SOPRA LE CORRISPONDENZE (p, p) ESISTENTI SULLE CURVE DI GENERE p A MODULI GENERALI

È ben nota la teoria delle corrispondenze (algebriche) $(1, 1)$ esistenti sopra le curve ellittiche [1] (ossia di genere $p = 1$) a modulo generale, ed è anche nota l'estensione che di tale teoria è stata fatta dal prof. Castelnuovo alle curve di genere p e a moduli generali, considerando le corrispondenze univoche tra i gruppi di p punti delle curve medesime [2]. Ma una tale estensione può eseguirsi anche in un altro senso, proponendosi cioè la ricerca delle corrispondenze algebriche (p, p) esistenti sopra le curve di genere p e a moduli generali.

Si incontrano così alcuni risultati, i quali, per quanto dedotti assai facilmente, pure non sono del tutto privi di interesse.

§ I.

1. Fra due punti x ed y di una curva algebrica C (o della corrispondente superficie Riemanniana R) di genere p e *a moduli generali* sia stabilita una corrispondenza (algebrica) tale che ad ogni

(1) Cfr. per una trattazione completa dell'argomento la Nota del prof. Segre: *Le corrispondenze univoche nelle curve ellittiche* (« Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. XXIV, 1889), nella quale sono anche contemplati i casi delle curve singolari. A proposito di questa e della denominazione adoperata nel testo di curve a moduli generali avvertiamo che esse hanno un significato preciso; quello stabilito nel § 2 della Nota del sig. Hurwitz: *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip* (« Berichte sächs. Ges. d. W. », 1886; e « Math. Ann. », Bd. 28).

(2) Castelnuovo: *Le corrispondenze univoche tra gruppi di p punti sopra una curva di genere p* (« Rendiconti del R. Istit. Lombardo »; serie II, vol. XXX, 1892).

posizione del punto x corrispondano β posizioni del punto y, y', $y'' \dots y^{(\beta)}$, in generale diverse fra loro e diverse dal punto x, e ad ogni posizione del punto y corrispondano α posizioni del punto $x, x' \dots x^{(\alpha)}$, diverse in generale fra loro e da y.

Allora se si indicano con $u_1(x), u_2(x) \dots u_p(x)$ i valori nel posto x dei p integrali normali di 1ª specie della superficie Riemanniana R, per un noto ragionamento del sig. HURWITZ (¹) si ha:

$$\sum_{i=1}^{i=\beta} u_k(y^{(i)}) + \gamma\, u_k(x) \equiv \pi_k \qquad (k = 1 \dots p) \tag{1}$$

essendo γ un numero intero (positivo o negativo) e π_k una costante indipendente (come γ) dal punto x (²).

Il numero γ si dice *valenza* della corrispondenza.

Se γ è positivo, le (1) esprimono, per il teorema d'ABEL, che gli ∞^1 gruppi di $p + \gamma$ punti di C costituiti da un punto qualunque x contato γ volte e dai β punti y corrispondenti appartengono a una medesima serie lineare, e, come ha mostrato il prof. SEGRE (³), basta questa osservazione per dedurre geometricamente in tal caso che il numero delle coincidenze è dato da $\alpha + \beta + 2p\gamma$.

Se invece γ è negativo, indichiamone con γ' il valore assoluto e diciamo $y'_1 \dots y_1^{(\beta)}$ i punti corrispondenti alla posizione x_1 del punto x: le formule (1) assumeranno l'aspetto:

$$\sum_{i=1}^{i=\beta} u_k(y^{(i)}) \equiv \gamma'\, u_k(x) + \pi_k \qquad (k = 1 \dots p) \tag{2}$$

e insieme ad esse si avranno le altre:

$$\sum_{i=1}^{i=\beta} u_k(y_1^{(i)}) \equiv \gamma'\, u_k(x_1) + \pi_k \qquad (k = 1 \dots p). \tag{3}$$

Allora sarà:

$$\sum_{i=1}^{i=\beta} u_k(y^{(i)}) + \gamma' u_k(x_1) \equiv \sum_{i=1}^{i=\beta} u_k(y_1^{(i)}) + \gamma'\, u_k(x) \qquad (k = 1 \dots p) \tag{4}$$

e quindi, per il teorema di ABEL:

(¹) Loc. cit.

(²) Insieme alle (1) vanno tenute presenti le formule perfettamente analoghe che legano ogni punto y ai punti x corrispondenti. Si ha:

$$\sum_{i=1}^{i=\alpha} u_k(x^{(i)}) + \gamma\, u_k(y) \equiv \varrho_k \qquad (k = 1 \dots p)$$

ϱ_k essendo una nuova costante indipendente da y.

(³) SEGRE: *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (« Ann. di Mat. » serie 2ª, vol. 22).

