# XIII.

# TRASFORMAZIONE DI UNA RELAZIONE FUNZIONALE DOVUTA AL DINI

## NOTA I.

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XX_1$ (1° sem. $1911_1$),
pp. 285-296.

Il prof. DINI ha stabilito una notevole relazione funzionale fra i valori che una funzione $\alpha$, armonica e regolare entro un cerchio, assume sul contorno e quelli che vi assume la sua derivata normale.

Immaginando di passare, per trasformazione conforme, dal cerchio ad un generico campo $S$, la $\alpha$ (espressa nelle nuove variabili) si conserva armonica e regolare entro $S$, e la formula del DINI (per materiale sostituzione) diviene una relazione funzionale, fra $\alpha$ e la sua nuova derivata normale, valida sul contorno trasformato.

Se il modulo della trasformazione conforme rimane finito e diverso da zero, non solo entro il cerchio, ma anche sulla circonferenza limite, si può senz'altro asserire che la nuova relazione funzionale sussiste sotto le stesse ipotesi qualitative, che furono ben precisate dal DINI. Ma se — come per esempio accade quando il campo $S$ si estende all'infinito — le formule di trasformazione sono affette da qualche singolarità sulla circonferenza limite, possono introdursi (circa il comportamento della funzione sul contorno trasformato) restrizioni affatto artificiali e tali da infirmare l'applicabilità del risultato a casi che (rispetto al contorno trasformato) sono da riguardarsi come normali.

Si richiede allora un po' di discussione per assicurare (a posteriori) alla relazione funzionale trasformata i suoi limiti, dirò così, naturali di validità.

Un esempio elementare, particolarmente interessante, si ha nel passaggio dal cerchio ad una striscia (porzione di piano compresa fra due rette parallele). La relazione funzionale corrispondente (o, più esattamente, certo suo corollario) consente di attribuire tutto il desiderabile rigore ad un brillante artificio analitico escogitato da Lord RAYLEIGH per cogliere i caratteri salienti dell'onda solitaria. Più generalmente essa consente di lumeggiare l'intera teoria delle onde di canale.

In vista di ciò, chiedo all'Accademia il permesso di intrattenermi alquanto diffusamente sopra l'anzidetta trasformazione, che pur non presenta alcuna novità concettuale.

La deduzione e discussione delle formule occuperà questa e una successiva Nota. In una terza Nota potrò finalmente passare alle applicazioni.

## 1. - Richiamo della formula del Dini.

Sia $\alpha$ una funzione armonica, regolare in un certo campo, finita e continua sul contorno di tale campo assieme alla sua derivata normale $d\alpha/dn$ ($n$ designando la normale al contorno, vôlta verso l'interno del campo).

La conoscenza dei valori di $d\alpha/dn$ sul contorno determina notoriamente $\alpha$, a meno di una costante additiva. L'espressione esplicita, nel caso di un campo circolare, fu assegnata dal prof. DINI già parecchi anni or sono [1] e può scriversi come segue:

$$\alpha_P = -\frac{1}{2\pi}\int_c \log \frac{R^2}{\overline{P_1P}\cdot\overline{P_1P'}}\left(\frac{d\alpha}{dn}\right)_1 dc_1 + \text{cost.}\,, \tag{1}$$

dove $c$ rappresenta la circonferenza che limita il campo; $R$ il suo raggio; al log va attribuita la determinazione reale; $\alpha_P$ sta a rappresentare il valore della $\alpha$ nel punto generico $P$ (interno, o anche appartenente alla circonferenza $c$); $P'$ è il coniugato armonico di $P$, rispetto a $c$; $P_1$ è un punto di $c$, rispetto al quale va eseguita l'integrazione, e si contrassegnano coll'indice 1 le determinazioni, che si riferiscono a $P_1$, della funzione $d\alpha/dn$ e dell'elemento d'arco $dc$.

Assumiamo, per semplicità, eguale ad 1 il raggio di $c$, e introduciamo un sistema cartesiano $\xi$, $\eta$ coll'origine nel centro, nonchè le corrispondenti coordinate polari $\varrho$, $\sigma$.

Considerando, accanto alla funzione armonica $\alpha(\xi, \eta)$ (dei punti del nostro campo circolare), la sua associata $\beta(\xi, \eta)$, definita (anch'essa a meno di una costante additiva) da

$$d\beta = -\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\,d\xi + \frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\,d\eta\,, \tag{2}$$

---

[1] *Sull'equazione* $\Delta^2 u = 0$, « Annali di Matematica », ser. 2ª, tomo V, 1871, pp. 305-345.

risulterà

$$\gamma = \alpha + i\beta \tag{3}$$

funzione della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$, regolare per $|\zeta| < 1$, finita e continua assieme alla sua prima derivata sulla circonferenza $c$ ($|\zeta| = 1$).

