VIII.

SULLA FORMA DELL'ANELLO DI SATURNO

« Atti Ist. Ven. », t. LXVIII,

pp. 557-583.

Per caratterizzare la forma geometrica di un anello A (tubo chiuso, sottile) vien fatto naturalmente di fissare:

1) la *direttrice* C, cioè una linea chiusa mediana, che segue l'andamento generale dell'anello;

2) le singole sezioni τ di A, praticate con piani normali alla direttrice C.

Se, come avviene per lo più, lo spessore dell'anello è uniforme, la C si può scegliere in modo che le τ riescano tutte eguali e intersechino la C stessa in punti omologhi.

Comunque, si può dire che il comportamento longitudinale dell'anello dipende esclusivamente dalla direttrice C, mentre quello trasversale dipende ad un tempo dalla C e dalle τ.

Nel caso dell'anello di Saturno, la forma e la costituzione materiale sono intimamente collegate colle forze d'attrazione, cui sottostanno i singoli elementi.

L'indagine di queste relazioni (teoria meccanica dell'anello di Saturno) fu oggetto di cospicue ricerche da LAPLACE in poi. Esse si sono esplicate in due principali indirizzi: *questioni di stabilità e di struttura* (anello solido, anello corpuscolare di MAXWELL, anello fluido); *comportamento trasversale dell'anello* supposto fluido (KOWALEVSKY, POINCARÉ).

Il comportamento longitudinale è rimasto finora fuori di discussione, figurando sempre tra le premesse l'ipotesi (ovviamente suggerita dalla diretta osservazione dell'anello, anzi dei molteplici anelli parziali, di che in realtà consta l'anello di Saturno) che si possa assumere come direttrice una circonferenza col centro nel centro di Saturno.

Per quanto sia ragionevole una tale premessa, non è fuor di luogo esaminare se essa sia suscettibile di generalizzazione. Quali sono cioè le curve C che potrebbero (al pari delle circonferenze suaccennate) fungere da direttrici di un anello, posto, quanto a sollecitazione dinamica, nelle condizioni dell'anello, o meglio di uno degli anelli, di Saturno.

È questo il compito della presente nota.

Colla sola limitazione che si tratti di un anello molto sottile (sia esso solido, liquido o disgregato, purchè sensibilmente assimilabile ad un corpo continuo), si riconosce che la forma della direttrice è definita da un sistema di equazioni analoghe a quelle dell'equilibrio di un filo flessibile ed inestendibile.

Una categoria di ∞^1 soluzioni si rende tosto manifesta: sono le soluzioni, che corrispondono all'ordinaria ipotesi di una direttrice circolare. Ma ve ne sono infinite altre a priori possibili, tra cui sono in particolare comprese ∞^3 (prescindendo da una inessenziale rotazione, ∞^2) curve piane. La determinazione di queste ultime è immediatamente ricondotta ad una quadratura iperellittica.

Le configurazioni vicine alle circolari (e queste soltanto) meritano interesse dal punto di vista astronomico, dato l'aspetto effettivamente presentato dall'anello di Saturno. Ne ho perciò assegnata l'equazione polare in termini finiti, trattando come una quantità di prim'ordine la variazione del raggio vettore. All'uopo non si richiede alcuna integrazione, giacchè opportune trasformazioni facilmente riportano a classici risultati concernenti le forze centrali.

Resterebbero da discutere le questioni di stabilità. Conto di occuparmene in altra occasione. Osservo per altro che già dalla considerazione statica delle soluzioni prossime a cerchi, scaturisce una disuguaglianza assai semplice (cfr. n. 10, enunciato finale), la quale può in certo senso interpretarsi come condizione di stabilità. Nel caso della natura (stimando le velocità dei due lembi dell'anello in base alle osservazioni spettroscopiche) sembra che detta condizione *non* si trovi verificata (1).

Abbiamo così una presunzione di più in favore dell'ipotesi che l'anello non sia continuo, nè assimilabile ad un continuo, ma risulti da uno sciame di meteoriti abbastanza spaziati, perchè sia quasi superfluo tener conto delle azioni reciproche.

1. - Comportamento meccanico.

L'anello di Saturno, o meglio ciascuno degli anelli parziali di che esso appare costituito, si risguarda concordemente come un sistema materiale A, soggetto:

(1) Debbo l'indicazione dei più recenti dati d'osservazione al prezioso interessamento del prof. LORENZONI, cui esprimo tutta la mia gratitudine.

all'attrazione mutua dei singoli elementi;
all'attrazione di Saturno.

Non si tien conto dell'attrazione degli altri anelli parziali, perchè, dati gli intervalli, che li separano, e l'esiguità delle masse, è da presumere che non si influenzino l'un l'altro in modo sensibile.

Si suppone che A ruoti uniformemente attorno ad un asse Sz passante per il centro di gravità S di Saturno.

Se quindi si associa ad Sz una coppia Sx, Sy invariabilmente collegata all'anello, questo si presenta come un sistema materiale in equilibrio relativo rispetto al triedro $Sxyz$.

Fissiamo la direttrice C dell'anello, e indichiamone con s l'arco, contato a partire da un'origine arbitraria.

Sia ds un elemento generico della direttrice, dA la porzione corrispondente dell'anello, cioè la fetta compresa fra le due sezioni normali alla direttrice negli estremi dell'archetto ds.

Supposto che lo spessore dell'anello sia abbastanza piccolo, ciascuna fetta elementare dA sarà assimilabile ad un punto materiale, e, per esprimere che esso si trova in equilibrio relativo, basterà porre eguale a zero la somma geometrica delle forze effettivamente applicate e della forza centrifuga.

Diciamo $\mathbf{\Phi} ds$ la risultante delle attrazioni newtoniane, che la fetta dA subisce da parte degli altri elementi dell'anello, $\mathbf{F} ds$ la risultante dell'attrazione di Saturno e della forza centrifuga.

La condizione di equilibrio si riassume nella equazione vettoriale

$$\text{(I)} \qquad \mathbf{\Phi} + \mathbf{F} = 0 \,,$$

la quale deve essere soddisfatta per ogni dA, o, ciò che è lo stesso, in ogni punto della direttrice C.