In ogni corrispondenza a valenza negativa $-\gamma'$ *esistente sopra una curva algebrica qualsiasi* (¹), *due punti qualunque* x *ed* x_1 *della curva contati ciascuno* γ' *volte e presi, il punto* x *insieme ai punti corrispondenti ad* x_1, *e il punto* x_1 *insieme ai punti corrispondenti ad* x, *costituiscono due gruppi di punti equivalenti o corresiduali.*

Reciprocamente è chiaro che:

Se in una corrispondenza esistente sopra una curva algebrica due punti qualunque x *ed* x_1 *della curva contati ciascuno* γ' *volte e presi, il punto* x *insieme ai punti corrispondenti a* x_1 *e il punto* x_1 *insieme ai punti corrispondenti ad* x *costituiscono due gruppi di punti corresiduali, la corrispondenza è a valenza negativa* $-\gamma'$.

Infatti dalle (2) e (4) combinate insieme risultano le (3).

2. Ciò posto, consideriamo una corrispondenza (p, p) esistente sopra la curva C e supponiamo dapprima che essa sia a valenza positiva.

Detta γ la valenza, i gruppi di $p+\gamma$ punti costituiti dai punti di C, contati γ volte ciascuno, insieme ai loro p punti corrispondenti apparterranno a una serie lineare $g_{p+\gamma}$ (con un punto γ-plo in ogni punto di C e quindi) di dimensione $r \geq \gamma$, e se supponiamo che tali gruppi non siano speciali sarà $r = \gamma\ (\gamma > 0)$ e $g_{p+\gamma}$ sarà una serie completa.

Allora i punti y corrispondenti a un dato punto x di C si otterranno costruendo il gruppo di $g_{p+\gamma}$ che ha in x un punto γ-plo e considerando come punti y i rimanenti p punti del gruppo; e i punti x corrispondenti a un dato punto y saranno tanti quanti sono i gruppi della $g_{p+\gamma}$ che contengono y ed hanno (altrove) un punto γ-plo. Ma questi gruppi sono notoriamente (²) $p\gamma^2$, quindi la corrispondenza fra x e y è una (p, p) solo quando $\gamma = 1$.

Segue da tutto ciò che:

Una classe di ∞^p *corrispondenze* (p, p) *a valenza positiva si ottiene considerando le* ∞^p g^1_{p+1} *complete non speciali esistenti sopra la curva* C. *Ognuna di esse dà luogo a una corrispondenza simmetrica* (p, p) *di valenza 1, quando si facciano corrispondere a ogni punto* x *di* C *i* p *punti che insieme ad esso dànno un gruppo della serie* g^1_{p+1} *considerata; e queste corrispondenze sono le sole corrispondenze* (p, p) *esistenti sopra* C *per le quali si verifichi che ogni punto della curva*

(¹) A moduli generali, o non.

(²) SEGRE: *Introduzione*, ecc., n. 42.

contato un numero di volte eguale alla valenza dia insieme ai suoi p punti corrispondenti un gruppo non speciale.

§ II.

3. Per brevità di discorso diciamo *speciale* una corrispondenza (p, p) di valenza positiva γ, per la quale accada che ogni [1] punto di C contato γ volte insieme ai suoi p punti corrispondenti dia un gruppo speciale (per modo che sia $\gamma \leq p - 2$): allora perchè si possano dire determinate tutte le corrispondenze (p, p) di valenza positiva esistenti sopra C occorrerà, grazie al teorema precedente, determinare ancora le sole corrispondenze speciali.

Fra queste si presenteranno naturalmente le corrispondenze (p, p) che nascono dalle g^1_{p+1} speciali (incomplete), come le non speciali dalle g^1_{p+1} non speciali (complete), ma, al contrario del caso precedente, esse non esauriranno tutte le possibili corrispondenze speciali.

Caratterizzare tutte le corrispondenze speciali è un problema che in generale non pare facilmente risolubile: qui trattiamo soltanto alcuni casi particolari i quali varranno a metterne in luce tutto l'interesse.

4. Poichè per $p = 1$ e $p = 2$ non esistono evidentemente corrispondenze speciali, incominciamo dal considerare il caso $p = 3$, e, per fissar le idee, supponiamo (come è sempre possibile applicando una conveniente trasformazione birazionale) che la curva C sia una quartica piana (generale).

Una corrispondenza (3,3) speciale esistente sopra la quartica C avrà la valenza γ minore di 2 e quindi nulla o uguale ad 1.

Se la valenza fosse zero le terne di punti y corrispondenti ai varii punti x di C costituirebbero una g^1_3 i gruppi della quale sarebbero riferiti biunivocamente ai punti della curva C, dunque resta possibile la sola ipotesi $\gamma = 1$.

Se $\gamma = 1$ le rette contenenti le quaterne di punti costituite dai punti x di C insieme ai tre punti corrispondenti formeranno un inviluppo della 4ª classe [2] (in corrispondenza biunivoca *prospettiva* colla quartica C) che potrà essere semplice o composto.

[1] Si osservi che se questo accade per un punto di C allora accade per ogni altro.

[2] Cfr. SEGRE: *Introduzione*, ecc., n. 46.

