V.

SULLE AZIONI MECCANICHE DOVUTE AD UN FLUSSO FILIFORME DI ELETTRICITÀ

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. $XVIII_1$ (1909_1), pp. 41-50.

Consideriamo un flusso stazionario di elettricità nell'etere (o nell'aria, o più generalmente in un mezzo omogeneo impolarizzabile), e supponiamo che l'ambiente T, in cui si svolge questo flusso, abbia forma di tubo sottile (chiuso, od anche aperto; collegato per es. con una estremità ad un generatore e coll'altra ad un collettore).

Il campo elettromagnetico dovuto ad un tale flusso si valuta notoriamente nello stesso modo, secondo tutte le teorie, pre- o post-maxwelliane. E si è condotti ad esprimere una qualunque componente, sia della forza elettrica che della forza magnetica, mediante derivate di potenziali newtoniani estesi al tubo T.

Se il tubo è abbastanza sottile, e si tratta di punti interni, queste derivate sono sostituibili con valori asintotici [1], tanto più approssimati, quanto più sono piccole le dimensioni trasversali rispetto alla lunghezza. Se ne traggono delle espressioni asintotiche per le forze elettromagnetiche in un generico punto Q, interno a T. Il vantaggio essenziale di queste espressioni è che tutto vi dipende esclusivamente da elementi locali (intendo, relativi all'intorno di Q), cioè: dall'andamento longitudinale del tubo (assimilato ad una linea geometrica) nell'immediata vicinanza di Q, dalla sezione (normale alla detta linea) condotta per Q, e dai caratteri del flusso attraverso alla sezione.

Note le forze elettromagnetiche e il comportamento del moto (densità elettrica e velocità) in Q, la legge di LORENTZ definisce la forza meccanica, che si esercita sopra il circostante elemento. Si può ovvia-

---

(1) Cfr. le due Note *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile*, in questi « Rendiconti », serie 5ª, vol. XVII (2° semestre 1908), pp. 413-426 e 535-551 [in questo vol.: IV, pp. 35-68],

mente dedurne la risultante di tutte le forze, agenti sui varî elementi di una fetta infinitesima di tubo, compresa fra due sezioni vicinissime. Sfruttando sempre (e soltanto) la circostanza che è piccola la sezione del tubo di flusso, si arriva alla espressione asintotica (17) di questa risultante, che è il fine della presente ricerca.

Essa dà luogo ad una nuova teoria dei raggi catodici e delle radiazioni affini, teoria che mi sembra più soddisfacente di quelle elettroniche comunemente accettate, perchè rispetta automaticamente il principio (lorentziano) di relatività, ed è sopra tutto esente da ipotesi cinematiche complementari, non bene giustificate e forse non giustificabili (rigidità di ABRAHAM; contrazione lorentziana; contrazione senza variazione di volume; ecc.).

Avrò l'onore di intrattenerne prossimamente l'Accademia.

1. - Richiamo di espressioni asintotiche.

Sia T un tubo sottile tutto costituito da linee di una data congruenza. Dicasi L una linea generica della congruenza, C quella tra le L, che si assume come *direttrice* del tubo.

Sia ϱ la densità di una distribuzione newtoniana; U il corrispondente potenziale; P un punto qualunque della direttrice C; s l'arco, contato a partire da un'origine arbitraria; t la tangente a C in P, nel senso delle s crescenti; n la normale principale (nel senso della concavità); b la binormale (in tal senso, che il triedro t, n, b risulti *sinistrorso*); c_P la curvatura, sempre nel punto P; τ la sezione del tubo, normale a C, condotta per P; O e Q due punti di τ; $d\tau_0$ e $d\tau$ due elementi di sezione ad essi circostanti; $\Delta = \overline{OQ}$.

Riferiamo i punti di τ a due assi x, y, ordinatamente coincidenti con n e con b.

