Nota II.

Ibidem, pp. 535-551.

5. - Scomposizione di V.

Prendiamo a considerare la sezione trasversale del tubo T praticata colla superficie $w = \text{cost.}$, che passa per il punto potenziato Q; sia O il punto in cui essa taglia la linea L' passante per un generico punto potenziante Q'.

Riattaccandoci alle notazioni del n. 2, diciamo σ questa sezione; x_0, y_0, z_0 le coordinate cartesiane di O; u_0, v_0 le sue coordinate curvilinee sopra σ.

Appartenendo, per definizione, O e Q' ad una medesima linea L, sarà

$$u_0 = u' , \qquad v_0 = v' ,$$

mentre, trovandosi O e Q sulla medesima sezione trasversale, w_0 coincide con w.

Se P designa l'intersezione di σ colla direttrice C, saranno (n. 1) $u = v = 0$, e sempre la stessa w, le coordinate curvilinee di questo punto.

Introduciamo ancora due punti R ed S di σ, caratterizzando cogli indici R ed S rispettivamente quanto ad essi si riferisce.

Così in particolare $\varrho_S^{\times}$ designerà il valore della densità ϱ in S; c_R la curvatura della linea L passante per R; α_R, β_R, γ_R i coseni direttori della tangente alla L nello stesso punto.

Indicheremo inoltre con

$$t_R = \alpha_R(x - x_0) + \beta_R(y - y_0) + \gamma_R(z - z_0)$$

la componente di OQ secondo la detta tangente, e con n_R la componente secondo la normale principale.

Anzitutto, per l'osservazione finale del n. 2, b)), il rapporto t_R/ε (coseno dell'angolo compreso fra la corda OQ e la tangente alla L in R)

non supera mai, in valore assoluto, un numero fisso, minore dell'unità. Ne consegue che la funzione

$$\log\left(1-\frac{t_R^2}{\varepsilon^2}\right)=\log\{1-(\alpha_R\varepsilon_1+\beta_R\varepsilon_2+\gamma_R\varepsilon_3)^2\}$$

degli argomenti

$$\varepsilon_1=\frac{x-x_0}{\varepsilon},\qquad \varepsilon_2=\frac{y-y_0}{\varepsilon},\qquad \varepsilon_3=\frac{z-z_0}{\varepsilon},$$

e dei parametri α_R, β_R, γ_R, cioè, possiamo dire, del punto parametrico R, è finita e dotata di derivate d'ordine primo e secondo ([5]) rispetto alle ε e alle coordinate del punto parametrico R.

Nelle stesse condizioni si trovano manifestamente t_R ed n_R, salvo la sostituzione degli argomenti $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ ai tre rapporti ε_1, ε_2, ε_3.

Dopo ciò, è subito visto che, ponendo [con notazione già usata al n. 2, b)]

$$(16)\qquad \begin{cases} g_1(R,S)=-\dfrac{|D_{OR}|}{h_R}\,\varrho_S\log\left(1-\dfrac{t_R^2}{\varepsilon^2}\right),\\[2ex] g_2(R,S)=-\dfrac{|D_{OR}|}{h_R}\,\varrho_S(2+c_Rn_R)-2\dfrac{1}{h_R}\dfrac{d}{dw}\left(\dfrac{|D_{OR}|}{h_R}\varrho_S\right)\cdot t_R\,,\end{cases}$$

le funzioni g_1 e g_2 godono delle proprietà contemplate al n.2 , g).

D'altra parte si verifica immediatamente, in base alle (12) e (12′), che il valore di $V^{(a)}$, definito dalla (15), non è altro che ciò che diventa

$$(17)\qquad g(R,S)=g_1(R,S)+g_2(R,S)\log\frac{\varepsilon}{l}\,,$$

quando i due punti parametrici R, S vengono entrambi a coincidere con O (con che h_R si riduce ad h_0, D_{OR} al valore di D in O, ecc.).

Si può dunque scrivere

$$V^{(a)}=g(O,O)\,,$$

od anche, aggiungendo e togliendo $g(P,S)$ (in cui al primo punto parametrico R è attribuita, come si vede, la speciale posizione P, mentre il

([5]) Date le ipotesi fatte originariamente sulle (1), si potrebbe anzi affermare l'esistenza delle derivate fino al terz'ordine. Ci limitiamo al secondo per enunciare una proprietà comune anche ad n_R.