Se si spezza in un fascio contato 4 volte la corrispondenza (3 , 3) nasce nel modo noto da una g_4^1 speciale (incompleta), dunque casi nuovi (se possibili) non potranno aversi che dal supporre quell'inviluppo di 4ª classe spezzato in uno di 2ª classe contato due volte, oppure irriducibile. Ma entrambi questi casi sono impossibili perchè nel primo la quartica sarebbe iperellittica, e nel secondo la corrispondenza biunivoca prospettiva esistente tra la quartica e l'inviluppo sarebbe contenuta in una reciprocità (non degenere) del piano (¹), per cui solo i punti di una certa conica stanno nei raggi corrispondenti, dunque:

Sopra le curve di genere 3 a moduli generali non esistono corrispondenze speciali oltre le ∞^2 date dalle g_4^1 speciali.

5. Se $p = 4$ si vede come prima che non possono esistere sulla curva C corrispondenze (4,4) di valenza nulla, dunque bisognerà discutere soltanto i casi $\gamma = 1$, $\gamma = 2$.

Pel caso $\gamma = 1$ cominciamo dall'osservare che le quintuple date dai punti x di C insieme ai quattro punti corrispondenti apparterranno a una g_5^2 (completa) della curva, dunque, rappresentando, mediante questa g_5^2, la curva C sopra una quintica piana, che diremo ancora C, con due punti doppii M ed N, potremo supporre che quelle quintuple di punti siano quintuple di punti allineati, ed avremo che le rette contenenti tali quintuple costituiranno un inviluppo Γ di 5ª classe in corrispondenza biunivoca prospettiva con la curva C.

Se Γ si spezza in un fascio contato 5 volte, la (4 , 4) considerata nasce da una g_5^1 speciale, dunque, per fare un caso nuovo, supponiamo che Γ sia irriducibile, cioè sia un vero e proprio inviluppo di 5ª classe con due tangenti doppie m ed n.

La corrispondenza biunivoca che intercede fra C e Γ muterà i gruppi della g_5^2 segnata sopra C dalle rette del piano (che diremo π) nei gruppi di una g_5^2 segnata sopra Γ da un tessuto di coniche tangenti ad m , n e a una terza tangente p di Γ; e muterà i gruppi della g_5^2 di Γ costituiti dai gruppi di tangenti passanti pei varii punti del piano nei gruppi di una g_5^2 segnata sopra C da una rete di coniche passanti per M , N e un terzo punto P di C: dunque è contenuta in una trasformazione quadratica Σ del piano punteggiato π nel piano rigato avente il medesimo sostegno.

(¹) Cfr. Segre: *Introduzione*, ecc., n. 57.

Ora in una trasformazione quadratica generale di un piano punteggiato in un piano rigato ad esso sovrapposto solo i punti di una cubica (¹) si trovano nei raggi corrispondenti, dunque per quella trasformazione Σ ogni punto di π si muta in un raggio passante per esso.

Allora *data* la curva C si dovrà procedere nel modo seguente per costruire un inviluppo Γ di 5ª classe in corrispondenza biunivoca prospettiva con la curva C. Si incomincierà dal considerare la rete delle coniche passanti per M, N, P, P essendo un punto arbitrario di C, e si stabilirà una corrispondenza proiettiva tra queste coniche e i punti (considerati come centri di fasci di raggi) del piano rigato π in modo che la corrispondenza quadratica che ne risulta fra le rette del piano rigato π e i punti del piano punteggiato sovrapposto faccia corrispondere ad ogni raggio un punto su di esso, e poi trasformando C mediante questa corrispondenza quadratica si otterrà *appunto* un inviluppo della 5ª classe che potrà assumersi come inviluppo Γ. Fissato il triangolo MNP vi sono (²) ∞^1 corrispondenze quadratiche di quella natura, dunque, tenendo conto delle considerazioni precedenti e ricordando che ogni curva di genere 4 contiene ∞^1 g_5^2 (complete) speciali si ha che:

Ogni curva di genere 4 contiene ∞^3 corrispondenze speciali di valenza 1 diverse dalle ∞^3 che si ottengono considerando le serie g_5^1 esistenti sulla curva. Quest'ultime sono simmetriche, quelle altre no.

6. Le nuove corrispondenze speciali (4,4) di valenza 1 che così si ottengono sopra una qualunque curva algebrica di genere 4 si organizzano in ∞^1 sistemi di ∞^2 corrispondenze ciascuno, ogni sistema essendo coordinato a una g_5^2 speciale (completa) della curva.

(¹) Questa osservazione serve come punto di partenza al sig. Th. Tuch nella sua nota: *Eine Cremona'sche Punkt-Gerade Verwandtschaft zweiter Ordnung* u. s. w. (Jena, 1890) per una trattazione delle proprietà dei 24 triangoli inscritti e circoscritti a una cubica generale.

(²) Assumiamo il triangolo MNP come triangolo fondamentale in una determinazione parametrica dei punti e delle rette del piano mediante coordinate omogenee. Dicendo $x_1\, x_2\, x_3$ le coordinate di punti e $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ quelle di rette, le ∞^1 corrispondenze in questione sono tutte e sole quelle date dalle formule:

$$\xi_1 = \lambda x_2\, x_3$$
$$\xi_2 = \mu x_3\, x_1$$
$$\xi_3 = -(\lambda + \mu)\, x_1\, x_2$$

al variare del parametro $\dfrac{\lambda}{\mu}$.