Dette x, y ed x_0, y_0 le coordinate di Q e di O, si avrà

$$\Delta = \left|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right| .$$

Scelti a piacimento un punto S della sezione, indipendente da O e da Q, e una lunghezza costante l, che sia comparabile con quella del tubo [2] (e quindi grande rispetto alle dimensioni trasversali, cioè in

---

[2] Il valore più conveniente di l è otto volte il raggio per una direttrice circolare, o assimilabile ad un arco di cerchio nel tratto che si considera. Cfr. loc. cit., p. 550 [cioè, in questo vol., pp. 67-68].

particolare rispetto ad ogni Δ), si ponga

$$\psi = \int_\tau \log \frac{l}{\Delta} \, d\tau_0 ,$$

$$U_1 = 2\varrho_S \psi , \tag{2}$$

dove ϱ_S designa il valore della densità ϱ nel punto S.

La U_1, così definita, è manifestamente funzione delle coordinate x, y del punto Q, che compariscono in ψ pel tramite di Δ. Essa dipende inoltre, come è ben manifesto, dalla sezione τ, che si considera, e dalla scelta del punto S su questa sezione. Se si conviene che, al variare di P su C, e con esso della sezione normale τ, i corrispondenti punti Q e S scorrano sopra due curve L, la espressione di U_1 rimane univocamente individuata assieme a P, e può quindi anche considerarsi come una ben determinata funzione dell'arco s.

Ciò posto, sieno U_t, U_n, U_b le derivate del potenziale U secondo la tangente t in P, secondo la normale principale (n, o, ciò che è lo stesso, x), e secondo la binormale (b, o, ciò che è lo stesso, y).

Le formule (27) e (28′) della seconda delle citate Note (scambiandovi materialmente u, v, w in x, y, s) forniscono per U_t, U_n, U_b le espressioni asintotiche seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} U_t &= \frac{dU_1}{ds} = 2\,\frac{d(\varrho_S\psi)}{ds} , \\ U_n &= \frac{dU_1}{dx} + \frac{1}{2}\,c_P U_1 = \varrho_S\left(2\,\frac{d\psi}{dx} + c_P\psi\right) , \\ U_b &= \frac{dU_1}{dy} = 2\varrho_S\,\frac{d\psi}{dy} . \end{aligned}\right. \tag{3}$$

L'appellativo *asintotico* va così inteso:

I valori esatti di U_t, U_n, U_b differiscono dai secondi membri delle (3) per termini che sono dell'ordine della sezione del tubo, mentre i secondi membri stessi sono in generale di un ordine superiore. Più precisamente si può asserire che i termini omessi non superano $M\delta^2$, designando δ la massima corda di τ ed M una quantità positiva, che è costante per un dato tubo (cioè per una data congruenza di linee e per una data ϱ) e resta invariata anche se si suppone che il tubo vada indefinitamente assottigliandosi attorno alla direttrice C (loc. cit., pag. 540 [in questo vol., p. 56]). All'incontro (per ogni tubo abbastanza sottile) U_1 supera in valore assoluto $m|\varrho_S|\delta^2 \log(l^2/\delta^2)$, dove m è un coefficiente positivo, che si comporta come M.

2. - Rotor di un potenziale vettore.

Suppongasi che il tubo T sia sede di un campo vettoriale $\boldsymbol{i}$, diretto in ogni punto secondo la tangente alla linea L passante per quel punto (nel senso in cui si contano gli archi s della direttrice).

Indicando con α, β, γ i coseni direttori di tale tangente rispetto al triedro principale $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ di C in P, si ha, dalla definizione di $\boldsymbol{i}$,

$$i_t = i\alpha\,, \qquad i_n = i\beta\,, \qquad i_b = i\gamma\,. \tag{4}$$

Dacchè, in P, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, in un generico punto S della sezione τ, i valori di α, β, γ saranno ancora 1, 0, 0, a meno di termini di prim'ordine in δ.