Osservazione. – Scrivendo la (I), si tratta ciascun elemento dA come un punto libero, si prescinde cioè da eventuali forze vincolari, provenienti dalla rigidità, o, più generalmente, da collegamenti delle varie parti costitutive dell'anello.

Se legami vi sono, essi non possono che viemeglio assicurare la sussistenza dell'equilibrio.

Si può così ritenere che, *per un anello di spessore trascurabile, indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulla sua costituzione materiale, l'equilibrio sussiste ogni qual volta sia soddisfatta la* (1).

Essa equivale, come vedremo tra un momento, a tre equazioni differenziali ordinarie nella variabile indipendente s, atte a definire la configurazione delle direttrici meccanicamente possibili.

2. - Espressione della mutua attrazione.

Sia P un punto qualunque della direttrice C di coordinate x, y, z; c la curvatura di C in P; T, N, B il triedro principale, convenendosi che la tangente T sia diretta nel senso delle s crescenti, la normale principale N verso la concavità di C, e la binormale B in modo che il triedro TNB riesca congruente a quello degli assi di riferimento $Sxyz$.

Indichiamo ancora con $\nu\, ds$ la massa di una fetta dA (di spessore elementare ds) contenente il punto P: ν rappresenta così la *densità lineare* dell'anello, ed è, al pari di c, funzione del punto P scorrente su C, o, se si vuole, dell'arco s.

Ciò premesso, teniamo presente l'ipotesi che è piccolo lo spessore dell'anello. Potremo profittarne per adottare come espressione dell'attrazione $\mathbf{\Phi}\, ds$, subita dalla fetta dA, la sola parte asintotica (rispetto a cui la parte residua tende a diventare tanto meno importante, quanto più l'anello è sottile).

Le componenti di $\mathbf{\Phi}$ sono asintoticamente definite da [2]

$$(1)\qquad \begin{cases} \Phi_T = f\,\dfrac{d(k\nu^2)}{ds}\,, \\ \Phi_N = fk\nu^2 c\,, \\ \Phi_B = 0\,, \end{cases}$$

designando f la costante dell'attrazione universale, e k un parametro di configurazione (puro numero), che dipende soltanto dal comportamento trasversale dell'anello, cioè dalla forma della sezione normale τ, condotta per P [3].

---

[2] Cfr. le Note *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile*, « Rendiconti dei Lincei », vol. XVII, (2° semestre 1908), pp. 413-26 e 535-551 [in questo vol.: IV, pp. 35-68].

[3] Indicando con $d\tau$ e $d\tau_0$ due generici elementi della sezione τ, con Δ la loro distanza, con l una lunghezza, che può essere a priori qualunque, purchè di un ordine di grandezza comparabile colla dimensione longitudinale dell'anello, si ha

$$k = \frac{1}{\tau^2}\int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \log\frac{l}{\Delta}\,.$$

Nel caso di una direttrice circolare, il valore più opportuno di l (dal punto di vista della convenienza numerica delle espressioni asintotiche), è otto volte il raggio (medio) di curvatura della C. Cfr. loco citato, p. 550 [in questo vol., p. 67].

La k può in generale variare con s, ma è evidentemente costante, quando lo spessore dell'anello è uniforme. Ci limiteremo a questo caso, e *risguarderemo quindi k come una costante.*

Conviene notare che, a norma delle (1), il vettore $\boldsymbol{\Phi}$ si presenta quale somma di due vettori, aventi rispettivamente per linea d'azione la tangente T e la normale principale N. Perciò, ove si designino con $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{N}_1$ i due vettori unitari secondo queste direzioni, e si ricordi la identità

$$\frac{d\boldsymbol{T}_1}{ds} = c\boldsymbol{N}_1\,,$$

si possono compendiare le (1) nella relazione vettoriale

$$\boldsymbol{\Phi} = f\,\frac{d(k\nu^2)}{ds}\,\boldsymbol{T}_1 + fk\nu^2\,\frac{d\boldsymbol{T}_1}{ds} = f\,\frac{d(k\nu^2\boldsymbol{T}_1)}{ds}\,,$$

od anche, attesa la costanza di k, nella

$$\boldsymbol{\Phi} = fk\,\frac{d(\nu^2\boldsymbol{T}_1)}{ds}\,. \tag{2}$$

Dacchè i coseni direttori di $\boldsymbol{T}_1$ (rispetto agli assi di riferimento $Sxyz$) sono dx/ds, dy/ds, dz/ds, se ne traggono, per le tre componenti cartesiane di $\boldsymbol{\Phi}$, le espressioni

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_x &= fk\,\frac{d}{ds}\left(\nu^2\,\frac{dx}{ds}\right),\\ \Phi_y &= fk\,\frac{d}{ds}\left(\nu^2\,\frac{dy}{ds}\right),\\ \Phi_z &= fk\,\frac{d}{ds}\left(\nu^2\,\frac{dz}{ds}\right). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

3. - Espressioni delle forze esterne.

Se M designa la massa di Saturno, e r la distanza di P dall'origine S, il potenziale dell'attrazione esercitata da Saturno sull'unità di massa, posta nell'interno di P, vale

$$f\,\frac{M}{r}\,.$$

D'altra parte, indicando con ω la velocità angolare costante, con cui ruota il sistema attorno ad Sz, la forza centrifuga (pure riferita all'unità di massa) ha per potenziale

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2).$$

Complessivamente il potenziale unitario delle forze esterne, che sollecitano l'anello, ha per espressione

$$V = f\frac{M}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2). \tag{4}$$

Abbiamo indicato con $\boldsymbol{F}ds$ la risultante delle forze esterne agenti sopra una generica fetta dA. Dacchè la massa di dA è νs, $(1/\nu)\boldsymbol{F}$ si presenta come forza riferita all'unità di massa, e deriva così dal potenziale V soprascritto.

Le componenti di $\boldsymbol{F}$ secondo una direzione generica (sia T, N, B, o x, y, z) vengono pertanto fornite dal prodotto di ν per la derivata di V secondo quella direzione.

4. - Forma esplicita delle equazioni differenziali. Integrali primi.