Noi vogliamo considerare più davvicino le proprietà delle ∞^2 corrispondenze del sistema coordinato a una certa g_5^2 della curva, rappresentando come prima la curva sopra una quintica piana C con due punti doppii M ed N e la g_5^2 mediante la serie tagliata sulla quintica dalle rette del suo piano π.

Avremo che una di quelle ∞^2 corrispondenze si otterrà trasformando prima quadraticamente (in modo opportuno) la curva C in un inviluppo della 5ª classe Γ riferito ad esso biunivocamente e prospettivamente, e poi chiamando corrispondenti due punti x ed y di C quando y si trova sulla tangente di Γ corrispondente al punto x e uscente da x.

Il triangolo fondamentale, nel piano punteggiato, sarà formato dai punti M ed N e da un certo terzo punto P di C [1], e il trilatero fondamentale sul piano rigato sarà dato dalle tre rette

$$m = NP, \quad n = PM, \quad p = MN$$

M ed m, N ed n, P e p essendo gli elementi omologhi.

Allora la curva C si trasformerà in un inviluppo Γ della 5ª classe con due tangenti doppie nelle rette m ed n, e con una tangente semplice nella retta p, e nella corrispondenza biunivoca prospettiva intercedente fra C e Γ, p sarà la retta corrispondente all'ulterior punto di intersezione della retta MN colla quintica C, m ed n corrisponderanno rispettivamente alle coppie di punti secondo cui esse tagliano la curva C fuori dei punti M, N, P e le rette corrispondenti a uno dei due punti doppii, per es. M, saranno le due ulteriori tangenti di Γ passanti per M, oltre n e p. Ciò significa, riportandosi alla corrispondenza (4,4) individuata da Γ sopra C, che in essa al punto ove p taglia C fuori di M ed N corrispondono i quattro punti della curva che cadono nei due punti doppii, al punto doppio M (o N) considerato come appartenente ad uno dei due rami della curva passanti per esso corrisponde (insieme ad altri tre) il punto stesso considerato come appartenente all'altro, e che le coppie di punti secondo cui PM e PN tagliano ulteriormente la curva C sono coppie involutorie della corrispondenza.

[1] Il punto P può caratterizzarsi facilmente rispetto alla corrispondenza (4,4) considerata. Le quintuple date dai punti x di C insieme ai quattro punti y corrispondenti appartengono a una medesima serie g_5^2 tagliata sopra C dalle rette del piano, e che quindi ha per resto rispetto alla serie canonica il punto ove C è tagliata ulteriormente dalla retta MN: invece le quintuple date dai punti y di C insieme ai quattro punti x corrispondenti appartengono a una serie g_5^2, il cui resto rispetto alla serie canonica è proprio il detto punto P.

Queste due coppie insieme a quelle date dai punti doppii esauriscono le coppie involutorie della corrispondenza.

Abbiamo adunque:

Per le ∞^2 corrispondenze (4,4) coordinate a una medesima serie lineare g_5^2 della curva C, al punto che costituisce il resto di g_5^2 rispetto alla serie canonica corrispondono sempre i quattro punti che insieme ad esso completano due gruppi delle due g_3^1 appartenenti alla curva, e questi quattro punti si dividono relativamente alle due g_3^1 in due coppie di punti che in esse si corrispondono sempre involutoriamente. Ognuna delle ∞^2 corrispondenze dette contiene altre due coppie involutorie le quali insieme a un determinato punto (1) *della curva dànno due terne delle due g_3^1* (2).

7. Adesso, per esaurire la discussione nel caso $p = 4$, supponiamo che sulla curva C (sempre di genere 4) esista una corrispondenza Σ (4,4) di valenza $\gamma = 2$, e supponiamo che la curva C sia una sestica gobba di genere 4 dello spazio ordinario. Si osserverà subito che Σ è necessariamente una corrispondenza simmetrica. Infatti se ciò non fosse, la corrispondenza, che si otterrebbe ripetendola due volte di seguito sarebbe una (16,16) di valenza -4 (3) e quindi sarebbe priva di coincidenze, mentre essa ha almeno le 24 coincidenze della (4,4) (4).

(1) Vedi nota precedente.

(2) Il lettore osserverà che queste ed altre proprietà possono dedursi subito ammettendo l'esistenza delle corrispondenze in questione senza servirsi della loro effettiva costruzione e osserverà pure come questo enunciato diventa intuitivo quando si assuma a rappresentante della curva C (vedi testo n. seg.) la sestica di genere 4 dello spazio ordinario.

(3) Si verifica subito partendo dalle formule fondamentali (1) del sig. HURWITZ che il *prodotto* di una corrispondenza (α, β) di valenza γ e di una corrispondenza (α', β') di valenza γ' è una $(\alpha\alpha', \beta\beta')$ di valenza $-\gamma\gamma'$.