D'altra parte (sempre in S e collo stesso ordine di approssimazione)

$$\frac{d\alpha}{ds}\,, \qquad \frac{d\beta}{ds}\,, \qquad \frac{d\gamma}{ds}\,,$$

coincidono colle derivate di α, β, γ rapporto all'arco della corrispondente L ([3]), e sono quindi espresse da $c\alpha_1$, $c\beta_1$, $c\gamma_1$, essendo c la curvatura e α_1, β_1, γ_1 i coseni direttori della normale principale alla L nel punto S. Siccome poi in P, $c = c_P$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\gamma_1 = 0$, così in definitiva è lecito ritenere, *a meno di termini di prim'ordine in* δ:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \alpha_S = 1\,, & \beta_S = 0\,, & \gamma_S = 0\,; \\ \left(\dfrac{d\alpha}{ds}\right)_S = 0\,, & \left(\dfrac{d\beta}{ds}\right)_S = c_P\,, & \left(\dfrac{d\gamma}{ds}\right)_S = 0\,. \end{array}\right. \tag{5}$$

Ciò premesso, consideriamo il potenziale vettore $\boldsymbol{j}$, cui dà luogo la distribuzione vettoriale.

Ad ognuna delle componenti j_t, j_n, j_b si può senz'altro applicare quanto è stato detto al n. 1 per un generico potenziale U: basterà soltanto sostituire la densità ϱ con i_t, i_n, i_b ordinatamente. Le espressioni

---

([3]) Cfr. per tutto ciò i dettagliati sviluppi della precedente ricerca (pp. 544-545) [in questo vol., pp. 60-62].

asintotiche delle nove derivate

$$\frac{dj_t}{ds} = j_{t|t}, \quad \frac{dj_t}{dx} = j_{t|n}, \quad \frac{dj_t}{dy} = j_{t|b},$$

$$\frac{dj_n}{ds} = j_{n|t}, \text{ ecc.},$$

saranno perciò fornite dalle (3), ponendovi materialmente, una prima volta

$$U = j_t \text{ e } \varrho_s = (i_t)_s = i_s\alpha_s, \quad \text{poi} \quad U = j_n \text{ e } \varrho_s = (i_n)_s = i_s\beta_s,$$

infine

$$U = j_b \quad \text{e} \quad \varrho_s = (i_b)_s = i_s\gamma_s.$$

Ove si osservi che ψ e le sue derivate (pur non arrivando in generale al second'ordine, come si è ricordato alla fine del n. 1) sono di *prim'ordine* almeno rispetto a δ, potremo, *a meno di termini di second'ordine*, introdurre, per α_s, β_s, γ_s e loro derivate, i valori (5) e ottenere così:

$$(6)\quad \begin{cases} j_{t|t} = 2\dfrac{d(i_s\alpha_s\psi)}{ds} = 2\dfrac{d(i_s\psi)}{ds}, \quad j_{t|n} = i_s\left(2\dfrac{d\psi}{dx} + c_P\psi\right), \\ \qquad\qquad j_{t|b} = 2i_s\dfrac{d\psi}{dy}; \\ j_{n|t} = 2\dfrac{d(i_s\beta_s\psi)}{ds} = 2i_s c_P\psi, \quad i_{n|n} = 0, \quad j_{n|b} = 0; \\ j_{b|t} = 0, \qquad j_{b|n} = 0, \quad j_{b|b} = 0. \end{cases}$$

In base a queste formule, ove si ponga

$$(7)\qquad \boldsymbol{H} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{j},$$

si hanno, per le componenti di $\boldsymbol{H}$, le espressioni asintotiche

$$(8)\quad \begin{cases} H_t = -(j_{n|b} - j_{b|n}) = 0, \\ H_n = -(j_{b|t} - j_{t|b}) = 2i_s\dfrac{d\psi}{dy}, \\ H_b = -(j_{t|n} - j_{n|t}) = i_s c_P\psi - 2i_s\dfrac{d\psi}{dx}. \end{cases}$$

3. - Flusso stazionario di elettricità nel tubo e corrispondente campo elettromagnetico.