Se si tien conto che un elemento di $c$ (nel senso delle $\sigma$ crescenti) e un elemento $dn$ di normale (o, ciò che è lo stesso, di raggio) vôlto verso il centro costituiscono una coppia congruente a quella degli assi coordinati $\xi$, $\eta$, le relazioni di monogeneità [compendiate nella (3)] dànno, in un punto generico di $c$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta}{d\sigma} = -\dfrac{d\alpha}{dn}, \\ \dfrac{d\beta}{dn} = \dfrac{d\alpha}{d\sigma}. \end{cases} \tag{4}$$

Ciò posto, concentriamo l'attenzione sui valori di $\alpha$, $\beta$, al contorno, pensandoli come funzioni di quell'unica variabile — l'anomalia — che fissa la posizione sul contorno stesso.

Riprendiamo la (1), supponendovi $P$ sul contorno, con che $P'$ viene a coincidere con $P$. Attribuendo la designazione generica $\sigma$ all'anomalia di $P$ e rappresentando con $\sigma_1$ quella di $P_1$, si ha, per ovvie considerazioni di geometria elementare (dacchè $R = 1$):

$$\overline{P_1P} \cdot \overline{P_1P'} = \overline{P_1P^2} = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}.$$

La prima delle (4) dà

$$\left(\frac{d\alpha}{dn}\right)_1 = -\frac{d\beta(\sigma_1)}{d\sigma_1} = -\beta'(\sigma_1),$$

l'apice designando derivazione rispetto all'argomento indicato.

Si può quindi scrivere

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2[(\sigma_1 - \sigma)/2]}\, \beta'(\sigma_1)\, d\sigma_1 + \text{cost}. \tag{5}$$

La (1) vale naturalmente anche per la funzione associata $\beta$. Avuto riguardo alla seconda delle (4), se ne trae

$$\beta(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2[(\sigma_1 - \sigma)/2]}\, \alpha'(\sigma_1)\, d\sigma_1 + \text{cost}. \tag{6}$$

## 2. - Corollari.

Supponiamo in particolare che si tratti di una funzione $\gamma(\zeta)$, reale per $\zeta$ reale. La parte reale $\alpha$ assume allora valori eguali in punti simmetrici rispetto all'asse reale $\eta = 0$; la $\beta$ assume invece valori opposti. Ciò si traduce, per i punti di $c$, nelle formule seguenti:

$$\begin{cases} \alpha(2\pi - \sigma) = \phantom{-}\alpha(\sigma)\,, \\ \beta(2\pi - \sigma) = -\beta(\sigma)\,, \end{cases}$$

donde, per derivazione,

$$\begin{cases} \alpha'(2\pi - \sigma) = -\alpha'(\sigma)\,, \\ \beta'(2\pi - \sigma) = \phantom{-}\beta'(\sigma)\,. \end{cases}$$

In virtù dell'ultima di queste relazioni, ove si scinda nella (5) l'intervallo di integrazione in due parti (da 0 a $\pi$, e da $\pi$ a $2\pi$), si cambi, nel secondo integrale, la variabile corrente di integrazione $\sigma_1$ in $2\pi - \sigma_1$, e si ponga

$$H(\sigma_1, \sigma) = \log \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2[(\sigma_1 - \sigma)/2] \operatorname{sen}^2[(\sigma_1 + \sigma)/2]}\,, \tag{7}$$

si può attribuire alla (5) la forma

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi H(\sigma_1, \sigma)\beta'(\sigma_1)\,d\sigma_1 + \text{cost}\,. \tag{8}$$

Dacchè si ha identicamente

$$H(\sigma_1,\ 2\pi - \sigma) = H(\sigma_1, \sigma)\,,$$

rimane inclusa, nella espressione (8) di $\alpha$, la condizione di simmetria al contorno $\alpha(2\pi - \sigma) = \alpha(\sigma)$.

