (s - x)^2 + y^2 + z^2 .$$

Δ può così riguardarsi come ciò che diventa la distanza r, quando vi si pone $c = \xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0$, quando cioè, badando alle (6), si passa dalla curva λ alla sua tangente in O (asse delle ascisse). È ben naturale di chiamare Δ *distanza ridotta* (rispetto ad r), in quanto la si ottiene sostituendo ad un punto s della curva λ quel punto della sua tangente (in O), che è situato alla stessa distanza s (da O).

Ciò premesso, ricordiamo la nota identità

$$s^2 - 2s\varepsilon \cos \vartheta + \varepsilon^2 = (s - \varepsilon e^{i\vartheta})(s - \varepsilon e^{-i\vartheta})$$

e osserviamo che i due fattori $s - \varepsilon e^{i\vartheta}$, $s - \varepsilon e^{-i\vartheta}$ sono complessi coniugati, ed hanno quindi moduli eguali. D'altra parte il loro prodotto, che è poi il quadrato di questo modulo, vale Δ^2, a norma della (11). Ciascuno di essi ha dunque Δ per modulo. Siccome gli argomenti sono eguali e di segno opposto, potremo porre

$$s - \varepsilon e^{i\vartheta} = \Delta e^{i\tau}$$
$$s - \varepsilon e^{-i\vartheta} = \Delta e^{-i\tau},$$

con τ reale (al pari di s, ε, ϑ, ecc.).

Queste due equazioni, lineari in s ed ε, sono certo indipendenti, dacchè ϑ non può essere zero, nè π. La loro risoluzione porge

$$(12) \qquad \begin{cases} s = -\Delta \dfrac{\operatorname{sen}(\tau - \vartheta)}{\operatorname{sen}\vartheta}, \\[2ex] \varepsilon = -\Delta \dfrac{\operatorname{sen}\tau}{\operatorname{sen}\vartheta}, \end{cases}$$

e quali, avuto riguardo alla disuguaglianza (10), mostrano che i rapporti s/Δ, ε/Δ si mantengono essenzialmente finiti, comunque varino (anche tendendo a zero) s ed ε. I valori assoluti di questi rapporti ammettono entrambi come limite superiore la costante $1/\operatorname{sen}\vartheta_0$.

4. - Nozione di ordine.

Sia N un polinomio omogeneo in x, y, z, s, a coefficienti costanti, od anche funzioni essi stessi dei quattro argomenti, da ritenersi finite per tutti i valori di s appartenenti all'arco λ e per un certo campo (x, y, z), cui supponiamo appartenga l'origine O.

Sia h il grado di N, k un altro intero qualsiasi, e si consideri una frazione del tipo

$$\frac{N}{\Delta^k}.$$

La differenza $h - k = n$ sarà detta *ordine* della frazione.

Ove si osservi che i rapporti

$$\frac{x}{\Delta} = \frac{\varepsilon}{\Delta}\cos\vartheta\,, \quad \frac{y}{\Delta} = \frac{\varepsilon}{\Delta}\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi\,, \quad \frac{z}{\Delta} = \frac{\varepsilon}{\Delta}\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi\,, \quad \frac{s}{\Delta}\,,$$

rimangono finiti [in virtù delle (12) e (10)] anche per $\varepsilon = s = 0$, si riconosce ovviamente che *ogni frazione d'ordine* $\geqslant 0$ *si conserva finita anche per* $x = y = z = s = 0$. Per un qualsiasi altro sistema di valori del campo considerato la cosa è di per sè evidente, data la natura di N e di Δ, e il fatto che Δ si annulla soltanto per $\varepsilon = s = 0$.

È importante notare che *la derivata* (rapporto ad x, y, z) *di una generica frazione d'ordine* n *può essere posta sotto la forma di una frazione d'ordine* $n-1$, purchè, beninteso, si supponga che i coefficienti del polinomio N sieno dotati di derivate finite rapporto ad x, y, z.

Immaginiamo infatti di derivare N/Δ^k, rapporto ad x per esempio.

Quando si deriva il numeratore N, c'è da tener conto che x vi compare come argomento del polinomio, nonchè (eventualmente) pel tramite dei coefficienti.