Sia T sede di un flusso di elettricità, avente le L per linee di corrente. Supposto il flusso stazionario, sarà tutto indipendente dal tempo e funzione soltanto del posto.

Ove ϱ e $\boldsymbol{v}$ rappresentino rispettivamente la densità e la velocità dell'elettricità in un punto generico, e A l'inversa della velocità della luce, il vettore

$$\boldsymbol{i} = A\varrho\boldsymbol{v} \tag{9}$$

misurerà la corrente (in unità elettromagnetiche).

Riferendosi per tutto il resto al sistema elettrostatico (costante di Coulomb eguale ad 1), la funzione U, di cui al n. 1, potrà risguardarsi come il potenziale scalare, il vettore $\boldsymbol{j}$, di cui al n. 2, come il potenziale vettore del nostro campo.

La forza elettrica $\boldsymbol{E}$, in un punto generico Q del campo, è il gradiente di U cambiato di segno: essa coincide quindi coll'attrazione newtoniana, dovuta a una massa di densità $-\varrho$.

A norma della legge di Biot e Savart (ove sia *sinistrorso* il triedro di riferimento, come lo è, per definizione, il nostro $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$), la forza magnetiva $\boldsymbol{H}$ è definita dalla (7); alle sue componenti competono pertanto le espressioni asintotiche (8).

La forza meccanica in Q (riferita all'unità di volume) consta, secondo Lorentz (nel caso presente, anche secondo le altre teorie), dei due contributi

$$\varrho\boldsymbol{E}$$

e

$$\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{i} \quad (4),$$

in cui la ϱ e i tre vettori $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{i}$ si riferiscono al punto Q.

Consideriamo la fetta di tubo compresa fra la sezione generica τ e una sezione vicinissima distante ds.

L'elemento di volume circostante a Q è espresso da $d\tau\cdot ds$. Ove si

(4) Conformemente alle proposte dei signori Marcolongo e Burali-Forti, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XXIV, 1907, uso il segno $\wedge$ per indicare un prodotto vettoriale.

ponga

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \int_\tau \varrho \boldsymbol{E}\, d\tau\,, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2 = \int_\tau (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{i})\, d\tau\,, \tag{11}$$

$(\boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2)\, ds$ rappresenta evidentemente la risultante delle forze meccaniche, che si esercitano sulla accennata fetta. Perciò

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2$$

è la forza complessiva, riferita all'unità di lunghezza del tubo.

4. - Espressione asintotica di $\boldsymbol{\Phi}_1$.

Come abbiamo rilevato or ora, la forza elettrica $\boldsymbol{E}$ (in un punto generico Q) coincide coll'attrazione newtoniana (del tubo T, in Q), dovuta ad una distribuzione di densità $-\varrho$.

$-\boldsymbol{E}$ è così l'attrazione, corrispondente alla densità ϱ, e $-\boldsymbol{\Phi}_1 \cdot ds$ rappresenta di conseguenza la risultante delle attrazioni, subìte dalla fetta elementare considerata.

Dato questo significato, diviene superfluo il calcolo diretto di $\boldsymbol{\Phi}_1$. Basta riportarsi alla seconda delle Note, già più volte ricordate [formule (33)].

Pongasi in conformità

$$\nu = \int_\tau \varrho\, d\tau\,, \tag{12}$$

con che ν rappresenta la densità elettrica *lineare* (rapporto fra la carica della fetta e il suo spessore ds) in una posizione generica del tubo, individuata dalla sezione τ, o, se si vuole, dal punto P della direttrice.