Dalla (I), proiettando sugli assi x, y, z, si ha, in base alla (3),

$$\left\{\begin{aligned} &fk\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dx}{ds}\right)+\nu\frac{dV}{dx}=0\,,\\ &fk\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dy}{ds}\right)+\nu\frac{dV}{dy}=0\,,\\ &fk\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dz}{ds}\right)+\nu\frac{dV}{dz}=0\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Queste tre equazioni differenziali, relative alle quattro funzioni x, y, z, ν della variabile indipendente s, ove si tenga conto della identità geometrica

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1\,,$$

sono atte a definire la configurazione d'ogni direttrice C meccanicamente possibile, e la distribuzione longitudinale della massa del relativo anello (supposto di spessore uniforme). Naturalmente avranno effettivo interesse meccanico soltanto quelle soluzioni, cui corrispondono *curve chiuse.*

Fatta fin d'ora questa ovvia avvertenza, osserviamo la forma delle (5). Essa mostra (interpretandovi la quantità $fk\nu^2$ come una tensione) che la configurazione di C è quella che competerebbe ad un filo flessibile ed inestendibile, il quale si trovasse in equilibrio sotto l'azione delle stesse forze esterne applicate all'anello.

Dal punto di vista matematico, il problema è simile, ma non identico a quelli che si presentano abitualmente nella statica dei fili. Infatti, in tali problemi, si tratta quasi sempre di forze (conservative o semplicemente posizionali) *indipendenti dalla tensione.*

Nel caso presente si avrebbe invece una forza proporzionale a ν, il che è quanto dire alla radice quadrata della tensione.

Comunque, rimangono perfettamente applicabili alle (5) gli ordinari criteri di integrazione.

Così in primo luogo si riconosce che c'è una combinazione integrabile (analoga all'integrale delle forze vive).

La si ottiene nel modo più semplice, immaginando di proiettare la originaria (I) nella direzione tangenziale s, ciò che dà [per la prima delle (1)]

$$fk\frac{d\nu^2}{ds} + \nu\frac{dV}{ds} = 0 \, .$$

Dividendo per ν — dato il suo significato ν è da ritenersi diversa da zero — e integrando, risulta

$$2fk\nu + V = H \, , \tag{6}$$

dove ho rappresentato con H la costante di integrazione.

La (6) mette in evidenza che, in un sottile anello in equilibrio, la variazione della densità è eguale ed opposta a quella del potenziale: in particolare, per punti situati sopra una medesima superficie equipotenziale, i valori di ν coincidono, ossia la materia costitutiva dell'anello si trova egualmente costipata. Si può inferirne che, se una qualche causa perturbatrice fa cambiare posizione ad un generico elemento dell'anello, alterando il valore di V (e lasciando H invariata), a equilibrio ristabilito, dovrà essersi verificata una azione, in certo modo compensatrice, dovuta a spostamento di masse, per effetto della quale ν assuma il nuovo valore, impostogli dalla (6).

Un altro integrale (analogo a quello del momento delle quantità di moto rispetto all'asse di rotazione) si ricava dalla circostanza che le forze esterne incontrano tutte l'asse delle z, ciò che si traduce nella identità

$$x\frac{dV}{dy}-y\frac{dV}{dx}=0\,.$$

Per essa, le equazioni (5) danno

$$fk\left\{x\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dy}{ds}\right)-y\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dx}{ds}\right)\right\}=\frac{d}{ds}\left\{fk\nu^2\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)\right\}=0\,,$$

donde, chiamando Λ la costante di integrazione,

$$fk\nu^2\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)=\Lambda\,. \tag{7}$$

In generale, non mi sembra che il sistema (5) comporti altri integrali uniformi; è quindi improbabile che si possa conseguirne la soluzione completa in termini finiti.

C'è però un'ovvia relazione invariante, cioè $z=0$, in virtù della quale, data la forma (4) di V, la terza delle equazioni (5) rimane identicamente verificata.

Porre $z=0$ significa manifestamente limitarsi a quelle direttrici C, che appartengono al piano normale all'asse di rotazione passante per il centro di gravità di Saturno.

D'ora in poi ci occuperemo esclusivamente di questo problema piano.

5. - Direttrici piane. Semplificazione formale delle equazioni. Riduzione alle quadrature.

Per $z=0$, si ha $r=|\sqrt{x^2+y^2}|$, e quindi l'espressione (4) di V può essere scritta

$$V=f\frac{M}{r}+\frac{1}{2}\omega^2r^2\,. \tag{4'}$$

Nell'intento di semplificare l'aspetto delle formule, conviene introdurre quel particolare valore a della distanza r, per cui la forza centrifuga fa equilibrio all'attrazione di Saturno: lo stesso a può, se si vuole, interpretarsi come raggio dell'orbita circolare di un satellite (di massa trascurabile di fronte ad M), che avesse ω per moto medio.

La distanza a è manifestamente definita dalla condizione dV/dr (forza radiale) $= 0$, cioè da

$$\omega^2 a = \frac{fM}{a^2}, \tag{8}$$

che esprime appunto l'eguaglianza fra le due intensità della forza centrifuga e dell'attrazione.

Assumiamo a come unità di lunghezza, sostituendo corrispondentemente a x, y, s, r le quantità proporzionali

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad \sigma = \frac{s}{a}, \quad \varrho = \frac{r}{a}. \tag{9}$$

Ponendo

$$v = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}\varrho^2, \tag{10}$$

avremo anzi tutto, in virtù della (8),

$$V = \omega^2 a^2 v. \tag{4''}$$

Posto ancora

$$fkv = \omega^2 a^2 \psi \tag{11}$$

(con che ψ, al pari di ξ, η, σ, ϱ ha dimensioni nulle), ove si moltiplichino le due prime equazioni (5) per $fkv/(\omega^4 a^4)$, e vi si sostituiscano x, y, s, fkv, V coi loro valori (9), (11) e (4''), risulta

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\sigma}\left(\psi^2 \frac{d\xi}{d\sigma}\right) + \psi \frac{dv}{d\xi} = 0, \\ &\frac{d}{d\sigma}\left(\psi^2 \frac{d\eta}{d\sigma}\right) + \psi \frac{dv}{d\eta} = 0, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

la funzione v essendo definita dalla (10) (con $\varrho = |\sqrt{\xi^2 + \eta^2}|$).

È questa la forma ridotta delle equazioni del problema piano [4].

---

[4] Osservo per incidenza che anche il problema spaziale è suscettibile di analoga forma ridotta.