Risulteranno perciò due termini, di cui il primo è un polinomio omogeneo di grado $h-1$, mentre l'altro rimane un polinomio omogeneo di grado h, l'uno e l'altro a coefficienti in generale variabili (funzioni finite di x, y, z, s). Ora si può, in molti modi, risguardare anche il secondo polinomio come omogeneo di grado $h-1$, anzichè h, bastando all'uopo staccare uno degli h fattori x, y, z, s di ciascun termine e attribuirlo al relativo coefficiente.

La derivazione del numeratore dà in definitiva

$$\frac{N_1}{\Delta^k}\,,$$

dove N_1 è un polinomio (come già N, a coefficienti in generale variabili) di grado $h-1$.

La derivazione del denominatore Δ^k porge, a norma della (11),

$$-\frac{kN}{\Delta^{k+1}}\,\frac{x-s}{\Delta}\,.$$

Si ha così complessivamente

$$\frac{N_1\Delta^2 - kN(x-s)}{\Delta^{k+2}}\,.$$

Dacchè Δ^2 è un polinomio omogeneo di secondo grado in x, y, z, s, al numeratore compete il grado $h+1$. La frazione è quindi d'ordine

$$h + 1 - (k + 2) = n - 1\,, \qquad \text{c. d. d.}$$

Combinando le due proprietà di derivazione e di comportamento, si ha ancora:

Una funzione d'ordine $\geqslant 1$ *si mantiene finita, assieme alle sue derivate* (rapporto ad x, y, z), *anche per* $\varepsilon = s = 0$.

5. - Discriminazione dei termini d'ordine minimo contenuti in $1/r$ e in μ/r.

In base alle ipotesi del n. 2, c è una costante (curvatura di λ in O) e T una funzione di x, y, z, s, che possiede un limite superiore finito, ogni qualvolta la distanza di P da O non supera un limite prefissato, del resto qualunque, ε_0.

Supponendo ε_0 abbastanza piccolo e limitando, se occorre, la lunghezza l di λ, potremo ritenere

$$|-cy + Ts| < \operatorname{sen}^2 \vartheta_0\,,$$

per ogni $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ e per ogni $s \leqslant l$.

Ove si ponga

$$q = \frac{(-cy + Ts)s^2}{\Delta^2}\,, \tag{13}$$

e si ricordi che il modulo di s/Δ non supera $1/\operatorname{sen}\vartheta_0$, si avrà pure la disuguaglianza

$$|q| < 1\,.$$

Essa permette di scrivere

$$(1 + q)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\,q + q^2 f(q)\,, \tag{14}$$

designando f una funzione di q, olomorfa per $|q| < 1$.

Veniamo ormai al punto principale della discussione, che è lo studio di $1/r$.

Le (9), (11) e (13) dànno anzitutto

$$r^2 = \Delta^2 + (-cy + Ts)s^2 = \Delta^2(1 + q)\,.$$

Di qua, elevando entrambi i membri alla potenza $-1/2$ e badando alla (14), si ricava

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\varDelta}\left\{1-\frac{1}{2}q+q^2f(q)\right\}.$$

Esplicitando $-q/2$ a norma della (13) e ponendo

$$G=-\frac{1}{2}\frac{Ts^3}{\varDelta^3}+\frac{q^2f(q)}{\varDelta}, \tag{15}$$

risulta

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\varDelta}+\frac{1}{2}cy\frac{s^2}{\varDelta^3}+G. \tag{16}$$

Per riconoscere il comportamento di G, conviene richiamarsi al numero precedente, e osservare quanto segue:

1) q è, a norma della (13), una frazione di prim'ordine: pure di prim'ordine è in conseguenza $q^2f(q)/\varDelta$;

2) per le (8), σ è funzione finita di s, S funzione lineare omogenea di x, y, z (con coefficienti che sono funzioni finite di s). Risultano quindi di prim'ordine $T=\sigma s+S$, nonchè $-Ts^3/(2\varDelta^3)$.

Dopo ciò, il termine complementare G si presenta come somma di due frazioni di primo ordine. La derivabilità dei coefficienti rapporto ad x, y, z essendo evidentemente assicurata, si può asserire, per l'osservazione finale del numero precedente, che G si conserva finito, assieme alle sue derivate rapporto ad x, y, z, anche per $s=\varepsilon=0$.

La stessa proprietà compete naturalmente a μG, essendo μ la funzione di s (finita assieme alle sue due prime derivate), che rappresenta la densità.