(4) Veramente il ragionamento del testo prova soltanto che detti $y' \dots y^{IV}$ i quattro punti y corrispondenti per Σ a un punto x, uno dei quattro punti y corrispondenti a *qualcuno* dei punti $y' \dots y^{IV}$, considerato come punto x, coincide con x: ma questa è una obbiezione che si toglie senza alcuna difficoltà.

Infatti se ciò accadesse e la corrispondenza (4,4) non fosse simmetrica, essa si *spezzerebbe* in due corrispondenze: una sarebbe una (α, α) simmetrica e l'altra una $(4-\alpha, 4-\alpha)$ *non* simmetrica, e, non potendo essere $\alpha = 1$ ed $\alpha = 3$ perchè $p > 1$ e la curva C è a moduli generali, sarebbe $\alpha = 2$. Esisterebbe quindi sopra C una (2,2) non simmetrica a valenza positiva (altrimenti il numero delle sue coincidenze sarebbe negativo). Ora ciò è impossibile per le cose dette qui e nel testo, dunque, ecc.

Ora il piano che tocca C in un suo punto qualunque e contiene gli altri quattro punti ad esso corrispondenti per Σ genera al variare di x una vera e propria sviluppabile di sesta classe Γ (¹) in corrispondenza biunivoca prospettiva con C, e questa corrispondenza è contenuta in una reciprocità dello spazio, dunque per l'osservazione precedente Γ corrisponde a C in un sistema nullo o nella polarità rispetto alla (*sola*) quadrica contenente C (²).

Un piano di Γ *tocca* la curva C nel punto corrispondente, e però se Γ corrispondesse a C in un sistema nullo le tangenti di C apparterrebbero a un complesso lineare. Ma ciò è impossibile, perchè allora le tre tangenti di C situate in uno dei suoi piani tritangenti passerebbero per un medesimo punto e toccherebbero la conica (non degenere) secondo cui quel piano taglia *la* quadrica passante per C, dunque Γ non può essere altra cosa che la sviluppabile di 6ª classe polare reciproca di C rispetto alla quadrica che la contiene.

Ne segue il teorema:

Sopra ogni curva algebrica di genere 4 a moduli generali esiste una sola corrispondenza (4,4) di valenza 2 (speciale). Essa è simmetrica e si ottiene facendo corrispondere a ogni punto della curva quei quattro che insieme ad esso completano due gruppi delle due g_3^1 *esistenti sulla curva* (³).

(¹) Infatti per un ragionamento precedente (n. 2) le sestuple date dai punti di C contati due volte ciascuno insieme ai quattro punti loro corrispondenti per Σ non possono essere contenute in una g_6^2.

(²) È ben noto che una curva speciale normale d'ordine $2p-2$ e genere p di S_{p-1} è contenuta in $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ quadriche linearmente indipendenti. Cfr. ad es. Nöther: *Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen* (« Math. Ann. », Bd. 17).

(³) Pel caso $p=5$ non siamo riusciti a dare una discussione completa come pel caso $p=4$. Possiamo però far osservare che sopra una curva C di genere 5 a moduli generali non esistono corrispondenze speciali di valenza 0, 2 o 3. Pel caso della valenza nulla si applica la solita considerazione del testo dopo aver osservato che sopra C una serie completa (speciale) d'ordine 5 ha la dimensione 1. Quanto a quelle di valenza 2 o 3 si dimostra dapprima che esse sono necessariamente simmetriche, poi, rappresentando la curva C rispettivamente sopra una curva C^7 (speciale, normale) del 7º ordine dello spazio ordinario, o sopra una curva C^8 (speciale, normale) dell'8º ordine dell'S_4, si osserva come la nostra asserzione si riduca all'altra: che le tangenti di C^7 non possono appartenere a un complesso lineare e che gli iperpiani tangenti a una delle ∞^2 quadriche passanti per C^8 nei punti di C^8 non possono aver tutti contatto tripunto con C^8.

Che le tangenti di C^7 non possono appartenere a un complesso lineare

§ III.

8. Passiamo adesso a considerare le corrispondenze (p, p) di valenza negativa, e quindi uguale a -1, esistenti sopra la curva C di genere p e a moduli generali. Vedremo che, al contrario di quanto accade per le corrispondenze a valenza positiva, qui si riesce a caratterizzarle completamente e a costruirle tutte nel caso di p qualunque in una maniera geometrica semplice.

Infatti sia Σ una tal corrispondenza. Se x ed x_1 sono due punti di C e $y' \dots y^{(p)}$, $y'_1 \dots y_1^{(p)}$ i gruppi di punti ad essi corrispondenti per Σ, i due gruppi $(x_1 y' \dots y^{(p)})$ ed $(x y'_1 \dots y_1^{(p)})$ sono corresiduali, ossia appartengono a una medesima serie lineare d'ordine $p+1$.

Ora dico che qualunque sia il punto x il gruppo dei p punti corrispondenti $y' \dots y^{(p)}$ non può essere speciale.