Basta aggiungere alle posizioni fatte $\zeta = z/a$, e ritenere più generalmente

$$\varrho = |\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}|, \qquad v = \frac{1}{\varrho} + \frac{\omega^2}{2}(\zeta^2 + \eta^2).$$

Con ciò le (5) danno luogo ad un sistema, che comprende, oltre alle (12), una terza equazione di identica forma, relativa alla variabile ζ.

Potremo ancora interpretarvi ξ, η come coordinate dei punti delle cercate curve C, ϱ come la distanza da S, $d\sigma$ come l'elemento d'arco, ψ come la densità lineare: basta immaginare scelte in modo opportuno le unità di lunghezza e di massa. A norma delle (9), l'unità di lunghezza da adottarsi è la a, di cui già abbiamo visto il significato.

La (11) mostra poi che il fattore di proporzionalità fra ν e ψ è $\omega^2 a^2/fk$, cioè, per la (8), M/ka. Tale è dunque la nuova unità di densità lineare, il che è quanto dire che ψ è riferita all'unità di massa M/k, nonchè (come ξ, η, σ, ϱ) all'unità di lunghezza a.

Ciò premesso, veniamo all'integrazione delle (12), tenendo conto che i due integrali primi ammessi in generale dalle (5), seguitano naturalmente a sussistere anche nel piano.

Sia per diretta combinazione delle (12), sia per materiale sostituzione dei valori (9) e (11) nei primi membri delle (6) e (7), si trova

$$(13) \qquad \begin{cases} 2\psi + v = h\,, \\ \psi^2\left(\xi\dfrac{d\eta}{d\sigma} - \eta\dfrac{d\xi}{d\sigma}\right) = \lambda\,, \end{cases}$$

le costanti di integrazione h e λ essendo legate alle H e Λ, precedentemente introdotte, dalle relazioni

$$h = \frac{H}{\omega^2 a^2}\,, \qquad \lambda = \frac{fk\Lambda}{\omega^4 a^5}\,.$$

La circostanza che v dipende dalla sola ϱ consiglia a introdurre, in luogo delle coordinate cartesiane ξ, η, le coordinate polari ϱ e ϑ, con che la seconda delle (13) si semplifica, e si ha, numerando separatamente le due equazioni,

$$(14) \qquad 2\psi + v = h\,,$$

$$(15) \qquad \psi^2\varrho^2\frac{d\vartheta}{d\sigma} = \lambda\,.$$

Prescindendo dalle soluzioni radiali $\vartheta =$ cost., che non corrispondono certo a curve chiuse, *si può supporre che la costante λ sia diversa da zero, anzi positiva.*

In primo luogo infatti è da escludere il valore zero, poichè, in tale ipotesi, la (15) porterebbe l'identico annullarsi della densità ψ, ciò che non può evidentemente presentarsi, per un effettivo anello materiale.

Escluso poi il valore zero, è sempre lecito considerare la λ come una quantità positiva, convenendo di cominciar a contare gli archi (sopra una generica curva integrale) nel senso in cui crescono le anomalie.

Riterremo dunque $\lambda > 0$. Con ciò, in particolare, potremo senza riserva dividere i due membri della (15) per $d\vartheta/d\sigma$, ed avremo, elevando anche a quadrato,

$$\psi^4 \varrho^4 = \lambda^2 \frac{d\sigma^2}{d\vartheta^2}.$$

Se si bada alla identità

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2 ,$$

se ne trae

$$\lambda^2 \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 = \psi^4 \varrho^4 - \lambda^2 \varrho^2 ,$$

in cui ψ può ritenersi espresso per la sola ϱ, a norma delle (14) e (10). Si ha così

$$\lambda^2 \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(h - \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{2}\varrho^2\right)^4 \varrho^4 - \lambda^2\varrho^2 = \frac{1}{16}\left(1 - h\varrho + \frac{1}{2}\varrho^3\right)^4 - \lambda^2\varrho^2 ,$$

donde agevolmente apparisce che la quadratura necessaria per esprimere ϑ in termini di ϱ ha carattere iperellittico.

Non cercheremo di fare uno studio qualitativo delle curve, definite da questa equazione, e nemmeno di ricercare in generale le condizioni, cui devono soddisfare le costanti h e λ perchè le corrispondenti curve integrali riescano chiuse.

Limiteremo la ricerca alle soluzioni poco diverse dalle circolari. Prima però si rende opportuna qualche considerazione sulle soluzioni, che corrispondono esattamente a cerchi di centro S.

6. - Soluzioni circolari.
Loro comportamento eccezionale di fronte agli integrali primi.

Le soluzioni circolari sono evidentemente caratterizzate dalla circostanza che ϱ ha un valore costante ϱ_0.

Per riconoscere quali speciali relazioni intercedono fra le costanti di integrazione, e come dipende da ϱ_0 la densità ψ, sembra a prima vista sufficiente di porre $\varrho = \varrho_0$, $d\sigma = \varrho_0 d\sigma$ nei trovati integrali primi, in particolare nelle (14) e (15), ciò che dà:

$$(16) \qquad \begin{cases} 2\psi_0 + v_0 = h \,, \\ \psi_0^2 \varrho_0 \qquad = \lambda \,, \end{cases}$$

designando con v_0 e ψ_0 i valori di v e di ψ per $\varrho = \varrho_0$.

Esaminiamo in modo preciso come stanno le cose.

Le equazioni, che in ultima analisi devono rimanere soddisfatte, sono le due (12), del secondo ordine.

Noi abbiamo senza discussione sostituito alle (12) i loro integrali primi (13), o, ciò che è lo stesso, (14) e (15).

Essi ne sono necessaria conseguenza; quindi ogni soluzione dell'originario sistema (12) deve essere compresa fra quelle del sistema di prim'ordine (13).

Fino a qual punto è vera la reciproca? Si può veramente affermare che una soluzione del sistema di prim'ordine (13) è *eo ipso* integrale delle (12)?

L'indagine è assai semplice. Basta pensare che, assieme alle (13), sono soddisfatte le

$$2\frac{d\psi}{d\sigma} + \frac{dv}{d\sigma} = 0 \,,$$

$$\xi \frac{d}{d\sigma}\left(\psi^2 \frac{d\eta}{d\sigma}\right) - \eta \frac{d}{d\sigma}\left(\psi^2 \frac{d\xi}{d\sigma}\right) = 0 \,,$$

che se ne traggono per derivazione rapporto a σ.