secondo punto parametrico rimane indeterminato),

$$V^{(a)} = g(P, S) + \{g(O, O) - g(P, S)\}\,. \tag{15'}$$

Ove si ponga

$$\left\{\begin{aligned} V_1 &= -\frac{|D_{OP}|}{h_P}\varrho_S \log\frac{\varepsilon^2 - t_P^2}{l^2}\,,\\ V_2 &= -\left\{\frac{|D_{OP}|}{h_P}\varrho_S c_P n_P + 2\,\frac{1}{h_P}\,\frac{d}{dw}\left(\frac{|D_{OP}|}{h_P}\,\varrho_S\right)\cdot t_P\right\}\log\frac{\varepsilon}{l}\,,\\ V_3 &= g(O, O) - g(P, S)\,,\\ V_4 &= W\,, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

si ha subito dalle (16) e (17)

$$g(P, S) = V_1 + V_2\,,$$

quindi, per la (15'),

$$V^{(a)} = V_1 + V_2 + V_3\,,$$

e infine, risalendo alla (14),

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4\,. \tag{14'}$$

6. - Contributo recato da V_1 al potenziale U. Ordine di grandezza.

Nella (11') l'integrazione si riferisce alle coordinate curvilinee u', v', del punto potenziante Q'. Siccome queste coincidono colle u_0, v_0 del punto O, si può risguardare O come punto corrente di integrazione, e scrivere in conformità

$$U = \int_{\tilde\omega} du_0\, dv_0 V\,. \tag{11''}$$

Rappresentando con U_i il contributo recato ad U da V_i, si ha manifestamente

$$U_i = \int_{\tilde\omega} du_0\, dv_0 V_i\,. \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\,. \tag{19}$$

Occupiamoci in particolare di U_1. Mentre (u_0, v_0) descrive $\bar{\omega}$, il punto O descrive la sezione σ; d'altra parte, in virtù della (3), l'elemento di superficie $d\sigma_0$, circostante ad O, vale

$$d\sigma_0 = H_0\, du_0\, dv_0\,,$$

dove si intende manifestamente con H_0 il valore di H in O.

Mettendo in evidenza il campo di integrazione σ, sostituendo per V_1 il suo valore (18), e notando [n. 3, b)] che

$$\frac{|D_{OP}|}{H_0 h_P}\,,$$

rappresenta il coseno dell'angolo (acuto) ψ formato dalla direttrice C (cioè dalla tangente a C in P) colla normale a σ in O, la espressione (13) di U_1 diviene

$$U_1 = -\,\varrho_S \int_\sigma d\sigma_0 \cos\psi \log \frac{\varepsilon^2 - t_P^2}{l^2}\,.$$

ϱ_S figura fuori del segno di integrazione: ciò implica che il punto parametrico S sia scelto senza alcun legame colle variabili u_0, v_0 di integrazione (cioè colla posizione di O sulla sezione σ). D'ora innanzi riterremo S indipendente, non soltanto da u_0, v_0, ma anche dalle coordinate u, v del punto potenziato Q: precisamente come accade per il punto P.

Giova attribuire ad U_1 una forma più espressiva, facendo intervenire il piano normale alla direttrice C nel punto P.

Sia τ la proiezione ortogonale della sezione σ sul detto piano; siano O_0 e Q_0 quei due punti di τ, in cui si proiettano rispettivamente O e Q; $d\tau_0$ la proiezione di $d\sigma_0$.

Dacchè l'angolo diedro, formato dai piani dei due elementi $d\sigma$ e $d\tau_0$ è misurato da quello delle rispettive normali, sarà ovviamente

$$d\tau_0 = d\sigma_0 \cos\psi\,.$$

D'altra parte, essendo $|t_P|$ e

$$\overline{O_0Q_0} = \Delta$$

le proiezioni del segmento OQ secondo la tangente e secondo il piano normale a C in P, si ha ancora

$$\varepsilon^2 - t_P^2 = \overline{O_0 Q_0}^2 = \Delta^2 .$$

Ne consegue

$$U_1 = \varrho_S \int_\tau d\tau_0 \log \frac{l^2}{\Delta^2} . \tag{20}$$

Facciamo qualche considerazione sull'ordine di grandezza della funzione U_1.

All'uopo, riprendiamo la espressione di U_1, che risulta dalle due prime formule (18) e (19). Badando all'identità

$$\log \frac{\varepsilon^2 - t_P^2}{l^2} = \log\left(1 - \frac{t_P^2}{\varepsilon^2}\right) + \log \frac{\varepsilon^2}{\chi^2} - \log \frac{l^2}{\chi^2} ,$$

e ponendo

$$U_1' = \varrho_S \int_{\tilde{\omega}} du_0\, dv_0 \frac{|D_{OP}|}{h_P} \log \frac{l^2}{\chi^2} ,$$

$$U_1'' = -\varrho_S \int_{\tilde{\omega}} du_0\, dv_0 \frac{|D_{OP}|}{h_P} \left\{\log\left(1 - \frac{t_P^2}{\varepsilon^2}\right) + \log \frac{\varepsilon^2}{\chi^2}\right\} ,$$