Pongasi ancora

$$k = \frac{1}{\tau^2}\int_\tau \psi\, d\tau = \frac{1}{\tau^2}\int_\tau d\tau \int_{\tau_0} d\tau_0 \log \frac{l}{\Delta}\,, \tag{13}$$

con che k è un puro numero, dipendente esclusivamente dalla configurazione geometrica della sezione τ (le^{-k} rappresenta la media geometrica delle mutue distanze ; cfr. MAXWELL, *Collected papers*, vol. II, pag. 280).

Tanto ν, quanto k, hanno, come si vede, valori ben determinati, una volta fissata la sezione, ossia il punto P; possono quindi considerarsi funzioni dell'arco s della direttrice C.

Per mezzo di queste quantità, le tre componenti di $\mathbf{\Phi}_1$ si esprimono, *a meno di termini dell'ordine di* δ^4, sotto la forma seguente:

$$(14) \qquad \Phi_{1|t} = -\frac{d}{ds}(\nu^2 k), \qquad \Phi_{1|n} = -\nu^2 kc, \qquad \Phi_{1|b} = 0,$$

dove, per brevità, ho scritto c in luogo di c_P.

5. - Espressione asintotica di $\mathbf{\Phi}_2$ e della forza risultante $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2$.

Nel secondo membro della (11), il vettore $\boldsymbol{i}$ si riferisce, al pari di $\boldsymbol{H}$, al punto (variabile) Q, rispetto al quale si integra. Si può però, a meno di termini dell'ordine di δ^4, sostituire $\boldsymbol{i}$ col vettore $\boldsymbol{i}_S$, relativo al punto fisso S.

Infatti la differenza $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}_S$ è di prim'ordine rispetto a δ; d'altra parte $\boldsymbol{H}$ (che ha per componenti delle differenze di derivate di potenziali newtoniani) si comporta come l'attrazione, ed è quindi anch'essa di prim'ordine almeno.

Ne viene che il prodotto vettoriale

$$\boldsymbol{H} \wedge (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}_S)$$

è almeno di second'ordine, e il relativo integrale

$$\int_\tau \{\boldsymbol{H} \wedge (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}_S)\}\, d\tau,$$

di quarto.

Si ha dunque, a meno di termini dell'ordine di δ^4,

$$(11') \qquad \mathbf{\Phi}_2 = \int_\tau (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{i}_S)\, d\tau.$$

Colla stessa approssimazione, si possono adottare, per i coseni direttori α_S, β_S, γ_S di $\boldsymbol{i}_S$, i valori (5), e quindi, per le componenti, i valori

$$i_S, \quad 0, \quad 0.$$

Badando alle (8) ed esplicitando in conformità il prodotto vettoriale $\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{i}_s$, la (11') dà:

$$\begin{cases} \Phi_{2|t} = 0\,, \\ \Phi_{2|n} = i_S^2 c_P \int_\tau \psi\, d\tau - 2i_S^2 \int_\tau \frac{d\psi}{dx}\, d\tau\,, \\ \Phi_{2|b} = -\,2i_S^2 \int_\tau \frac{d\psi}{dy}\, d\tau\,. \end{cases}$$

Dacchè, in base alla (1),

$$\frac{d\psi}{dx} = -\int_\tau \frac{x-x_0}{\Delta^2}\, d\tau_0\,, \qquad \frac{d\psi}{dy} = -\int_\tau \frac{y-y_0}{\Delta^2}\, d\tau_0\,.$$

è chiaro che i due integrali quadrupli

$$\int_\tau \frac{d\psi}{dx}\, d\tau\,, \quad \int_\tau \frac{d\psi}{dy}\, d\tau\,,$$

si annullano. Immaginiamo infatti di scambiarvi i due punti di integrazione O e Q. Da un lato, questo scambio materiale di notazione non altera i valori degli integrali; d'altra parte , il suo effetto formale è di mutare $x-x_0$, $y-y_0$ in x_0-x, y_0-y, cioè il segno, tutto il resto rimanendo invariato. Il valore numerico dei due integrali non può dunque essere lo zero, c. d. d.