Infatti supponiamo che ciò non sia, e indichiamo con g_p^r la serie speciale completa cui appartiene il gruppo $y' \dots y^{(p)}$. Se x_1 è un punto generico della curva C, la serie g_{p+1}^r, ottenuta aggiungendo x_1 ai gruppi di g_p^r, è ancora completa [1] e quindi il gruppo

si dimostra subito. Infatti se ciò non fosse la classe della sviluppabile bitangente a C^7 sarebbe (contrariamente a quanto risulta dalle note formule di CAYLEY) uguale all'ordine della linea nodale della rigata (sviluppabile) costituita dalle sue tangenti, perchè ogni piano bitangente di C^7 passante per un punto x dello spazio darebbe col punto d'intersezione delle due tangenti di C^7 in esso contenute un punto della linea nodale situato nel piano polare di x rispetto al sistema nullo individuato dal complesso in questione, e, dualmente, ogni punto della linea nodale situato in un piano ξ dello spazio darebbe un piano bitangente di C^7 passante pel polo di ξ.

Quanto alla proprietà accennata di C^8 essa può dimostrarsi nel modo che ora diremo, indicatoci gentilmente dal prof. SEGRE.

Se gli iperpiani tangenti nei punti di C^8 a una M_3^2, passante per C_8, avessero tutti contatto tripunto colla curva, le tangenti di C^8 apparterrebbero alla M_3^2, e allora, proiettando stereograficamente la M_3^2 da un suo punto O sopra un S_3, la C^8 si proietterebbe in una γ^8 dello spazio ordinario le cui tangenti sarebbero tutte appoggiate a una conica λ avente otto punti comuni con γ^8. Quindi λ sarebbe linea 12-pla per la rigata di 24^0 grado costituita dalle tangenti di γ^8. Ora γ^8 è situata sopra una superficie cubica passante per λ (proiezione della superficie del 4^0 ordine comune alle M_3^2 passanti per C^8 e per O) e la residua intersezione di questa superficie e di quella rigata, oltre γ^8 e λ, è tutta composta di rette, dunque quella superficie (che è affatto generale) conterrebbe $3.24 - 2.8 - 2.12 = 32$ rette: ciò che è assurdo.

[1] Per il *teorema di riduzione* dovuto al sig. NOETHER. Cfr. BERTINI: *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* («Ann. di Mat.», serie II, vol. 22).

costituito da x e dai punti $y_1' \ldots y_1^{(p)}$ corrispondenti a x_1 dovrà appartenere a quella g_{p+1}', e dei p punti $y_1' \ldots y_1^{(p)}$ uno dovrà coincidere con x_1. Ora ciò è assurdo, se, come supponiamo, i p punti corrispondenti per Σ a un punto generico di C sono diversi dal punto medesimo.

Da questo ragionamento segue che la serie lineare completa d'ordine $p+1$ cui appartengono i gruppi $(x_1 y' \ldots y^{(p)})$ ed $(x\, y_1' \ldots y_1^{(p)})$ ha la dimensione uguale all'unità, e che quindi la corrispondenza Σ è pienamente individuata quando sia assegnato il gruppo (non speciale) di p punti corrispondenti a un punto qualunque x.

9. Ciò posto è facile dimostrare che esiste sempre una corrispondenza Σ, della specie considerata nel n. precedente, che faccia corrispondere a un punto qualunque x di C un gruppo qualunque (non speciale) di p punti $y' \ldots y^{(p)}$.

Infatti sia x_1 un punto di C diverso da x e facciamo corrispondere ad x_1 quel gruppo di p punti $y_1' \ldots y_1^{(p)}$ che insieme a x dà un gruppo corresiduale al gruppo $(x_1\, y' \ldots y^{(p)})$. La corrispondenza Σ, che così si ottiene, fa corrispondere al punto x i punti $y' \ldots y^{(p)}$, è a valenza -1, ed è priva di coincidenze, perchè se il punto x_2, per es., coincidesse con uno dei suoi p punti corrispondenti, per es., con y_2', dall'essere corresiduali i due gruppi $(x\, x_2\, y_2'' \ldots y_2^{(p)})$ e $(x_2\, y' \ldots y^{(p)})$ si ricaverebbe la corresidualità dei gruppi $(y' \ldots y^{(p)})$ e $(x\, y_2'' \ldots y_2^{(p)})$ e il gruppo $(y' \ldots y^{(p)})$ sarebbe speciale. Conseguentemente la corrispondenza Σ è una (p, p) di valenza -1 e si ha il teorema:

Le corrispondenze $(p\,, p)$ *di valenza* (*negativa e quindi*) -1, o anche, *le corrispondenze* $(p\,, p)$ *prive di coincidenze esistenti sopra una curva di genere* p *a moduli generali sono* ∞^p: *e una qualunque di esse è pienamente individuata quando sia assegnato* (*in modo arbitrario*) *il gruppo* (*non speciale*) *dei* p *punti corrispondenti a un punto qualunque della curva.*

10. Per brevità diciamo Σ una corrispondenza (p,p) a valenza -1, e cerchiamo quante di queste corrispondenze Σ sono simmetriche.

Sia Σ' una tale corrispondenza simmetrica e siano $y' \ldots y^{(p)}$ i punti corrispondenti per essa al punto x: se diciamo $z_i' \ldots z_i^{(p)}$ i punti corrispondenti a $y^{(i)}$, uno dei punti $z_i' \ldots z_i^{(p)}$ dovrà coincidere con x.