In modo analogo, si ha dalla (6), ove si tenga conto di $\alpha'(2 - \sigma) = -\alpha'(\sigma)$ e si ponga

$$K(\sigma_1, \sigma) = \log \frac{\operatorname{sen}^2[(\sigma_1 + \sigma)/2]}{\operatorname{sen}^2[(\sigma_1 - \sigma)/2]}\,, \tag{9}$$

$$\beta(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi K(\sigma_1, \sigma)\alpha'(\sigma_1)\,d\sigma_1 + \text{cost}\,.$$

Essendo identicamente

$$K(\sigma_1,\, 2\pi - \sigma) = -K(\sigma_1,\, \sigma)\,,$$

la proprietà emisimmetrica di $\beta$ $[\beta(2\pi - \sigma) = -\beta(\sigma)]$ esige che la costante additiva sia nulla. Era ben prevedibile che la indeterminazione dovesse scomparire [a differenza di quel che accade nella (8)], considerando che l'assunta ipotesi ($\gamma$ reale, e quindi $\beta = 0$ sull'asse reale) può lasciar sussistere la indeterminazione di una costante additiva in $\alpha$, ma non in $\beta$.

Risulta pertanto

$$\beta(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi K(\sigma_1,\, \sigma)\alpha'(\sigma_1)\, d\sigma_1\,. \tag{10}$$

### 3. - Passaggio alla striscia.

Ove si ponga

$$f = \varphi + i\psi = \frac{2}{\pi}\log\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\,, \qquad (\varphi \text{ e } \psi \text{ reali}), \tag{11}$$

e si fissi quella determinazione del logaritmo che si annulla con $\zeta$, rimane definita una funzione $f(\zeta)$ della variabile complessa $\zeta$ uniforme e regolare entro il cerchio $|\zeta| < 1$, e reale sul diametro reale.

Per riconoscere comodamente la regione del piano complesso $f$, che viene a corrispondere, per la (11), al campo circolare $|\zeta| \leqslant 1$, introduciamo per un momento anche i due raggi vettori, che congiungono un punto generico $\zeta$ (del cerchio o della circonferenza) colle estremità $\zeta = -1$, $\zeta = 1$ del diametro reale. Diciamo ordinatamente $\varrho_{-1}$, $\varrho$ le lunghezze di questi raggi vettori e $\vartheta_{-1}$, $\vartheta_1$ gli angoli acuti che essi formano coll'asse reale, contati positivamente pel semicerchio di ordinate positive, negativamente per l'altro.

$\varrho_{-1}$, $\vartheta_{-1}$ possono evidentemente interpretarsi quali coordinate polari (del punto $\zeta$) rispetto al polo $\zeta = -1$ e alla direzione positiva (quella delle ascisse crescenti) del diametro reale come asse polare. Del pari $\varrho_1$, $\vartheta_1$ rispetto al polo $\zeta = 1$ e alla direzione negativa del diametro suddetto: volendo cambiare direzione all'asse, in modo che l'anomalia riesca contata sempre nello stesso verso, le coordinate polari saranno $\varrho_1$, $\pi - \vartheta_1$.

Ora, $\zeta + 1$ e $\zeta - 1$ essendo le affisse di un punto generico $\zeta$ relative alle origini $-1$, $1$ (e ad assi paralleli ai primitivi $\xi$, $\eta$), sussistono le identità

$$\zeta + 1 = \varrho_{-1} e^{i\vartheta_{-1}}$$

$$\zeta - 1 = \varrho_1 e^{i(\pi - \vartheta_1)},$$

la seconda delle quali può essere scritta

$$1 - \zeta = \varrho_1 e^{-i\vartheta_1}.$$

Prendendo i logaritmi dei due membri colla determinazione che si annulla nell'origine (e che rimane univocamente fissata per continuità entro o anche sopra la circonferenza $|\zeta| = 1$, fatta solo eccezione per i punti $\pm 1$), si ha

$$\log(1 + \zeta) = \log \varrho_{-1} + i\vartheta_{-1},$$

$$\log(1 - \zeta) = \log \varrho_1 - i\vartheta_1,$$

dove a $\log \varrho_{-1}$, $\log \varrho_1$ vanno naturalmente attribuiti i loro valori reali.

Ne consegue

$$f = \varphi + i\psi = \frac{2}{\pi} \log \frac{\varrho_{-1}}{\varrho_1} + i \frac{2}{\pi} (\vartheta_{-1} + \vartheta_1). \tag{12}$$

Atteso il significato geometrico di $\vartheta_{-1}$, $\vartheta_1$, questa formula mostra nettamente che, al variare di $\zeta$ nel semicerchio di ordinate positive, $\psi$ rimane compreso fra 0 e 1, assumendo il valore zero sul diametro e il valore 1 sulla semicirconferenza $1, i, -1$. Variando invece $\zeta$ nel sottostante semicerchio, $\psi$ varia fra 0 e $-1$, assumendo (come poteva asserirsi *a priori*, data la realità di $f$ sull'asse reale) valori opposti in punti simmetrici.