Ora queste sono combinazioni lineari delle (12), e si ottengono moltiplicando le (12) stesse una prima volta per $d\xi/d\sigma$, $d\eta/d\sigma$; una seconda volta per $-\eta$, ξ, e sommando, in entrambi i casi, i risultati.

Le (12) si presentano così come una conseguenza necessaria delle (13), le quante volte (per la soluzione che si considera) sia (generalmente) diverso da zero il determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\xi}{d\sigma} & \dfrac{d\eta}{d\sigma} \\ -\eta & \xi \end{vmatrix} = \xi \frac{d\xi}{d\sigma} + \eta \frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{1}{2} \frac{d\varrho^2}{d\sigma} \,.$$

Un tale determinante si annulla identicamente per le soluzioni circolari, e per queste soltanto.

Ne consegue che il sistema di primo ordine (13) e l'originario sistema di secondo sono in realtà equivalenti (come abbiamo tacitamente ammesso nel n. precedente), a meno che non si tratti di soluzioni circolari.

Per tali soluzioni, è sempre necessario, ma non, senz'altro, sufficiente, il tener conto delle (13), o, se si preferisce, delle (14) e (15).

Esse danno luogo, come s'è visto, alle (16); ma, oltre a queste, possono aversi ulteriori condizioni, imposte dalle (12). Vediamo quali.

In primo luogo, *una* combinazione lineare delle (12) (se non due distinte, come nel caso generale) è già verificata, in quanto necessaria conseguenza degli integrali primi.

Basterà perciò aver riguardo ad una seconda combinazione, che (per $\varrho = \varrho_0$) resti indipendente dalle derivate degli integrali (14) e (15).

La più opportuna di queste combinazioni è quella che si ottiene eliminando, fra le (12), (14) e (15), la ψ e la σ, formando cioè la equazione differenziale di secondo ordine fra ϱ e ϑ, che definisce direttamente le curve integrali.

7. - Analogie dinamiche. Formula di Binet.

La equazione suddetta si può conseguire senza sviluppo materiali, riportandosi a risultati noti.

All'uopo, introduciamo per un momento una variabile ausiliaria t, il cui differenziale sia legato a $d\sigma$ dalla equazione

$$dt = \frac{d\sigma}{\psi^2}, \tag{17}$$

e designamo con apici le derivate rapporto a t.

Le equazioni (12) divengono

$$\begin{cases} \xi'' = -\psi^3 \dfrac{dv}{d\xi}, \\[2ex] \eta'' = -\psi^3 \dfrac{dv}{d\eta}, \end{cases}$$

mentre l'integrale (15) assume l'aspetto

$$\varrho^2 \vartheta' = \lambda, \tag{15-bis}$$

rimanendo inalterato l'altro integrale

$$2\psi + v = h. \tag{14}$$

Ove si ponga ancora

$$w = \frac{1}{2}\psi^4,$$

cioè, per la (14),

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{h-v}{2}\right)^4, \tag{18}$$

si è condotti alle equazioni

$$\xi'' = \frac{dw}{d\xi}, \qquad \eta'' = \frac{dw}{d\eta}, \tag{12 bis}$$

che corrispondono evidentemente al moto di un punto materiale di massa 1, sollecitato da una forza centrale di potenziale w.

Per questo moto sussiste l'integrale (15-*bis*), cioè la legge delle aree, essendo λ la relativa costante.

La equazione differenziale delle traiettorie del moto, corrispondenti a un assegnato valore di λ, è notoriamente fornita dalla formula di BINET

$$\frac{dw}{d\varrho} = -\frac{\lambda^2}{\varrho^2}\left\{\frac{1}{\varrho} + \frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{1}{\varrho}\right\}. \tag{19}$$

Questa formula è il risultato della eliminazione di t fra le (12-*bis*) e la (15-*bis*). Avendo riguardo alle (17), (15-*bis*) e (18), la stessa formula (19) si presenta anche come proveniente dall'eliminazione di σ e di ψ fra le originarie (12), (14) e (15).

Essa implica in particolare, per le soluzioni circolari $\varrho = \varrho_0$, la relazione

$$\left(\frac{dw}{d\varrho}\right)_0 = -\frac{\lambda^2}{\varrho_0^3}, \tag{20}$$

in cui, come già nelle (16), l'indice 0 sta a designare il valore assunto per $\varrho = \varrho_0$.

La relazione trovata è effettivamente distinta dalle (16). Essa può essere scritta, in virtù della (18) e della prima delle (16),

$$-\psi_0^3\left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_0 = -\frac{\lambda^2}{\varrho_0^3},$$

donde, elevando a quadrato, badando alla seconda delle (16) e riducendo,

$$\lambda = \varrho_0^3 \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_0^2 . \tag{20'}$$

Ricordiamo (n. 5) che la costante λ è stata preventivamente supposta diversa da zero (ciò che consente di risguardarla senz'altro positiva).

L'espressione (20'), che le compete nel caso di soluzioni circolari, mostra che tali soluzioni sono ammissibili (in quanto la restrizione concernente λ si trova effettivamente verificata) a patto che il raggio ϱ_0 sia, come è ben naturale > 0, e non tale da annullare $dv/d\varrho = -1/\varrho^2 + \varrho$.

Rimane così escluso il valore $\varrho_0 = 1$, e risulta in definitiva che *sono possibili anelli circolari di raggio arbitrario, purchè soltanto diverso dall'unità. Questo valore eccezionale* (*per cui si annullerebbe λ e con essa la densità ψ*) *corrisponde* (n. 5) *all'orbita di un satellite, il quale ruotasse attorno a Saturno colla stessa velocità angolare degli anelli in questione.*

Portando nella seconda delle (16) il valore (20') di λ ed estraendo la radice quadrata, risulta

$$\psi_0 = \pm\, \varrho_0 \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_0 = \pm \left(\varrho_0^2 - \frac{1}{\varrho_0}\right) . \tag{21}$$

L'ambiguità del segno scompare, pensando che la densità ψ_0 è, per sua natura, quantità positiva. Si deve dunque prendere il segno superiore o l'inferiore, secondoche $\varrho_0 \gtrless 1$, secondochè cioè si tratta di un anello esterno od interno all'orbita lunare suaccennata.