Ove si ponga mente alla espressione (5) di $\mu(s)$, e si considerino i prodotti

$$\frac{s^2\mu_1}{\varDelta}, \qquad \frac{\frac{1}{2}cys^3(\mu_0'+\mu_1 s)}{\varDelta^3},$$

si vede subito che sono entrambi di primo ordine.

Ne viene, in base alle (15) e (16),

$$\frac{\mu}{r}=\alpha+A, \tag{17}$$

dove

$$\alpha=\frac{\mu_0}{\varDelta}+\frac{1}{2}c\mu_0 y\frac{s^2}{\varDelta^3}+\mu_0'\frac{s}{\varDelta}, \tag{18}$$

e

$$A = \mu G + \frac{s^2\mu_1}{\Delta} + \frac{\frac{1}{2}cys^3(\mu_0' + \mu_1 s)}{\Delta^3}, \tag{19}$$

la funzione A mantenendosi finita assieme alle sue derivate (rapporto ad x, y, z) *anche per* $\varepsilon = s = 0$.

6. - Espressione asintotica di V_λ.

L'$\int_0^l \alpha\, ds$ si valuta coi procedimenti elementari del calcolo.

Anzi tutto, tenendo conto della definizione (11) di Δ^2,

$$\Delta^2 = s^2 - 2sx + \varepsilon^2 \qquad (x = \varepsilon\cos\vartheta),$$

potremo scrivere l'espressione (18) di α sotto la forma

$$\alpha = \frac{\mu_0}{\Delta} + \frac{1}{2}c\mu_0 y\,\frac{\Delta^2 + 2x(s-x) + \varepsilon^2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)}{\Delta^3}$$

$$+ \mu_0'\frac{s-x}{\Delta} + \mu_0'\frac{x}{\Delta} = \left\{\mu_0\left(1 + \frac{1}{2}cy\right) + \mu_0' x\right\}\frac{1}{\Delta} + c\mu_0 xy\,\frac{s-x}{\Delta^3}$$

$$+ \frac{1}{2}c\mu_0 y(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)\frac{\varepsilon^2}{\Delta^3} + \mu_0'\frac{s-x}{\Delta}.$$

Siccome poi

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{d}{ds}\log(\Delta + s - x),$$

$$\frac{s-x}{\Delta^3} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{\Delta},$$

$$\frac{\varepsilon^2}{\Delta^3} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\vartheta}\frac{d}{ds}\frac{s-x}{\Delta},$$

$$\frac{s-x}{\Delta} = \frac{d}{ds}\Delta,$$

così, integrando e limitando fra 0 e l, ove si chiami J_l il complesso dei termini, che si riferiscono al limite superiore l, e si avverta che, per

$s = 0$, $\Delta = \varepsilon$, risulta subito

$$\int_0^l \alpha\, ds = -\left\{\mu_0 \left(1 + \frac{1}{2}\, cy\right) + \mu_0' x\right\} \log (\varepsilon - x) + c\mu_0 \frac{xy}{\varepsilon}$$
$$+ \frac{1}{2}\, c\mu_0 y \frac{\cos^2 \vartheta - \operatorname{sen}^2 \vartheta}{\operatorname{sen}^2 \vartheta} \frac{x}{\varepsilon} - \mu_0' \varepsilon + J_l\,.$$

Si riconosce senza alcuna difficoltà, in base alle (7) e alla disuguaglianza fondamentale (10), che

$$-\left\{\frac{1}{2}\, c\mu_0 y + \mu_0' x\right\} \log \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

$$c\mu_0 \frac{xy}{\varepsilon},$$

$$\frac{1}{2}\, c\mu_0 y \frac{\cos^2 \vartheta - \operatorname{sen}^2 \vartheta}{\operatorname{sen}^2 \vartheta} \frac{x}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\, c\mu_0 y \frac{x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + z^2} \frac{x}{\varepsilon},$$

$$-\mu_0' \varepsilon,$$

nonchè J_l si mantengono finiti, assieme alle loro derivate (rapporto ad x, y, z) anche per $x = y = z = 0$. Potremo quindi scrivere, chiamando B l'insieme di questi termini,

$$\int_0^l \alpha\, ds = -\mu_0 \log (\varepsilon - x) - \left\{\frac{1}{2}\, c\mu_0 y + \mu_0' x\right\} \log \varepsilon + B\,.$$

Dato il comportamento di A, siamo fatti certi che anche $\int_0^l A\, ds$ è funzione di x, y, z, che si mantiene finita, assieme alle sue derivate prime, nell'intorno dell'origine.