Le varie circonferenze passanti per i punti $-1, 1$, o meglio gli archi di tali circonferenze interni a $c$ (inclusovi il segmento rettilineo $-1, 1$, che ne è il caso limite) sono luoghi di punti, per cui

$$\psi = \frac{2}{\pi} (\vartheta_{-1} + \vartheta_1),$$

conserva valore costante. Mentre $\zeta$ percorre uno di questi archi, passando da $-1$ a $1$, $\varrho_{-1}$ cresce costantemente, a partire dal valore zero, e $\varrho_1$ decresce costantemente, convergendo verso zero.

Il rapporto $\varrho_{-1}/\varrho_1$ varia dunque, sempre crescendo, da 0 a $\infty$, sicchè

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \log \frac{\varrho_{-1}}{\varrho_1},$$

varia, crescendo sempre anch'esso, da $-\infty$ a $+\infty$. Ciò val quanto dire che l'affissa $f$ descrive (nel suo piano rappresentativo) una parallela all'asse delle ascisse, percorrendola tutta, in senso positivo.

Se ne conclude che la (11) fa corrispondere al campo circolare $|\zeta|\leqslant 1$ del piano $\zeta$ la striscia $S$ del piano $f$ compresa fra le due rette $\psi = \pm 1$, la corrispondenza risultando biunivoca fra i contorni.

Val la pena di rilevare che a valori puramente immaginari di $\zeta$ corrispondono analoghi valori di $f$. Ciò risulta per es. dall'osservare che, per $\zeta$ puramente immaginario, $1+\zeta$ e $1-\zeta$ riescono coniugati, sicchè il modulo del rapporto è 1, e la (11) dà $\varphi = 0$. Si può egualmente desumerlo dalla (12), notando che, sul diametro immaginario $-i$, $i$, si ha $\varrho_{-1} = \varrho_1$.

Consideriamo in particolare i punti $\zeta$ della semicirconferenza $-1$, $i$, $1$, e riprendiamo la coordinata polare $\sigma$ relativa al centro, facendola variare (in senso sempre decrescente) da $\pi$ a $0$. Il punto $\zeta = e^{i\sigma}$ descrive così la detta semicirconferenza da $-1$ a $1$, e il corrispondente punto $f$ la retta $\psi = 1$ da $-\infty$ a $+\infty$.

Essendo poi

$$\frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \frac{1+e^{i\sigma}}{1-e^{i\sigma}} = \frac{e^{-i(\sigma/2)}+e^{i(\sigma/2)}}{e^{-i(\sigma/2)}-e^{i(\sigma/2)}} = i\cot\frac{\sigma}{2},$$

la (11) ci dà

$$\varphi = \frac{2}{\pi}\log\cot\frac{\sigma}{2}, \tag{13}$$

(si intende colla determinazione reale del logaritmo), e di conseguenza

$$\cot\frac{\sigma}{2} = e^{(\pi/2)\varphi}, \tag{13'}$$

le quali esplicitano la relazione biunivoca fra $\sigma$ e $\varphi$, cioè fra i parametri definienti la posizione sul semicerchio $-1$, $i$, $1$ e sulla retta $\psi = 1$ rispettivamente

## 4. - Trasformazione subordinata nelle precedenti equazioni funzionali.

Mercè la (11), ogni funzione $\gamma(f)$ della variabile complessa $f$, uniforme e regolare entro $S$, si può pure considerare come funzione uniforme e regolare di $\zeta$ per i valori corrispondenti, cioè entro il cerchio $|\zeta|\leqslant 1$.

Se $\gamma(f)$ è reale sull'asse reale $\psi = 0$ (bisettrice della striscia), lo sarà di conseguenza $\gamma(\zeta)$ sul diametro reale $-1$, $1$ del cerchio.

Un po' di discussione esige però il comportamento al contorno.

Se (come è tassativo fare per certe applicazioni), circa il comportamento all'infinito di $\gamma(f)$ e di $d\gamma/df$, si ammette soltanto che si conservino entrambe finite sulle rette limiti $\psi = \pm 1$ di $S$, non ne segue che $\gamma(\zeta)$ rimanga continua, e sopra tutto che $d\gamma/d\zeta$ rimanga finita per i punti $\pm 1$ della circonferenza $c$.