Rimane con ciò, ove al terzo integrale $\int_\tau \psi\, d\tau$ si sostituisca il suo valore (13),

$$\Phi_{2|t} = 0\,, \qquad \Phi_{2|n} = i_S^2 \tau^2 k c_P\,, \qquad \Phi_{2|b} = 0\,.$$

S designa un punto, che può essere scelto arbitrariamente entro la sezione τ. Gioverà trar partito da questa arbitrarietà per attribuire a $\Phi_{2|n}$ una forma più espressiva.

Introduciamo all'uopo la *corrente totale* I che passa attraverso τ.

Questa I, data la stazionarietà, deve essere una costante caratteristica del flusso che si considera, indipendente quindi anche dalla posizione della sezione del tubo. Comunque, essa ha ovviamente per espressione

$$I = \int_\tau i\alpha\, d\tau\,.$$

Dacchè α differisce dall'unità per termini di prim'ordine in δ, si avrà, a meno di termini di quest'ordine,

$$I = \int_\tau i \, d\tau \, ,$$

e quindi, per il teorema della media, eguale a $i_S \tau$, indicando S un conveniente punto di τ.

Si può dunque scrivere, colla solita approssimazione, cioè a meno di termini di quart'ordine in δ,

$$\Phi_{2|t} = 0 \, , \qquad \Phi_{2|n} = I^2 k c \, , \qquad \Phi_{2|b} = 0 \, , \tag{15}$$

dove [come già nelle (14)] ho soppresso l'indice P della curvatura c, perchè, al pari di k e di ν, anche I è un elemento globale, e non c'è da mettere in evidenza alcun altro punto della sezione, oltre a P.

Nelle (14) figura la densità lineare ν. Può essere conveniente farvi apparire, in luogo di ν, un elemento puramente cinematico. Ecco in qual modo.

Ricorriamo alla (9) e osserviamo che, essendo

$$I = \int_\tau i \alpha \, d\tau = A \int_\tau \varrho v \alpha \, d\tau \, ,$$

si può, a meno di termini in δ, sostituire a ϱ il suo valore medio ν/τ, il che dà

$$I = \nu \cdot A \frac{1}{\tau} \int_\tau v \alpha \, d\tau \, .$$

Ora $(1/\tau) \int_\tau v \alpha \, d\tau$ è il valore medio della velocità del flusso attraverso la sezione τ.

Si ha dunque, a meno di termini in δ,

$$I = \nu \beta \, , \tag{16}$$

designandosi ora ([5]) *con β il rapporto $A(1/\tau) \int_\tau v \alpha \, d\tau$ fra la velocità media del flusso, attraverso τ, e la velocità della luce.*

([5]) Al n. 2 era stato indicato con β un coseno direttore. Questo coseno non figura nelle formule finali. Si può pertanto, senza pericolo di ambiguità, riprendere la lettera β, attribuendole un diverso significato.

Ne viene che, colla solita approssimazione, cioè a meno di termini dell'ordine di δ^4, si può, nelle (14), sostituire alla densità ν il rapporto I/β.

Con ciò la forza meccanica risultante

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2$$

rimane asintoticamente definita sotto la forma seguente:

$$(17) \qquad \Phi_t = -I^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{k}{\beta^2}\right), \qquad \Phi_n = -I^2 \frac{k}{\beta^2} c(1-\beta^2), \qquad \Phi_b = 0 \,.$$

Rammento, per comodo di consultazione, che t, n, b, c, s, τ hanno il significato dichiarato al n. 1 (essendosi soltanto soppresso l'indice P di c); k è definito dalla (13); I misura la corrente totale (in unità elettromagnetiche); infine β rappresenta il rapporto fra la velocità media del flusso attraverso τ e la velocità della luce.

Riservo ad una prossima Nota l'applicazione di queste formule al caso, in cui il tubo T è sede di un campo elettromagnetico puro.