avremo anzitutto

$$U_1 = U_1' + U_1'' . \tag{21}$$

Ora, intendendo χ definito dalla (7), il termine U_1'' è di secondo ordine in δ [ossia, n. 2, c), verifica una disuguaglianza tipo (10)], e ciò perchè [n. prec. e n. 2, a)] $\log(1 - t_P^2/\varepsilon^2)$ e $\log(\varepsilon^2/\chi^2)$ sono funzioni finite, ed è pur finito $1/h_P$, come è stato osservato in principio del n. 2. Sarà dunque, per un'opportuna costante M (indipendente dalle dimensioni trasversali del tubo)

$$|U_1''| < M\delta^2 . \tag{22}$$

È giunto il momento di disporre della indeterminata positiva l. Ci limiteremo a prenderla $> \delta$. Con questo — si noti bene — scelto, per un caso concreto, un determinato valore numerico di l, si può star certi che la disuguaglianza seguita a sussistere, anche se si passa a tubi più sottili, si fa cioè rimpicciolire $\tilde{\omega}$ e con esso la massima corda δ.

Ciò posto, designamo con d il limite inferiore di $|D_{OP}|$, al variare di P su C e di O sulla corrispondente sezione σ [6], e notiamo che χ non può mai superare δ.

Dacchè $\log(l^2/\chi^2) \geqslant \log(l^2/\delta^2) > 0$, sussiste la disuguaglianza

$$(23) \qquad |U_1'| > |\varrho_s| \frac{d}{h_p} \tilde{\omega} \log \frac{l^2}{\delta^2}\,.$$

Immaginiamo ora che $\tilde{\omega}$ converga a zero *uniformemente*, cioè in modo che resti compreso entro limiti finiti il rapporto $\tilde{\omega}/\delta^2$ (come avviene in particolare quando il campo si restringe conservandosi simile alla sua configurazione iniziale). Sotto tale ipotesi si può dedurre dalla (23)

$$(23') \qquad |U_1'| > M_1 |\varrho_s| \delta^2 \log \frac{l^2}{\delta^2}\,,$$

essendo M_1 una quantità positiva (indipendente dalle dimensioni del campo $\tilde{\omega}$).

Allora, supposto che non si annulli ϱ_s, il rapporto

$$\frac{|U_1''|}{|U_1'|} < \frac{M}{M_1 |\varrho_s| \log(l^2/\delta^2)}\,,$$

converge a zero con δ; converge quindi a 1 il rapporto

$$\left|\frac{U_1' + U_1''}{U_1'}\right| = \frac{|U_1|}{|U_1'|}\,.$$

Scende di qua, in virtù della (23'), che, scelto a piacimento un $m < M_1$, sussiste la disuguaglianza

$$(24) \qquad |U_1| > m |\varrho_s| \delta^2 \log \frac{l^2}{\delta^2}\,,$$

per ogni δ abbastanza piccolo.

La (24) ci mostra che U_1 è di un ordine di grandezza superiore a quello d'ogni quantità Ω, che soddisfaccia ad una limitazione del tipo (10).

Segue infatti, da

$$|\Omega| < M\delta^2$$

e dalla (24),

$$\frac{|\Omega|}{|U_1|} < \frac{M}{m|\varrho_s|} \frac{1}{\log(l^2/\delta^2)}\,,$$

[6] Questo limite inferiore è certo diverso da zero [cfr. n. 2, *b*)].

donde apparisce che (ove si supponga diverso da zero il limite inferiore di $|\varrho_s|$) il rappporto $|\Omega/U_1|$ tende a divenire infinitamente piccolo assieme a δ, cioè quanto più va assottigliandosi il tubo T.

7. - Riferimento a speciali coordinate. Componenti trasversali dell'attrazione.

Per rendere più spedito il calcolo delle derivate del potenziale U, è conveniente particolarizzare come segue il significato dei parametri u, v, w:

Designando con s l'arco della direttrice C (contato a partire da un'origine arbitraria), assumeremo come superficie $w =$ cost. i varî piani normali a C, il valore di w per un piano determinato essendo la s del punto P, in cui esso piano incontra la curva.

Fissato poi uno (a priori qualunque) di questi piani normali, assumeremo come parametri u, v le relative coordinate cartesiane riferite alla coppia normale principale e binormale.

Il piano rappresentativo Π, l'intorno $\tilde{\omega}$, i piedi delle L, ecc., vengono così ad assumere un significato concreto nel detto piano normale.

Supponiamo, per fissar le idee, che esso corrisponda al valore zero di w, e rileviamo alcune conseguenze delle (1), dovute alla speciale scelta dei parametri.

Introduciamo all'uopo, accanto agli assi di riferimento x, y, z, una terna cartesiana ausiliaria ξ, η, ζ (congruente alla prima), costituita dalla tangente (nel senso in cui si contano gli archi), normale principale (nel senso della concavità) e binormale (in tal senso da rendere le due terne congruenti) alla curva C nel punto P del detto piano normale $w = 0$.