Infatti, per quanto abbiamo visto nel n. precedente, ove si fissi per esempio la retta $\psi = 1$ e la corrispondente semicirconferenza $-1$, $i$, $1$, riportandovi i valori di $\gamma(\varphi + i)$, bisogna badare alla circostanza che gli estremi $\pm 1$ della semicirconferenza corrispondono a $\varphi = \pm\infty$.

Se la $\gamma(\varphi + i)$, pur restando finita, non converge verso limiti determinati al crescere indefinito di $\varphi$, lo stesso avviene per $\gamma(\zeta)$ al tendere di $\zeta$ (sopra la semicirconferenza) verso uno dei due estremi: si ha dunque in generale una discontinuità di seconda specie.

E le cose vanno ancora peggio per $d\gamma/d\zeta$. Essendo, in virtù della (11),

$$\frac{d\gamma}{d\zeta} = \frac{d\gamma}{df}\,\frac{df}{d\zeta} = \frac{d\gamma}{df}\,\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{1-\zeta^2}, \tag{14}$$

la $d\gamma/d\zeta$, e con essa $\alpha'$, $\beta'$, diverranno in generale infinite nei punti $\zeta = \pm 1$.

Perciò una $\gamma(\zeta)$, proveniente nel modo testè indicato, da una $\gamma(f)$ regolare nella striscia, reale sull'asse reale, continua, assieme a $d\gamma/df$, anche sulle rette limiti, ma semplicemente finita all'infinito, non ottempera senz'altro alle condizioni qualitative (del Dini), sotto cui furono dedotte le relazioni funzionali del n. 2.

Introduciamo, in via provvisoria, le ipotesi complementari seguenti:

1) la funzione $\gamma(\varphi + i)$ converge verso valori limiti reali ben determinati per $\varphi = \pm\infty$ (con che $\lim \beta = 0$);

2) $d\gamma(\varphi + i)/d\varphi$ converge verso zero in tal guisa che $d\gamma/d\zeta$ resti finita e continua anche per $\zeta = \pm 1$, o, ciò che è lo stesso, resti finita e continua $d\gamma/d\sigma$ per $\sigma = 0$ e $\sigma = \pi$. Essendo, per la (13),

$$d\varphi = -\frac{2}{\pi}\,\frac{d\sigma}{\operatorname{sen}\sigma} = -\frac{1}{\pi}\left(e^{(\pi/2)\varphi} + e^{-(\pi/2)\varphi}\right) d\sigma\,,$$

quest'ultima condizione esige che $d\gamma/d\varphi$ si annulli esponenzialmente all'infinito, per modo che il prodotto

$$\left(e^{(\pi/2)\varphi} + e^{-(\pi/2)\varphi}\right)\frac{d\gamma(\varphi + i)}{d\varphi}\,,$$

converga verso limiti determinati e finiti per $\varphi = \pm\infty$.

Con ciò i valori di $\alpha$, $\beta$ verificano, sulla circonferenza $c$, le condizioni del Dini, e sono di conseguenza legati dalle (8) e (10). Trasformiamole, sostituendovi alle anomalie $\sigma$ e $\sigma_1$ dei punti del semicerchio $-1$, $i$, $1$ le corrispondenti ascisse $\varphi$ e $\varphi_1$ dei punti della retta $\psi = 1$.

Le formule di passaggio, cioè la (13)

$$\cot\frac{\sigma}{2} = e^{(\pi/2)\varphi},$$

e l'analoga

$$\cot\frac{\sigma_1}{2} = e^{(\pi/2)\varphi_1},$$

conferiscono ai nuclei $H(\sigma_1, \sigma)$, $K(\sigma_1, \sigma)$, definiti da (7) e (9), le espressioni seguenti

$$H(\varphi_1, \varphi) = \log\left\{\frac{(1+e^{\pi\varphi_1})(1+e^{\pi\varphi})}{4(e^{\pi\varphi_1}-e^{\pi\varphi})}\right\}^2$$

$$= \log\left\{\frac{\left(e^{(\pi/2)\varphi_1}+e^{-(\pi/2)\varphi_1}\right)\left(e^{(\pi/2)\varphi}+e^{-(\pi/2)\varphi}\right)}{4\left\{e^{(\pi/2)(\varphi_1-\varphi)}-e^{(-\pi/2)(\varphi_1-\varphi)}\right\}}\right\}^2,$$

$$K(\varphi_1, \varphi) = \log\left\{\frac{e^{(\pi/2)\varphi_1}+e^{(\pi/2)\varphi}}{e^{(\pi/2)\varphi_1}-e^{(\pi/2)\varphi}}\right\}^2. \tag{9'}$$