Per essere completi, resta da esplicitare la dipendenza di h dal raggio ϱ_0, ciò che segue immediatamente dalla prima delle (16), in base alle (10) e (21). Si ha

$$h = \begin{cases} v_0 + 2\left(\varrho_0^2 - \dfrac{1}{\varrho_0}\right) = \dfrac{5}{2}\,\varrho_0^2 - \dfrac{1}{\varrho_0} , \\[2ex] v_0 - 2\left(\varrho_0^2 - \dfrac{1}{\varrho_0}\right) = 3\left(\dfrac{1}{\varrho_0} - \dfrac{1}{2}\,\varrho_0^2\right) , \end{cases} \tag{22}$$

valendo l'espressione superiore per gli anelli esterni, e l'inferiore per gli interni.

8. - Le curve integrali e la equazione di Binet. Condizione complementare. Cambiamento di funzione.

Per quanto s'è visto nel n. precedente, ogni curva C definita dalle (12) e corrispondente ai valori h e λ delle costanti di integrazione, verifica la (19).

Sarà bene domandarsi se, reciprocamente, ogni curva $\varrho = \varrho(\vartheta)$, integrale della (19), è senz'altro una C.

Lasciando da parte le soluzioni circolari, già esaurientemente discusse, sappiamo (n. 6) che le equazioni (12) sono necessaria conseguenza dei loro integrali primi (14) e (15).

La curva $\varrho = \varrho(\vartheta)$ sarà pertanto una C allora soltanto che risultino verificate le (14) e (15).

Per discriminarlo, introduciamo l'arco σ della curva in questione a norma della

$$d\sigma^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2 ,$$

ed una funzione ψ a norma della

$$2\psi + v = h , \tag{14}$$

(col valore di h, che già compare nella (19) per tramite di w).

Potremo asserire che si tratta effettivamente di una C se constateremo che anche la

$$\psi^2 \varrho^2 \frac{d\vartheta}{d\sigma} = \lambda , \tag{15}$$

risulta con ciò soddisfatta [la costante λ essendo quella stessa che interviene nella (19)].

Ora, moltiplicando entrambi i membri della (19) per $d\varrho/d\vartheta$, e risguardando tutto come funzione di ϑ pel tramite di ϱ, si ha

$$\frac{dw}{d\vartheta} = \frac{\lambda^2}{2} \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d(1/\varrho)}{d\vartheta} \right)^2 \right\} .$$

Di qua, integrando e dividendo per λ^2, segue ulteriormente

$$\frac{1}{2\varrho^4} \left\{ \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta} \right)^2 \right\} = \frac{1}{\lambda^2}\, w + \text{cost.},$$

od anche, introducendo l'arco $d\sigma$,

$$\frac{1}{2\varrho^4}\left(\frac{d\sigma}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}w + \text{cost.}$$

Questa è una conseguenza necessaria della (19). Si verifica immediatamente che essa (combinata colla posizione (14), con cui si definisce ψ, e colla identità $w = \frac{1}{2}\psi^4$) dà luogo alla (15), allora e allora soltanto che si attribuisca alla costante di integrazione il valore zero.

Siamo così giunti alla conclusione che *le curve C possono ritenersi definite da tutti e soli gli integrali $\varrho = \varrho(\vartheta)$ della equazione di second'ordine* (19), *per cui si annulla la costante dell'integrale primo testè ricavato.*

Introducendo come funzione incognita, in luogo del raggio vettore ϱ, la sua inversa u, e risguardando in conformità w come funzione di u, a norma delle

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{h-v}{2}\right)^4, \tag{18}$$

e

$$v = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}\varrho^2 = u + \frac{1}{2u^2}, \tag{10'}$$

l'equazione (19) e quel suo integrale particolarizzato che occorre prendere in considerazione, divengono rispettivamente:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{1}{\lambda^2}\frac{dw}{du}, \tag{19'}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2\right\} = \frac{1}{\lambda^2}w. \tag{23}$$

9. - Equazioni alle variazioni in prossimità di soluzioni circolari.

Sia $u = u_0$ ($u_0 \lesseqgtr 1$) una soluzione circolare generica: a norma delle (20') e (22) le competono determinati valori di λ e di h.

Rappresentiamo con

$$u = u_0 + u_1(\vartheta)$$

una soluzione delle (19') e (23) corrispondente a valori vicini $\lambda + \delta\lambda$, $h + \delta h$ delle due costanti.

Cerchiamo a quali condizioni deve soddisfare u_1 nell'ipotesi che essa si possa trattare come quantità di prim'ordine, al pari di $\delta\lambda$ e di δh.

Anzi tutto, se nel secondo membro della (19′) si introducono $u_0 + u_1$, $\lambda + \delta\lambda$, $h + \delta h$ in luogo di u, λ ed h, si ha (a meno di termini di secondo ordine)

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dw}{du}\right)_0 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d^2w}{du^2}\right)_0 u_1 + \delta\,\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dw}{du}\right)_0,$$

l'indice 0 significando che si deve porre $u = u_0$, e la variazione δ riferendosi agli incrementi $\delta\lambda$ e δh di λ e di h.

Il primo termine coincide con u_0 per l'ipotesi che $u = u_0$ è soluzione della (19′); il terzo termine è una costante ε (funzione lineare di $\delta\lambda$ e di δh, a coefficienti che, in definitiva, dipendono dalla sola u_0). Del pari costante, e in funzione della sola u_0, è il coefficiente del secondo termine $(1/\lambda^2)(d^2w/du^2)_0$.