Per un punto qualunque di questo piano, si ha, in base alla definizione di u, v, e della terna ausiliaria,

$$\xi = 0\,, \qquad \eta = u\,, \qquad \zeta = v\,.$$

D'altra parte, fra i due sistemi di assi x, y, z e ξ, η, ζ, intercedono le formule di trasformazione

$$\begin{cases} x = x_P + \alpha\xi + \alpha_1\eta + \alpha_2\zeta\,, \\ y = y_P + \beta\xi + \beta_1\eta + \beta_2\zeta\,, \\ z = z_P + \gamma\xi + \gamma_1\eta + \gamma_2\zeta\,, \end{cases}$$

in cui x_P, y_P, z_P rappresentano le coordinate di P; $\alpha = dx/dw$, $\beta = dy/dw$,

$\gamma = dz/dw$ i coseni direttori della tangente a C in P (rispetto alla terna generica x, y, z); α_1, β_1, γ_1 e α_2, β_2, γ_2 gli analoghi coseni direttori della normale principale e della binormale.

Nelle formule di trasformazione, per i punti del piano $w = 0$, va posto $\xi = 0$, $\eta = u$, $\zeta = v$; risulta quindi

$$(25) \qquad \begin{cases} x = x_P + \alpha_1 u + \beta_2 v\,, \\ y = y_P + \beta_1 u + \beta_2 v\,, \\ z = z_P + \gamma_1 u + \gamma_2 v\,. \end{cases}$$

Queste espressioni devono naturalmente coincidere con quelle che si traggono dalle formule generali (1), quando (dopo aver scelto i parametri nel modo indicato) vi si faccia $w = 0$. Possiamo pertanto ravvisare nelle (25) la speciale forma che compete nel caso nostro alle (1), per il valore $w = 0$.

Ciò posto, torniamo al nostro potenziale U. Essendo Q il generico punto potenziato, consideriamo il piano normale a C, che lo contiene, e scegliamolo (per semplificare le formule) come sostegno dei parametri u, v, contando l'arco s di C, e quindi w, a partire da esso.

Le derivate di U, rapporto alle coordinate u, v di Q, porgono (coi loro valori relativi al punto Q, e quindi in particolare a $w = 0$) le componenti A_n e A_b dell'attrazione (subìta da Q) secondo le due direzioni della normale principale e della binormale alla direttrice (nella sua intersezione col piano normale passante per Q): com'è naturale, chiameremo complessivamente dU/du, dU/dv le *componenti trasversali* dell'attrazione.

Riportiamoci alle notazioni dei nn. precedenti, osservando in primo luogo che σ e τ sono ora la stessa cosa, e che il segmento

$$\overline{OQ} = \varepsilon = \Delta\,,$$

appartenendo al piano τ, riesce perpendicolare alla tangente a C in P, sicchè $t_P = 0$; inoltre, ove si ritenga $w = 0$, si ha, per la definizione dei parametri u e v,

$$\Delta^2 = (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2\,,$$

$$n_P = u - u_0\,.$$

Nel punto P si ha in particolare

$$\frac{dx}{dw} = \alpha\,, \qquad \frac{dy}{dw} = \beta\,, \qquad \frac{dz}{dw} = \gamma\,,$$

sicchè

$$h_P = \left| \sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2} \right| = 1;$$

le (25) porgono poi (per qualunque u, v)

$$\frac{dx}{du} = \alpha_1, \qquad \frac{dy}{du} = \beta_1, \qquad \frac{dz}{du} = \gamma_1,$$

$$\frac{dx}{dv} = \alpha_2, \qquad \frac{dy}{dv} = \beta_2, \qquad \frac{dz}{dv} = \gamma_2.$$

Se ne trae

$$D_{OP} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 1.$$

Con ciò, la seconda delle (18), diviene, per $w = 0$,

$$V_2 = \varrho_S c_P (u - u_0) \log \frac{l}{\Delta},$$

e si ha per conseguenza dalla seconda delle (19) (tenendo conto che si può identificare τ con $\tilde{\omega}$, $d\tau_0$ con $du_0\, dv_0$)

$$U_2 = \varrho_S c_P \int_\tau (u - u_0) \log \frac{l}{\Delta} \cdot d\tau_0. \tag{26}$$

Quando si deriva U_2 rispetto ad u (dacchè ϱ_S e c_P ne sono indipendenti), nascono due termini: il primo, proveniente dalla derivazione del fattore $u - u_0$, non è altro che

$$\frac{1}{2} c_P U_1,$$

come apparisce dalla (20); l'altro è

$$-\varrho_S c_P \int_\tau \frac{(u - u_0)^2}{\Delta^2} d\tau_0.$$

A noi basta rilevare che la funzione sotto il segno si conserva ovunque finita, sicchè l'integrale riesce di second'ordine (almeno) rispetto a δ, esiste cioè una costante M (indipendente da δ), tale che il valore assoluto dell'integrale non supera $M\delta^2$.

