XII.

ÜBER LORENTZ - EINSTEINSCHE STARRE BEWEGUNGEN

(Auszug aus einem Briefe an Hrn. Prof. G. Herglotz in Leipzig)

« Ann. der Physik », Bd. 32 (1910),

pp. 236-240.

. . . .

. . . .

Sie haben neulich (1) diejenigen Bewegungen eines kontinuierlichen Punktsystems, welche nach den Lorentz-Einsteinschen Relativitätsprinzip als *starr* zu bezeichnen sind, vollständig charakterisiert, auf Grund einer (sozusagen vierdimensionalen (2)) Definition der (relativen) Starrheit, die man Hrn. Max Born verdankt (3).

Durch Ihre schöne Abhandlung veranlaßt, habe ich nun bemerkt, daß der Begriff der relativen Starrheit sich in viel anschaulicherer Weise einführen läßt. Man braucht nur, ohne den physikalischen Raum zu verlassen, die (scheinbare) Unveränderlichkeit des Systems für einen mitbewegten Beobachter direkt auszudrücken.

Diese leichtere Fassung des Sachverhältnisses kann selbstverständlich ihre eingehende Untersuchung in keiner Weise ersetzen; sie ermöglicht doch unmittelbar eine deutliche Einsicht in die Natur der relativ festen Verbindungen, und läßt schon am einfachsten Beispiel zweier diskreter Punkte die bedenklichen (d.h. den gewöhnlichen Anschauungen über die Beweglichkeit eines starren Körpers ganz widersprechenden) Folgen einsehen, welche die konsequente Weiterführung des Relativitätsprinzips mit sich bringen würde.

Zur Bestätigung dieser Behauptungen wird es angemessen sein, von der geometrischen Formulierung der Lorentzschen Kontraktion auszugehen.

---

(1) G. Herglotz, « Ann. d. Phys. », 31 (1910), pp. 393-415.
(2) Vgl. jedoch auch die « physikalische » Formulierung l. c. p. 397.
(3) M. Born, « Ann. d. Phys. », 30 (1909), pp. 1-50.

Betrachten wir irgend einen Körper K in gleichförmiger Translationsbewegung. Sei $\boldsymbol{\beta}$ die konstante Geschwindigkeit der Bewegung (im vektoriellen Sinne), β ihr absoluter Betrag (die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 und $\beta < 1$ fortan vorausgesetzt).

Nach der LORENTZschen Hypothese gilt, *für ruhende Beobachter*, dieses:

a) jede longitudinale (d.h. der Bewegung gleichgerichtete) Strecke von K findet sich verkürzt im Verhältnis $\sqrt{1-\beta^2}:1$;

b) jede transversale (d.h. zur Bewegungsrichtung normale) Strecke bleibt unverändert.

Wie verhält sich nun eine (immer dem K angehörende) Strecke $\boldsymbol{d}$, die weder normal noch parallel zur Bewegungsrichtung gestellt ist?

Es seien (von einem ruhenden Beobachter gemessen) d die Länge, und ϑ der Winkel zwischen $\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{\beta}$. Es sei noch d_0 die natürliche Länge der Strecke, d.h. jene Länge, welche im Zustande der Ruhe (für einen ebenfalls ruhenden Beobachter) ihr zukommen würde, ϑ_0 die betreffende Neigung gegen $\boldsymbol{\beta}$.

Die longitudinale Komponente $d\cos\vartheta$ von $\boldsymbol{d}$ muß, nach *a*), kleiner als $d_0\cos\vartheta_0$ ausfallen, im Verhältnis $\sqrt{1-\beta^2}:1$, so daß

$$\frac{d\cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}} = d_0\cos\vartheta_0\,.$$

Die transversale Komponente $d\sin\vartheta$ ist dagegen gleich der natürlichen:

$$d\sin\vartheta = d_0\sin\vartheta_0\,.$$

Quadriert und addiert man die zwei Gleichungen, so ergibt sich

$$d^2\left(\frac{\cos^2\vartheta}{1-\beta^2} + \sin^2\vartheta\right) = d_0^2\,,$$

d. h.

(1) $$d^2\left\{1 + \frac{\beta^2\cos^2\vartheta}{1-\beta^2}\right\} = d_0^2\,,$$

worin das allgemeine Kontraktionsgesetz zu erblicken ist.

Dem Relativitätsprinzip zufolge wird diese, von einem ruhenden Bezugssystem aus, wahrgenommene Kontraktion, von einem mit K bewegten Beobachter, *nicht* bemerkt: ihm *scheint* jede Strecke $\boldsymbol{d}$ ganz unverändert.

Die Gleichung (1) gilt daher als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß einer in translatorischer Bewegung mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\beta}$ sich befindenden Strecke $\boldsymbol{d}$ die *scheinbare* Länge d_0 zukommt, selbstverständlich für einen mitbewegten Beobachter.

* * *

Dies festgestellt, betrachten wir, von einem ruhenden Bezugssystem *Oxyz* aus, zwei (zunächst irgendwie) sich bewegende Puntke P_1, P_2.

Nennen wir $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ ihre Koordinaten zur Zeit t; $\boldsymbol{\beta}_1$ und $\boldsymbol{\beta}_2$ ihre Geschwindigkeiten (als Vektoren, so daß β_1 und β_2 die absoluten Werte bezeichnen); ϑ_1 und ϑ_2 die Neigungen der Strecke P_1P_2 gegen $\boldsymbol{\beta}_1$ und $\boldsymbol{\beta}_2$, immer zur Zeit t.