Se poniamo $x = z'_i$ si avranno delle formule del tipo:

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{j=p} u_k(y^{(j)}) \equiv u_k(x) + \pi_k \qquad (k = 1 \ldots p)$$

$$(6) \qquad u_k(x) + \sum_{j=2}^{j=p} u_k(z_i^{(j)}) \equiv u_k(y^{(j)}) + \pi_k \qquad (k = 1 \ldots p)$$

e quindi, sommando, sarà:

$$(7) \qquad \sum_{j=2}^{j=p} [u_k(y^{(j)}) + u_k(z_i^{(j)})] + 2\pi_k \qquad (k = 1 \ldots p),$$

ossia, i gruppi di $2p - 2$ punti costituiti dai punti corrispondenti per Σ' a un punto qualunque x e a uno qualunque dei suoi punti corrispondenti $y^{(i)}$, eccettuati x ed $y^{(i)}$, appartengono a una medesima serie lineare d'ordine $2p - 2$, g_{2p-2}.

I $p - 1$ gruppi di g_{2p-2} passanti per y', ad es., e costituiti dai p punti corrispondenti ad x tranne $y^{(i)}$ $(i \neq 1)$ e dai p punti corrispondenti ad $y^{(i)}$ tranne x sono linearmente indipendenti, perchè $p - 2$ qualunque di essi hanno comune un punto che non fa parte del rimanente, quindi individuano una serie lineare ∞^{p-2} contenuta in g_{2p-2} e avente un punto fisso nel punto y'. Ora y' è un punto generico di C, quindi la dimensione della serie g_{2p-2} è $p - 1$ (non potendo essere maggiore di $p - 1$) ed essa è proprio la *serie canonica* di C.

Ora consideriamo insieme ai punti $y' \ldots y^{(p)}$ corrispondenti a x i punti $y'_1 \ldots y_1^{(p)}$ corrispondenti a un altro punto qualunque x_1: sarà:

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} u_k(y^{(i)}) \equiv u_k(x) + \pi_k \qquad (k = 1 \ldots p)$$

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} u_k(y_1^{(i)}) \equiv u_k(x_1) + \pi_k \qquad (k = 1 \ldots p)$$

e quindi:

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} [u_k(y^{(i)}) + u_k(y_1^{(i)})] \equiv u_k(x) + u_k(x_1) + 2\pi_k \; (k = 1 \ldots p)$$

ma se si considera un gruppo qualunque della serie canonica la somma dei valori dell'integrale u_k nei suoi punti è congrua a $2\pi_k$, dunque:

Due punti qualunque di C insieme a un gruppo qualunque della serie canonica dànno un gruppo di $2p$ punti corresiduale a quello costituito dai punti ad essi corrispondenti per Σ'.

In particolare:

Un punto di C contato due volte insieme a un gruppo qualunque della serie canonica dà un gruppo di 2p punti corresiduale a quello costituito dai suoi punti corrispondenti contato ciascuno due volte.

Ora un punto x di C, contato due volte, insieme a un gruppo qualunque della serie canonica individua una serie completa g_{2p}^{p} con 2^{2p} gruppi [1] costituiti da p punti doppii, e di questi 2^{2p} gruppi, $2^{p-1}(2^p - 1)$ [1] sono costituiti dal punto x contato due volte insieme ai punti di un gruppo della serie canonica dato da $p-1$ punti doppii, dunque il gruppo di p punti corrispondenti a x per una corrispondenza simmetrica Σ' (se esiste) è uno dei rimanenti:

$$2^{2p} - 2^{p-1}(2^p - 1)$$

gruppi di p punti doppii di quella g_{2p}^{p}.

11. Ebbene sia $y' \ldots y^{(p)}$ uno di questi gruppi (certo non speciale) e consideriamo la corrispondenza $\Sigma'(p, p)$ e a valenza -1 (determinata), che fa corrispondere ad x i punti $y' \ldots y^{(p)}$. Per essa varranno formule del tipo:

$$\sum_{i=1}^{i=p} u_k(y^{(i)}) \equiv u_k(x) + \pi_k \qquad (k = 1 \ldots p) \tag{11}$$

e, per ipotesi, la costante π_k sarà determinata da ciò che il suo doppio $2\pi_k$ deve essere una quantità congrua alla somma dei valori dell'integrale u_k nei punti di un gruppo qualunque della serie canonica: quindi se $y_1' \ldots y_1^{(p)}$ sono i punti corrispondenti per Σ' a un altro punto qualunque x_1 di C, il gruppo $y_1' \ldots y_1^{(p)}$ avrà con x_1 la stessa relazione che il gruppo $y' \ldots y^{(p)}$ ha col punto x.