Lo stesso può dirsi per dU_2/dv, nonchè per una derivata qualsiasi di U_3 e di U_4.

Quest'ultima affermazione si giustifica subito, badando alle espressioni (18) delle rispettive funzioni sotto il segno:

$$V_3 = g(O, O) - g(P, S)\,,$$
$$V_4 = W\,;$$

di queste, la prima possiede [n. 2, lemma g)] derivate semi-finite, mentre la seconda si mantiene senz'altro finita (e integrabile) assieme alle sue derivate.

Da tutto ciò si raccoglie che

$$(27)\qquad \begin{cases} A_n = \dfrac{dU}{du} = \sum_1^4{}_i \dfrac{dU_i}{du} = \dfrac{dU_1}{du} + \dfrac{1}{2} c_p U_1 + \dots\,, \\ A_b = \dfrac{dU}{dv} = \sum_1^4{}_i \dfrac{dU_i}{dv} = \dfrac{dU_1}{dv} + \dots\,, \end{cases}$$

gli addendi omessi essendo entrambi di secondo ordine almeno rispetto a δ.

8. - Componente longitudinale.

Per quanto abbiamo osservato nel n. precedente, dU_3/dw, dU_4/dw riescono senz'altro di second'ordine in δ; va notato che anche dU_2/dw gode della stessa proprietà: resta infatti finita la funzione sotto il segno dV_2/dw, come si riconosce badando alla sua espressione (18) e usufruendo delle considerazioni sub d) (n. 2).

Si ha quindi

$$(28)\qquad \frac{dU}{dw} = \frac{dU_1}{dw} + \dots\,,$$

la parte omessa essendo di second'ordine, almeno, rispetto a δ.

Se si osserva che l'elemento di linea L (u = cost., v = cost.), passante per il punto potenziato Q, è dato da $h_Q dw$, si vede che

$$\frac{1}{h_Q}\frac{dU}{dw}\,,$$

misura la componente dell'attrazione nel senso della tangente alla linea L passante per Q.

Possiamo facilmente desumere la componente longitudinale A_t, cioè secondo la tangente alla direttrice C in P.

All'uopo, si nota anzi tutto che i coseni direttori α_Q, β_Q, γ_Q della linea L nel punto Q, possono porsi sotto la forma

$$\alpha + \overline{PQ}\alpha^* , \quad \beta + \overline{PQ}\beta^* , \quad \gamma + \overline{PQ}\gamma^* ,$$

α, β, γ riferendosi al punto P (e quindi alla direttrice C) e α^*, β^*, γ^* designando funzioni finite.

Del pari è a ritenersi

$$\frac{1}{h_Q} = \frac{1}{h_P} + \overline{PQ}h^* ,$$

con h^* finita, ossia, per essere $h_P = 1$,

$$\frac{1}{h_Q} = 1 + \overline{PQ}h^* .$$

Ciò posto, badiamo all'identità

$$\frac{1}{h_Q}\frac{dU}{dw} = \alpha_Q A_t + \beta_Q A_n + \gamma_Q A_b ,$$

e facciamo per un momento coincidere gli assi generici x, y, z colla terna principale ξ, η, ζ di C in P, con che $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Potremo scrivere

$$A_t = \frac{dU}{dw} + \overline{PQ}\left\{h^*\frac{dU}{dw} - (\alpha^* A_t + \beta^* A_n + \gamma^* A_b)\right\} .$$

Dacchè

$$U = \int_{\tilde{\omega}} du_0\, dv_0 V ,$$

e le derivate di V divengono infinite di prim'ordine al più (nel punto Q), si potrà assegnare [cfr. n. 2, c)] una costante M (indipendente da δ) tale che nessuna derivata di U superi $M\delta$.

Ad analoga limitazione soddisfano allora le componenti dell'attrazione, e per conseguenza il coefficiente di $\overline{PQ}$. Ma quest'ultimo non supera δ, sicchè si ha col consueto comportamento della parte omessa

$$A_t = \frac{dU}{dw} + \dots ,$$

donde, ricordando la (28),

$$A_t = \frac{dU_1}{dw} + \dots . \tag{28'}$$

Data la convenzione fatta al n. precedente, la w del punto potenziato Q è nulla; a derivazione eseguita, andrà quindi posto $w = 0$.

9. - Risultante delle attrazioni subíte da una fetta infinitesima di tubo.

Consideriamo, accanto alla sezione generica τ di T, una sezione parallela τ', distante ds.