Risulta di qua che (coll'approssimazione convenuta) u_0+u_1 sarà integrale dell'equazione (19′), le quante volte u_1 verifichi l'equazione lineare a coefficienti costanti

$$\frac{d^2u_1}{d\vartheta^2} + u_1 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d^2w}{du^2}\right)_0 u_1 + \varepsilon\,. \tag{24}$$

Affinchè però la equazione $u = u_0 + u_1(\vartheta)$ definisca effettivamente una curva integrale si richiede altresì il sussistere della (23). Questa, portandovi per u, λ ed h i loro valori $u_0 + u_1$, $\lambda + \delta\lambda$, $h + \delta h$, e trascurando i termini d'ordine superiore al primo, diviene

$$\frac{1}{2}\,u_0^2 + u_0u_1 = \frac{1}{\lambda^2}\,w_0 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dw}{du}\right)_0 u_1 + \delta\,\frac{1}{\lambda^2}\,w_0\,.$$

I due termini del primo membro si elidono coi primi due del secondo, perchè la (23) e la (19′) sono soddisfatte per $u = u_0$. Rimane pertanto

$$\delta\,\frac{1}{\lambda^2}\,w_0 = 0\,,$$

che costituisce una relazione fra gli incrementi $\delta\lambda$ e δh. Nella (24) gli stessi incrementi compariscono soltanto pel tramite di ε.

Questa circostanza consente di risguardare la ε, *che compare nella equazione* (24), *come una costante arbitraria*, in funzione della quale, e della u_0, gli incrementi $\delta\lambda$ e δh rimangono definiti dalle due equazioni lineari

$$\left\{\begin{aligned} &\delta\,\frac{1}{\lambda^2}\,w_0 = 0\,,\\ &\delta\,\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dw}{du}\right)_0 = \varepsilon\,. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Tutte le condizioni caratteristiche sono in tal modo soddisfatte, e *si è ricondotti alla pura e semplice integrazione della equazione di secondo ordine* (24), *lineare, a coefficienti costanti.*

Tra questi figura $(1/\lambda^2)(d^2w/du^2)_0$, sicchè dobbiamo cominciare col procurarcene l'esplicita espressione in termini di u_0.

Notiamo all'uopo che, dalla (18), derivando logaritmicamente rapporto ad u, si ha

$$\frac{1}{w}\,\frac{dw}{du} = -\,\frac{4}{h-v}\,\frac{dv}{du}\,. \tag{18'}$$

Il primo membro può essere scritto

$$\frac{1}{(1/\lambda^2)w}\cdot\frac{1}{\lambda^2}\,\frac{dw}{du}\,,$$

e, per $u = u_0$ a norma delle (23) e (19′), si riduce a $2/u_0$. Abbiamo così in primo luogo

$$-\left(\frac{2}{h-v}\,\frac{dv}{du}\right)_0 = \frac{1}{u_0}\,, \tag{26}$$

e quindi anche, in virtù della (10′),

$$-\left(\frac{2}{h-v}\right)_0 = \frac{1}{u_0(1-1/u_0^3)}\,. \tag{27}$$

Dalla (18′) si trae per ulteriore derivazione

$$\frac{1}{w}\,\frac{d^2w}{du^2} - \frac{1}{w^2}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 = -\,\frac{4}{(h-v)^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \frac{4}{h-v}\,\frac{d^2v}{du^2}\,,$$

donde, avendo riguardo alla (18′) stessa e alla (10′),

$$\frac{1}{(1/\lambda^2)w}\cdot\frac{1}{\lambda^2}\,\frac{d^2w}{du^2} = \frac{12}{(h-v)^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \frac{4}{h-v}\,\frac{d^2v}{d^2u} = 3\,\frac{4}{(h-v)^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \frac{6}{u^4}\,\frac{2}{h-v}\,.$$

Facciamovi $u = u_0$, teniamo presente che $(1/\lambda^2)w_0$ si riduce a $\frac{1}{2}u_0^2$, in virtù della (23), e profittiamo delle (26) e (27).

Si ricava

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d^2w}{du^2}\right)_0 \frac{1}{\frac{1}{2}u_0^2} = \frac{3}{u_0^2} + \frac{6}{u_0^5(1 - 1/u_0^3)},$$

ossia

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d^2w}{du^2}\right)_0 = \frac{3}{2} - \frac{3}{1 - u_0^3}.$$

Poniamo per brevità

$$\alpha^2 = 1 - \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d^2w}{du^2}\right)_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{1 - u_0^3}, \tag{28}$$

e introduciamo, in luogo della costante ε, una nuova costante (che a priori potrà, a pari titolo, risguardarsi arbitraria) legata ad ε dalla reazione

$$\varepsilon = \alpha^2 \varepsilon_1 . \tag{29}$$

L'equazione (24) può così essere scritta

$$\frac{d^2u_1}{d\vartheta^2} + \alpha^2 u_1 = \alpha^2 \varepsilon_1 ,$$

od anche, chiamando Θ la differenza $u_1 - \varepsilon_1$,

$$\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + \alpha^2\Theta = 0 . \tag{24'}$$

In definitiva, le curve integrali cercate hanno per equazione polare

$$\frac{1}{\varrho} = u = u_0 + u_1 = u_0 + \varepsilon_1 + \Theta ,$$

dove ε_1 è una costante (infinitesima) arbitraria, e Θ l'integrale generale della equazione (canonica) (24').

10. - Anelli a direttrice pressochè circolare. Interpretazione della condizione di esistenza.

La costante α^2, definita dalla (28), può essere a priori positiva o negativa: essa è manifestamente negativa per $u_0 > 1$ (anelli interni), positiva per $u_0 < 1$ (anelli esterni).

Nel primo caso, ogni integrale (non identicamente nullo) della (24') tende, come è ben noto, a crescere indefinitamente assieme a ϑ (in uno dei due versi, almeno).

Questo mostra che *nessuna curva integrale può conservarsi permanentemente* (cioè al variare indefinito dell'anomalia ϑ) *nelle vicinanze di un cerchio interno.*

Ne consegue che *gli anelli circolari interni non comportano* (all'infuori della serie ∞^1 da essi stessi costituita) *alcun'altra configurazione di equilibrio infinitamente vicina.*

Ben diverso è il comportamento degli anelli esterni. Si può in tal caso ritenere $\alpha > 0$, e attribuire all'integrale generale della (24') la forma

$$\Theta = \varepsilon_2 \cos \alpha (\vartheta - \vartheta_0),$$

essendo ε_2 (> 0) e ϑ_0 le due costanti di integrazione.