Inoltre supponiamo che quando x prende la posizione del punto y' i suoi punti corrispondenti siano $z' \ldots z^{(p)}$: insieme alle (11) sarà:

$$\sum_{i=1}^{i=p} u_k(z^{(i)}) \equiv u_k(y') + \pi_k \qquad (k = 1 \ldots p) \tag{12}$$

e quindi:

$$u_k(y'') + \ldots + u_k(y^{(p)}) + u_k(z') + \ldots + u_k(z^{(p)}) \equiv u_k(x) + 2\pi_k .$$

Ciò significa, pel teorema d'ABEL, che il gruppo $y'' \ldots y^{(p)} z' \ldots z^{(p)}$ è corresiduale a tutti i gruppi costituiti dal punto x insieme ai punti di un gruppo qualunque della serie canonica: ma questi gruppi dànno evidentemente una g_{2p-1}^{p-1} completa, dunque dei punti $y'' \ldots y^{(p)}$

[1] Cfr. ad es. CLEBSCH: *Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie* (« Crelle's Journal », Bd. 63).

$z' \dots z^{(p)}$ uno certamente coincide con x. Un tal punto non può essere uno dei punti $y^{(i)}$, dunque sarà uno dei punti $z^{(i)}$ e la corrispondenza Σ' sarà una corrispondenza simmetrica. Abbiamo con ciò il teorema:

Le corrispondenze (p, p) prive di coincidenze e simmetriche esistenti sopra una curva di genere p e a moduli generali sono in numero di $2^{2p} - 2^{p-1}(2^p - 1)$ e si ottengono tutte nel modo detto sopra.

12. Se nell'enunciato precedente si fa $p = 1$, si ottiene il teorema ben noto che sopra una curva ellittica a modulo generale esistono solo tre involuzioni prive di coincidenze; se invece si fa $p = 3$, si trova che sopra una curva di genere 3 a moduli generali esistono soltanto 36 corrispondenze (3,3) simmetriche e prive di coincidenze.

Ora in una mia breve nota inserita nei *Mathematische Annalen* (1) ho dimostrato che ogni quartica piana generale può pensarsi come covariante S di altre 36, e sopra il covariante S di una quartica si ha subito una corrispondenza simmetrica (3,3) priva di coincidenze quando si considerino come corrispondenti due punti aventi per conica polare mista una retta doppia, dunque ricordando che la quartica piana è appunto di genere 3, possiamo dire che:

Le 36 corrispondenze (3,3) simmetriche e prive di coincidenze determinate sopra una quartica piana dalle altre 36 di cui essa è covariante S sono le sole corrispondenze di quella natura esistenti su di essa.

Nella detta nota, per stabilire la proprietà citata, si parte dalla considerazione dei sistemi di cubiche seitangenti alla quartica piana e si mostra una stretta relazione fra le 36 quartiche di cui la data è covariante S e i suoi 36 sistemi di cubiche seitangenti di 2ª specie (cioè tali che mai i sei punti di contatto di una qualunque di esse giacciano sopra una conica): ora il lettore può verificare che tale processo presenta delle analogie con quello che qui si adopera pel caso generale di p qualunque, e che i teoremi che là si dànno sui triangoli polohessiani si deducono facilmente da quelli stabiliti qui al n. 10 e da considerazioni analoghe.

13. Un altro teorema sui triangoli polohessiani che segue subito da quello generale del n. 1 sulle corrispondenze a valenza negativa è il seguente:

(1) Scorza: *Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali* (« Math. Ann. », Bd. 52).

Detti x ed x_1 due punti del covariante S di una quartica e yzt, $y_1z_1t_1$ i loro rispettivi triangoli polohessiani, le due quaterne di punti $xy_1z_1t_1$ e x_1yzt possono assumersi come punti base di due fasci di coniche proiettivi generanti il covariante medesimo.

Esso permette di costruire una quartica Q quando si sappia che due suoi punti x ed x_1 devono avere per triangoli polohessiani rispetto a un'altra quartica (non data), di cui Q deve essere covariante S, i due triangoli yzt, $y_1z_1t_1$ (inscritti in una medesima conica) e che inoltre essa deve passare per un nono punto u_1 (non situato sulla retta xx_1).

Infatti, per uno di quei teoremi a cui poco fa si alludeva, la quartica Q deve passare pei punti u_2, u_3 ove la conica circoscritta ai triangoli yzt, $y_1z_1t_1$ taglia la retta xx_1, e allora per quel che or ora abbiamo affermato la quartica Q è generata dai fasci di coniche aventi per punti-base i punti $xy_1z_1t_1$ e x_1yzt e riferiti proiettivamente, così che alle coniche del primo fascio passanti per u_1, u_2, u_3 corrispondano rispettivamente le coniche del secondo fascio passanti pei medesimi punti.

14. Infine osserviamo che, se si rappresenta la curva C di genere p sopra la curva speciale normale d'ordine $2p - 2$ dello spazio S_{p-1}, si ottengono su questa $2^{2p}-2^{p-1}(2^p-1)$ corrispondenze fra i punti della curva e dei p-goni storti inscritti in essa perfettamente analoghe alle 36 corrispondenze fra i punti di una quartica e i loro triangoli polohessiani rispetto alle quartiche di cui quella data è covariante S.

Ma su ciò crediamo inutile insistere più oltre.

Torino, 2 febbraio 1900.