Se quindi si pone

(20) $$V_\lambda^{(a)} = -\mu_0 \log (\varepsilon - x) - \{\tfrac{1}{2} c\mu_0 y + \mu_0' x\} \log \varepsilon\,,$$

(21) $$F_\lambda = B + \int_0^l A\, ds\,,$$

si avrà dalle (1') e (17)

(22) $$V_\lambda = V_\lambda^{(a)} + F_\lambda$$

con F_λ finita assieme alle sue prime derivate.

Il primo addendo $V_\lambda^{(a)}$ *costituisce pertanto una espressione asintotica di* V_λ *atta alla derivazione.*

7. - Espressione asintotica del potenziale V.

Riportiamoci al n. 1 e ricordiamo che, essendo L la linea potenziante ed O un suo punto qualunque, abbiamo immaginato di scindere L nei tratti λ, λ^* e Λ, mancando λ^* quando O è un estremo di L.

Ammetteremo, come è ben naturale, che la configurazione geometrica di L e la distribuzione delle masse posseggano i soliti requisiti, siano cioè rappresentabili mediante funzioni finite e *generalmente* derivabili quanto occorre. L'avverbio *generalmente* sta a significare che si esclude al più un numero finito di punti *angolosi*, nei quali può subire brusche variazioni qualcuno di questi elementi: direzione della tangente, curvatura, densità.

Ciò posto, tanto se O è un punto ordinario, quanto se è un punto angoloso (purchè soltanto non sia un estremo di L), si potranno certamente staccare da una parte e dall'altra di esso due archi λ e λ^*, dotati entrambi delle proprietà specificate al n. 2, e abbastanza brevi, perchè sia valida la disuguaglianza, di cui è parola in principio del n. 5.

Ne viene che i due addendi V_λ e V_{λ^*} della formula (4) posseggono ciascuno una espressione asintotica, a norma della (20).

Il terzo addendo V_Λ rimane regolare nell'intorno di O, perchè proviene da elementi situati a distanza finita da O. L'espressione asintotica $V^{(a)}$ di V si riduce dunque a $V_\lambda^{(a)} + V_{\lambda^*}^{(a)}$.

Qualora O sia un estremo, viene a mancare il tratto λ^* e rimane $V^{(a)} = V_\lambda^{(a)}$.

Esplicitiamo $V^{(a)}$, distinguendo all'uopo tre casi:

a) *O è un punto ordinario di L.*

Il triedro principale $Oxyz$, relativo all'arco λ, differisce dall'analogo triedro relativo all'arco λ^* soltanto per il fatto che sono diretti per verso opposto i due assi delle x, e anche quelli delle z, se i due triedri si ritengono congruenti (entrambi sinistrorsi per es.).

Affinchè le coordinate x, y, z di P, le quali appariscono nelle due espressioni di $V_\lambda^{(a)}$ e di $V_{\lambda^*}^{(a)}$, siano riportate al medesimo sistema coordinato, basterà, in una delle due, in quella di $V_{\lambda^*}^{(a)}$ per es., scambiare x e z in $-x$ e $-z$.

D'altra parte, trattandosi di un punto ordinario, le due costanti c e μ_0 sono le stesse tanto per $V_\lambda^{(a)}$ quanto per $V_{\lambda^*}^{(a)}$, mentre (essendo opposte le direzioni dei due archi λ e λ^*) il μ_0', relativo a $V_{\lambda^*}^{(a)}$, presenta un cambiamento di segno rispetto all'elemento analogo, relativo a $V_\lambda^{(a)}$. Ne risulta

$$V^{(a)} = -\mu_0 \log(\varepsilon^2 - x^2) - 2\{\tfrac{1}{2}c\mu_0 y + \mu_0' x\} \log \varepsilon, \tag{23}$$

dove — riassumo, per comodo di consultazione, il significato delle lettere — *le coordinate x, y, z si riferiscono al triedro principale della linea L nel punto O, coll'asse x diretto secondo la tangente* (in un senso arbitrario) *e l'asse y secondo la normale principale* (verso la concavità di L); *c è la curvatura nel punto O; μ_0 il valore della densità in questo punto; μ_0' il valore della derivata di μ* (rapporto all'arco, nel senso assunto come positivo sulla tangente); *infine $\varepsilon = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ è la distanza del punto potenziato P da O.*

b) O è un estremo di L.