Le soluzioni prossime ad un generico cerchio

$$u = u_0 = \frac{1}{\varrho_0}, \qquad (\varrho_0 > 1),$$

sono pertanto

$$u = u_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos \alpha (\vartheta - \vartheta_0), \tag{30}$$

od anche, colla stessa approssimazione (ε_1 ed ε_2 dovendo entrambe considerarsi di prim'ordine)

$$\varrho = \varrho_0\{1 - \varrho_0\varepsilon_1 - \varrho_0\varepsilon_2 \cos \alpha (\vartheta - \vartheta_0)\}. \tag{30'}$$

Le curve corrispondenti sono in ogni caso contenute nella corona circolare di raggi $\varrho_0(1 - \varrho_0\varepsilon_1 \pm \varrho_0\varepsilon_2)$. *Condizione necessaria e sufficiente perchè si chiudano e siano algebriche è manifestamente la razionalità del numero*

$$\alpha = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{1 - u_0^3}} = \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{\varrho_0^3 - 1}}.$$

Come si vede, α può assumere tutti i valori $> \sqrt{5/2}$, mentre ϱ_0 percorre il tratto $(1, \infty)$.

È importante osservare che, in prossimità di qualsiasi numero reale > 1, esistono infiniti valori di ϱ_0, per cui α risulta razionale. Ciò autorizza a concludere che, *in vicinanza di qualsiasi anello circolare esterno, sono possibili* ∞^2 *configurazioni di equilibrio a direttrice algebrica* (poco diversa da un cerchio). Nella (30) compariscono veramente tre costanti arbitrarie: ε_1, ε_2 e ϑ_0, ma l'ultima è inessenziale rispetto alla configurazione, in quanto determina una semplice rotazione della curva attorno al polo.

Dalla (30) può ovviamente dedursi che, ogni qualvolta α ha un valore intero, si tratta di una curva di grado 2α.

Siccome α non può scendere al disotto di $\sqrt{5/2}$, rimane escluso il valore 1 (ellisse); tutti gli altri valori interi sono ammissibili (ciascuno, si intende, in un conveniente intorno). Il caso più semplice $\alpha = 2$ proviene da $\varrho_0 = \sqrt[3]{3}$. Ove si ponga per brevità, $1/\lambda^2 + \varepsilon_1 = \mu$, $\vartheta_0 = 0$, si ha la quartica

$$\frac{1}{\varrho} = \mu + \varepsilon_2 \cos 2\vartheta ,$$

che ammette i due assi coordinati per assi di simmetria.

Espressione della densità. – Lungo un anello circolare la densità è costante. Si ha precisamente (n. 7), per $\varrho = \varrho_0 > 1$, $\psi_0 = \varrho_0^2 - (1/\varrho_0)$, od anche, riprendendo la notazione

$$u = \frac{1}{\varrho}, \qquad u_0 = \frac{1}{\varrho_0},$$

$$\psi_0 = \frac{1}{u_0^2} - u_0 .$$

La ψ dipende in ogni caso da ϱ, a norma della equazione (14),

$$2\psi + v = h .$$

Dacchè, per $\varrho > 1$, v cresce con ϱ, si può, in tesi generale, affermare che, lungo una direttrice esterna qualsiasi, la densità diminuisce quando cresce la distanza da S, e viceversa.

Venendo alla determinazione quantitativa di ψ per soluzioni prossime ad $u = u_0$, teniamo conto che u va incrementato di u_1 e h di δh, sicchè si ha

$$\psi = \psi_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{du}\right)_0 u_1 + \frac{1}{2}\,\delta h\,. \tag{31}$$

Per esprimere δh a mezzo di u_0, basta ricorrere alle (25).
Notando che, per la (18),

$$w_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{h-v}{2}\right)_0^4, \qquad \left(\frac{dw}{du}\right)_0 = -\left(\frac{h-v}{2}\right)_0^3 \left(\frac{dv}{du}\right)_0,$$

e ponendo per brevità

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{h-v}{2}\right)_0^3 = g_0\,,$$

si può scrivere

$$\delta\,\frac{1}{\lambda^2}\,w_0 = \frac{1}{2}\,\frac{h-v_0}{2}\,\delta g_0 + \frac{1}{4}\,g_0\delta h = \frac{1}{2}\,\psi_0\delta g_0 + \frac{1}{4}\,g_0\delta h\,,$$

$$\delta\,\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dw}{du}\right)_0 = -\left(\frac{dv}{du}\right)_0 \delta g_0\,.$$

Con ciò, eliminando δg_0, le (25) danno

$$\delta h = \frac{2\psi_0\varepsilon}{g_0(dv/du)_0}\,.$$

Ora $g_0(dv/du)_0$ non è altro che $(-1/\lambda^2)(dw/du)_0$ e vale quindi $-u_0$, a norma della (19'). Per la ricordata espressione di ψ_0 e per la (10'), si ha

$$-\frac{\psi_0}{u_0} = 1 - \frac{1}{u_0^3} = \left(\frac{dv}{du}\right)_0.$$

Così, avuto riguardo alle (29) e (30), la (31) diviene

$$\psi = \psi_0\left\{1 + \frac{-\varepsilon_1(2\alpha^2-1) + \varepsilon_2\cos\alpha\,(\vartheta-\vartheta_0)}{2u_0}\right\}. \tag{31'}$$

SIGNIFICATO MECCANICO DELLA DISUGUAGLIANZA $\varrho > 1$. – La circostanza che soltanto gli anelli esterni comportano configurazioni infinitamente vicine fa ritenere che, nel caso della natura, se effettivamente si tratta di anelli assimilabili a sistemi continui, debba pur essere soddisfatta la disuguaglianza $\varrho > 1$. Ciò val quanto dire (ricordando che la unità di lunghezza adottata è la a del n. 5) che la distanza media d dell'anello — o meglio di uno qualunque degli anelli elementari — di Saturno (espressa in unità generiche) è presumibilmente $> a$.

Introducendo per a il suo valore (8), la disuguaglianza può essere scritta

$$\omega^2 > \frac{fM}{d^3} . \tag{32}$$

Il secondo membro rappresenta il quadrato del moto medio di un satellite (di massa trascurabile di fronte ad M), il quale circolasse alla distanza d, o avesse più generalmente d per semiasse maggiore dell'orbita.

Se ne inferisce che, *nelle condizioni supposte, la velocità angolare di ciascun anello deve essere più grande di quella, che competerebbe ad un satellite posto alla stessa distanza da Saturno.*