Essendo $du\,dv = d\tau$ l'elemento di sezione circostante al punto potenziato Q, $\varrho_Q du\,dv\,ds$ rappresenterà la massa della *fetta* infinitesima di tubo, compresa fra τ e τ'.

L'attrazione complessiva $\boldsymbol{F}ds$, subìta dalla fetta, ove si ometta il ds (ove cioè la si riporti all'unità di lunghezza) avrà per componenti

$$\left\{\begin{aligned} F_t &= \int_\tau \varrho_Q A_t\, du\, dv\,, \\ F_n &= \int_\tau \varrho_Q A_n\, du\, dv\,, \\ F_b &= \int_\tau \varrho_Q A_b\, du\, dv\,, \end{aligned}\right.$$

secondo la tangente, normale principale e binormale alla direttrice C in P.

Ricorriamo all'identità

$$\varrho_Q A_t = \varrho_S A_t + (\varrho_Q - \varrho_S) A_t$$

e alle due analoghe concernenti A_n e A_b, osservando che il secondo addendo, in causa del fattore $\varrho_Q - \varrho_S$, è di second'ordine almeno rispetto a δ.

Il corrispondente integrale, esteso a τ, risulta pertanto di quart'ordine (almeno), si mantiene cioè, all'assottigliarsi del tubo, costantemente inferiore in valore assoluto a $M\delta^4$ (con M costante positiva, indipendente da δ). Badando alle (27) e (28'), potremo dedurne

$$\begin{cases} F_t = \varrho_s \displaystyle\int_\tau \frac{dU_1}{dw}\, du\, dv + \dots\,, \\ F_n + \varrho_s \displaystyle\int_\tau \frac{dU_1}{du}\, du\, dv + \frac{1}{2}\varrho_s c_P \int_\tau U_1\, du\, dv + \dots\,, \\ F_b = \varrho_s \displaystyle\int_\tau \frac{dU_1}{dv}\, du\, dv + \dots\,, \end{cases}$$

i termini omessi essendo di quart'ordine almeno rispetto a δ.

Per attribuire ai termini scritti una forma più espressiva, conviene porre

$$k = \frac{1}{\tau^2}\int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \log\frac{l}{\Delta}\,, \tag{29}$$

e osservare che, una volta fissato P e con esso la sezione normale τ del tubo, k è una costante numerica ben determinata, mentre, se si risguarda P come un punto scorrente lungo la direttrice C, la stessa k è (al pari di τ) funzione dell'argomento s ($= w$, arco della curva C).

Formiamo $d(\varrho_s^2\tau^2 k)/ds$ e mostriamo che, a meno di termini di quart'ordine in δ, questa derivata coincide con F_t.

Va da sè che, trattandosi di derivare rispetto ad s, o, ciò che è lo stesso, rispetto a w, non è lecito porre preventivamente, nell'espressione (29) di k, $w = 0$ (e identificare senz'altro $\Delta^2 = \overline{OQ}^2$ con $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2$, $d\tau$ con $du\, dv$, ecc.).

Giova invece attribuire a $\varrho_s^2\tau^2 k$ una forma, in cui apparisca esplicita la dipendenza da w, e sia fisso il campo di integrazione.

Ciò si ottiene facilmente, eseguendo a ritroso (così per l'integrazione, relativa al punto O, come per quella relativa a Q) la trasformazione indicata al n. 6.

La corrispondente espressione di

$$\varrho_s^2\tau^2 k = \varrho_s^2 \int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \log\frac{l}{\Delta}\,,$$

può essere scritta

$$\int_{\tilde\omega} \varrho_s \frac{|D_{QP}|}{h_P}\, du\, dv \int_{\tilde\omega} \varrho_s \frac{|D_{OP}|}{h_P} \log\frac{l}{\Delta}\, du_0\, dv_0 :$$

per $w = 0$ — quasi è superfluo il notarlo — i fattori $|D_{QP}|/h_P$, $|D_{OP}|/h_P$ si riducono all'unità.

Il coefficiente di $du\,dv\,du_0\,dv_0$ si presenta quale prodotto dei tre fattori

$$\varphi_1 = \varrho_S \frac{|D_{QP}|}{h_P}, \qquad \varphi_2 = \varrho_S \frac{|D_{OP}|}{h_P}, \qquad \varphi = \log \frac{l}{\Delta}.$$

La derivata del prodotto può scriversi

$$\varphi_1 \frac{d(\varphi_2\varphi)}{dw} + \varphi_2 \frac{d(\varphi_1\varphi)}{dw} + \varphi_1\varphi_2 \frac{d\varphi}{dw},$$

e, siccome

$$\frac{d\varphi}{dw} = \frac{d}{dw} \log \frac{l}{\Delta} = -\frac{d}{dw} \log \frac{\varepsilon}{l}$$

si conserva finita [n. 2, lemma d)], mentre φ_1 e φ_2 si ricavano l'uno dall'altro per scambio materiale dei due punti Q ed O, così risulta

$$\frac{d}{ds}(\varrho_S^2\tau^2 k) = \int_{\tilde{\omega}} \varphi_1\, du\, dv\, \frac{d}{dw} \int_{\tilde{\omega}} 2\varphi_2\varphi\, du_0\, dv_0 + \dots,$$

il termine omesso essendo almeno di quart'ordine in δ.