Es fragt sich nun: Wie müssen die Bewegungen beider Punkte miteinander verbunden sein, damit die Strecke $\overline{P_1P_2}$ unveränderlich *erscheint* sowohl einem sich mit P_1, als einem zweiten sich mit P_2 bewegenden Beobachter? Es wird dabei naturgemäß vorausgesetzt, daß, für jeden dieser Beobachter, die scheinbaren Längen genau dieselben sind als ob es sich um eine gleichförmige Translation handeln würde, mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\beta}_1$ bzw. $\boldsymbol{\beta}_2$ des entsprechenden Augenblickes.

Setzen wir zur Abkürzung

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \,, \tag{2}$$

so wird, nach (1), das Quadrat der scheinbaren Länge der Strecke P_1P_2, von P_1 aus betrachtet,

$$d^2\left\{1 + \frac{\beta_1^2 \cos^2 \vartheta_1}{1 - \beta_1^2}\right\},$$

von P_2 aus,

$$d^2\left\{1 + \frac{\beta_2^2 \cos^2 \vartheta_2}{1 - \beta_2^2}\right\}.$$

Beide Ausdrücke müssen nach unserer Forderung einen, während der Bewegung, konstanten Wert behalten. Bezeichnen wir diesen (notwendig positiven) konstanten Wert mit d_1^2 bzw. d_2^2, so sehen wir, daß *die feste Verbindung von P_1 und P_2 sich mit den zwei Bedingungsgleichungen*

$$\left\{\begin{aligned} d^2\left\{1 + \frac{\beta_1^2 \cos^2 \vartheta_1}{1 - \beta_1^2}\right\} &= d_1^2 \,, \\ d^2\left\{1 + \frac{\beta_2^2 \cos^2 \vartheta_2}{1 - \beta_2^2}\right\} &= d_2^2 \,, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

deckt.

Schon die Tatsache, daß die gewöhnliche Starrheit eine einzige Bedingungsgleichung ($d^2 =$ Konstante), die relative dagegen *zwei* solche verlangt, zeigt, daß beim elektromagnetischrelativen Weltbild fester Körper verloren gehen. So z.B. in der Ebene, wenn die Bewegung des einen von zwei Punkten vorgeschrieben ist, wird die des anderen (durch Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit) vollständig bestimmt usw.

* * *

Die Gleichungen (3) besagen noch nicht, daß die scheinbaren Längen der Strecke P_1P_2, von P_1 und von P_2 aus betrachtet, notwendig gleich ausfallen.

Wollen wir auf diese tief in der üblichen Anschauung liegende Symmetrie nich verzichten, so müssen wir von vornherein $d_1 = d_2$ setzen. Dies würde jedoch aus den Gleichungen (3) allein folgen, wenn wir es mit Bewegungen zu tun hätten, für welche in irgend einem Augenblick t_0 die beiden Punkte P_1 und P_2 gleichzeitig ruhen: es ist dann nämlich, für $t = t_0$, die natürliche Länge der Strecke P_1P_2, und die Gleichungen (3) reduzieren sich auf $d = d_1$, $d = d_2$.

* * *

Es liegt nun nahe, die relative Starrheit eines bewegten Kontinuums in ganz analoger Weise zu definieren.

Wir werden verlangen müssen, daß irgend zwei unendlich benachbarte Punkte P_1 und P_2 des Kontinuums sich so bewegen, daß ihre *scheinbare* elementare Entfernung einen konstanten Wert behält.

Der analytische Ausdruck dieser differentiellen Bedingung ist nichts anderes als die Gleichung (13) (p. 396) Ihrer Note, worin unter $d\sigma^2$ die quadratische Form (18) zu verstehen ist. So sieht man, was für ein begrifflicher Inhalt der von Hrn. M. Born aufgestellten vierdimensionalen Definition des relativstarren Körpers beizulegen ist.

Wie wir soeben auf Grund der Gleichungen (3) für das Beispiel zweier Punkte bemerkt haben, ist in der Definition der relativen Starrheit die Forderung der Symmetrie (Gleichheit zwischen den scheinbaren Längen einer Strecke von ihren beiden Enden aus betrachtet) nicht notwendig enthalten.

In physikalischer Hinsicht würde man eine solche Ergänzungshypothese kaum entbehren, sobald man die Möglichkeit etwaiger Beziehungen zwischen zwei mit denselben starren Körpern bewegten Beobachtern zuläßt. Bei einer solchen Hypothese würde man sogar dazu genötigt, auch die *räumliche Homogenität* des bewegten starren Körpers zu fordern: ich meine damit die Erhaltung, für mitbewegte Beobachter, aller geometrischen Tatsachen und Erfahrungen, welche (im Stande der Ruhe), wegen konstanten Krümmungsmasses des umgebenden Raumes, bestehen würden.

Wie dem auch sei, ist es jedenfalls nicht ohne Interesse zu bemerken, daß aus Ihrer Formel sich unschwer folgender Schluß ziehen läßt:

Die gleichförmigen Translationen sind die einzigen Bewegungen eines relativ-starren Körpers, bei welchen ausserdem die Homogenitätsbedingung erfüllt ist, d.h. bei welchen *alle* anschaulichen Merkmale der gewöhnlichen Starrheit noch vorhanden sind.

In den von Ihnen entdeckten allgemeineren Bewegungsformen ist zwar jede scheinbare Länge erhalten, die Homogenität dagegen verletzt.

. . . .

Padua, den 7 März 1910.