Manca l'addendo $V_{\lambda*}^{(a)}$ e si ha per $V^{(a)}$ l'espressione (20).

c) O è un punto angoloso.

In questo caso sono in generale diverse le orientazioni dei due triedri principali relativi a λ e a λ^*, nonchè i valori di c, μ_0 e μ_0'.

L'espressione asintotica si ha ancora esplicitando

$$V_\lambda^{(a)} + V_{\lambda*}^{(a)},$$

come nel caso *a*); ma la trasformazione di coordinate, necessaria per far apparire nei due addendi uno stesso sistema di riferimento, non dà luogo, in generale, a riduzioni significanti.

8. - Espressione asintotica della velocità indotta da un vortice lineare.

Ferme restando le notazioni finora adoperate, sia ω una funzione di s (finita assieme alle sue due prime derivate), e si ponga

$$\left\{\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi}\int_L \omega \frac{d\xi}{ds}\frac{ds}{r}, \\ Q &= \frac{1}{2\pi}\int_L \omega \frac{d\eta}{ds}\frac{ds}{r}, \\ R &= \frac{1}{2\pi}\int_L \omega \frac{d\zeta}{ds}\frac{ds}{r}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

L'espressione asintotica di P in un punto ordinario O si ottiene senza altro dalla (23), sostituendo, al posto di μ, $\omega(d\xi/ds)$, e, per conseguenza,

$$\frac{d}{ds}\left(\omega\frac{d\xi}{ds}\right) = \omega\frac{d^2\xi}{ds^2} + \frac{d\omega}{ds}\frac{d\xi}{ds},$$

al posto di μ'.

Analogamente per Q ed R. Nel punto O si ha, in virtù delle (6),

$$\frac{d\xi}{ds} = 1, \quad \frac{d\eta}{ds} = 0, \quad \frac{d\zeta}{ds} = 0;$$

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{ds^2} = c, \quad \frac{d^2\zeta}{ds^2} = 0.$$

Se quindi si rappresentano con ω_0 e ω_0' i valori di ω e di $d\omega/ds$ in O, risulta subito che bisogna porre nella (23):

$$\text{per } P, \quad \mu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{e} \quad \mu_0' = \frac{\omega_0'}{2\pi},$$

$$\text{per } Q, \quad \mu_0 = 0 \quad \text{e} \quad \mu_0' = \frac{c\omega_0}{2\pi},$$

$$\text{per } R, \quad \mu_0 = \mu_0' = 0.$$

Ne conseguono le espressioni asintotiche

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} P^{(a)} &= -\frac{\omega_0}{2\pi}\log(\varepsilon^2 - x^2) - \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}c\omega_0 y + \omega_0' x\right\}\log\varepsilon, \\ Q^{(a)} &= -\frac{1}{\pi}c\omega_0 x\log\varepsilon, \\ R^{(a)} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Il rotor del vettore (P, Q, R) ha per componenti

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}, \\ v &= \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}, \\ w &= \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}. \end{aligned}\right.$$

Le loro espressioni asintotiche $u^{(a)}$, $v^{(a)}$, $w^{(a)}$ si hanno senz'altro, limitando nei secondi membri P, Q, R alle parti asintotiche (25).

A prescindere da termini che rimangono finiti anche per $\varepsilon = 0$, risulta

$$(27) \quad \begin{cases} u^{(a)} = 0\,, \\[2ex] v^{(a)} = -\dfrac{\omega_0}{\pi}\,\dfrac{z}{\varepsilon^2 - x^2}\,, \\[2ex] w^{(a)} = -\dfrac{\omega_0}{2\pi}\,c \log \varepsilon + \dfrac{\omega_0}{\pi}\,\dfrac{y}{\varepsilon^2 - x^2}\,. \end{cases}$$

Le (26) definiscono in particolare (³) le componenti u, v, w della velocità provocata, in seno ad un liquido indefinito, da una linea vorticosa L, o meglio da un filetto vorticoso di sezione infinitesima avente L per direttrice e $2\bar{\omega}$ per momento: in questo caso $\bar{\omega}$ (semicircolazione) è a ritenersi una pura costante, e coincide quindi con ω_0.

Comunque, le espressioni asintotiche di tale velocità sono date dalle (27), come, per altra via, aveva già dimostrato il dott. DA RIOS.

(³) Cfr. per es. P. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, [Paris, Gauthier-Villars, 1903], t. III, p. 415.