Riponendo per le φ i loro valori e tornando a mettere in evidenza la sezione τ come campo di integrazione, risulta

$$\frac{d}{ds}(\varrho_S^2\tau^2 k) = \int_{\tau} \varrho_S\, d\tau\, \frac{d}{dw}\, \varrho_S \int_{\tau} \log \frac{l^2}{\Delta^2}\, d\tau_0 + \dots,$$

che, confrontata colla (20), porge appunto l'annunciata relazione

$$F_t = \frac{d}{ds}(\varrho_S^2\tau^2 k).$$

Più semplice riesce la riduzione di F_n e di F_b, potendosi porre nei secondi membri $w = 0$, anche prima di eseguire le derivazioni rapporto ad u e a v.

Per $w = 0$, si ha infatti

$$\Delta^2 = (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2,$$

e le derivate

$$\frac{d}{du}\log\frac{l}{\Delta} = -\frac{u - u_0}{\Delta^2}, \qquad \frac{d}{dv}\log\frac{l}{\Delta} = -\frac{v - v_0}{\Delta},$$

mutano segno, quando si scambiano fra loro i punti O e Q.

Ne viene

$$\int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \frac{d}{du}\log\frac{l}{\Delta} = \int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \frac{d}{dv}\log\frac{l}{\Delta} = 0\,,$$

che, in virtù della (20), equivalgono a

$$\int_\tau du\, dv \frac{dU_1}{du} = \int_\tau du\, dv\, \frac{dU_1}{dv} = 0\,.$$

Con ciò, ove si osservi che, per le (20) e (29),

$$\frac{1}{2}\varrho_S \int_\tau du\, dv\, U_1$$

non è altro che $\varrho_S^2 \tau^2 k$, le espressioni di F_n e di F_b assumono la forma

$$\begin{cases} F_n = \varrho_S^2 \tau^2 k c_P + \ldots\,, \\ F_b = 0 + \ldots\,, \end{cases}$$

i termini omessi essendo di quart'ordine almeno rispetto a δ (massima distanza fra due punti della sezione τ).

10. - Riassunto. Considerazioni qualitative.

Riassumendo, si ha che *le componenti* (unitarie) F_t, F_n, F_b *dell'attrazione complessiva, esercitantesi sulla fetta considerata, hanno per espressioni asintotiche*

$$(30) \qquad F_t^{(a)} = \frac{d}{ds}(\varrho_S^2 \tau^2 k)\,, \qquad F_n^{(a)} = \varrho_S^2 \tau^2 k c_P\,, \qquad F_b^{(a)} = 0\,,$$

essendo k definita dalla (29), c_P la curvatura della direttrice C del tubo nel punto P, e ϱ_S il valore della densità in un punto S, che può essere scelto con criterio arbitrario entro alla sezione τ del tubo, praticata col piano normale a C in P.

La giustificazione della qualifica « espressioni asintotiche » risiede nel fatto che, dei due vettori $\boldsymbol{F}^{(a)}$ di componenti

$$F_t^{(a)}, \quad F_n^{(a)}, \quad F_b^{(a)},$$

e $\boldsymbol{G}$ di componenti

$$F_t - F_t^{(a)}, \quad F_n - F_n^{(a)}, \quad F_b - F_b^{(a)},$$

i quali insieme costituiscono l'attrazione risultante $\boldsymbol{F}$, il secondo è infinitesimo rispetto al primo, è tale cioè che il rapporto delle lunghezze $G/F^{(a)}$ converge a zero assieme a δ.

Per rendercene conto in modo preciso, conviene osservare:

1) I termini omessi nelle espressioni di F_t, F_n, F_b, cioè le differenze $F_t - F_t^{(a)}$, $F_n - F_n^{(a)}$, $F_b - F_b^{(a)}$, sono di quart'ordine rispetto a δ, talchè la stessa proprietà compete alla lunghezza

$$G = \left|\sqrt{(F_t - F_t^{(a)})^2 + (F_n - F_n^{(a)})^2 + (F_b - F_b^{(a)})^2}\right| .$$

Si può quindi ritenere, col solito significato di M,

$$G < M\delta^4 .$$

2) A norma della (20), U_1 conserva sempre il medesimo segno, quello di ϱ_s. Perciò $\varrho_s U_1$ è essenzialmente positivo (in quanto si esclude che ϱ_s si annulli), e, avendosi dalla disuguaglianza (24)

$$|\varrho_s U_1| > m\varrho_s^2 \delta^2 \log \frac{l^2}{\delta^2} ,$$

si può sopprimere nel primo membro il segno di valore assoluto. Così dall'identità

$$\varrho_s^2 \tau^2 k = \frac{1}{2} \varrho_s \int_\tau du\, dv U_1 ,$$

si ricava

$$\varrho_s^2 \tau^2 k > m\varrho_s^2 \delta^2 \log \frac{l}{\delta} \int_\tau du\, dv .$$

Se quindi si suppone che la sezione vada assottigliandosi *uniformemente* (nel senso dichiarato al n. 6), si potrà affermare l'esistenza di una costante positiva m_1 (indipendente da δ), tale che

$$\varrho_s^2 \tau^2 k > m_1 \delta^4 \log \frac{l}{\delta} .$$

Questa disuguaglianza, assieme alla

$$G < M\delta^4 ,$$

mette in evidenza il carattere asintotico di $\boldsymbol{F}^{(a)}$.

Si ha infatti, essendo la lunghezza $F^{(a)}$ del vettore superiore o per lo meno eguale alla sua componente $\varrho_s^2 \tau^2 k c_p$,

$$\frac{G}{F^{(a)}} \leqslant \frac{G}{\varrho_s^2 \tau^2 k c_p} < \frac{M}{m_1 c_p \log (l/\delta)} .$$

Di qua apparisce che, ove si annulli la curvatura c_p, il rapporto delle due lunghezze converge effettivamente a zero con δ, c. d. d.

È appena necessario aggiungere che, attesa l'equipollenza

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{(a)} + \boldsymbol{G} ,$$

dall'esser nullo il limite del rapporto $G/F^{(a)}$, segue che, al convergere di δ verso zero, $\boldsymbol{F}^{(a)}$ tende ad identificarsi con $\boldsymbol{F}$: le direzioni tendono cioè a coincidere, e il rapporto delle lunghezze tende all'unità.

Per riconoscere, in un caso concreto, se effettivamente si possa (coll'approssimazione che ci si prefigge di raggiungere) trascurare $\boldsymbol{G}$ di fronte ad $\boldsymbol{F}^{(a)}$, sarebbe necessario rendersi conto del valore numerico di

$$\frac{M}{m_1 c_p \log (l/\delta)} .$$

Siccome M può dipendere da l, converrebbe anzi tutto scegliere l (compatibilmente colla condizione $l > \delta$) in modo da rendere minima la frazione suddetta. Nella maggior parte dei casi basterà tuttavia un apprezzamento grossolano per un determinato valore di l. Questo valore si sceglierà col criterio seguente:

Per l'attrazione di un (sottile) toro omogeneo, avente per direttrice una circonferenza di raggio a, gli sviluppi, forniti dalla teoria degli integrali ellittici, mostrano (7) che il valore più conveniente di l è $8a$.

---

(7) Cfr. per es. F. TISSERAND, *Traité de mécanique céleste*, t. II, pp. 137-154.

Per una direttrice qualunque L, assimilandola, nell'intorno di un punto generico, P, al suo cerchio osculatore, si prenderà $l = 8/c_P$. Ove si voglia una stessa l per tutta la linea L, si potrà prendere otto volte il raggio medio di curvatura.

11. - Forme particolari delle espressioni asintotiche.

Meritano ancora esplicita menzione due aspetti particolari delle formule (30).

Essi si ottengono disponendo in modo opportuno del punto parametrico S.

In primo luogo, si può far coincidere S con P, dando così rilievo al comportamento della densità (cubica) ϱ lungo la direttrice.

Ma più interessante è un secondo criterio, con cui si mette in evidenza la densità lineare del nostro tubo T. Ecco in qual modo.

La massa della fetta, cui si riferisce l'attrazione risultante testè calcolata, vale

$$ds\int_\tau \varrho\, d\tau ,$$

talchè

$$\nu = \int_\tau \varrho\, d\tau , \tag{31}$$

sarà a dirsi la densità lineare del tubo T (in P).

Ora, applicando all'integrale del secondo membro il primo teorema della media, si può scrivere, in sua vece, il prodotto della sezione τ per il valore (medio) assunto da ϱ in un certo punto interno alla sezione.

Noi assumeremo per S un tale punto, e avremo così

$$\nu = \tau \varrho_S . \tag{32}$$

Portando nelle (30) questo speciale valore di ϱ_S si ottengono le formule

$$F_t^{(a)} = \frac{d}{ds}(\nu^2 k), \qquad F_n^{(a)} = \nu^2 k c_P, \qquad F_b^{(a)} = 0 , \tag{33}$$

già riferite nell'introduzione (v. Nota I) come mèta della presente ricerca.