In $H(\varphi_1, \varphi)$ conviene staccare l'addendo $\log(1/16)(e^{(\pi/2)\varphi}+e^{-(\pi/2)\varphi})^2$, che non dipende da $\varphi_1$, e scrivere in conformità

$$H(\varphi_1, \varphi) = \Lambda(\varphi_1, \varphi) + \log\left[\frac{1}{16}\left(e^{(\pi/2)\varphi}+e^{-(\pi/2)\varphi}\right)^2\right], \tag{7'}$$

con

$$\Lambda(\varphi_1, \varphi) = \log\left\{\frac{e^{(\pi/2)\varphi_1}+e^{-(\pi/2)\varphi_1}}{e^{(\pi/2)(\varphi_1-\varphi)}-e^{(-\pi/2)(\varphi_1-\varphi)}}\right\}^2. \tag{15}$$

Se si nota che

$$\alpha'(\sigma_1)\,d\sigma_1 = d\alpha = \alpha'(\varphi_1)\,d\varphi_1,$$

e che, come abbiamo rilevato alla fine del n. 3, al verso $-1$, $i$, $1$ del semicerchio, cioè al verso decrescente di $\sigma$ da $\pi$ a zero, fa riscontro il verso crescente $-\infty$, $+\infty$ di $\varphi$, la (10) assume l'aspetto

$$\beta(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi)\alpha'(\varphi_1)\,d\varphi_1. \tag{I}$$

In modo analogo la (8) diviene

$$\alpha(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\varphi_1, \varphi)\beta'(\varphi_1)\,d\varphi_1 + \text{cost}\,. \tag{8'}$$

Per la prima delle ipotesi complementari, pocanzi enunciate, la funzione $\beta(\varphi)$ deve tendere verso zero per $\varphi = \pm\infty$; ciò implica, esistendo ed essendo anzi continua la derivata,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta'(\varphi_1)\,d\varphi_1 = 0\,.$$

Ne segue, avuto riguardo alla espressione (7′) di $H$, che si può, nella (8′), ridurre $H$ al primo addendo $\Lambda$, e ritenere accanto alla (1), l'equazione

$$\alpha(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\varphi_1, \varphi)\beta'(\varphi_1)\,d\varphi_1 + \text{cost}\,. \tag{II}$$

La (I), immaginandovi per un momento sostituita ad $\alpha'$ la derivata normale di $\beta$, concerne, si può dire, le funzioni armoniche $\beta$ *dispari* rispetto all'asse reale (tali cioè che assumono valori opposti in punti simmetrici rispetto a tale asse); la (II) (immaginandovi introdotta per $\beta'$ la derivata normale di $\alpha$) concerne invece le funzioni *pari* (simmetriche rispetto allo stesso asse). Appare così giustificato, e potrà talora essere comodo, di designare la (I) e la (II) colle qualifiche rispettive di *relazioni dispari* e *relazioni pari*.

### 5. - Comportamento dei nuclei $K(\varphi_1, \varphi)$, $\Lambda(\varphi_1, \varphi)$.

Occupiamoci dapprima di $K$.

Designando per brevità con $s$ la differenza $(\pi/2)(\varphi_1 - \varphi)$, la (9′) ci dà

$$K(\varphi_1, \varphi) = \log\left(\frac{1 + e^{-s}}{1 - e^{-s}}\right)^2 = \log\left(\frac{1 + e^{s}}{1 - e^{s}}\right)^2, \tag{16}$$

donde apparisce che $K$ dipende soltanto dall'argomento $s$ e ne è funzione pari. Esso ha manifestamente un infinito logaritmico per $s = 0$ $(\varphi_1 = \varphi)$, mentre si mantiene regolare per ogni altro valore reale di $s$;

è ovunque positivo, e decresce al decrescere di $s$ in valore assoluto, annullandosi esponenzialmente per $s = \pm \infty$. Ciò risulta dall'osservare che, per $|s| > 0$, si ha dalla nota serie logaritmica

$$\log\left(\frac{1+e^{-|s|}}{1-e^{-|s|}}\right)^2 = 2\{\log(1+e^{-|s|}) - \log(1-e^{-|s|})\} \tag{17}$$

$$= 4\left\{e^{-|s|} + \frac{e^{-3|s|}}{3} + \frac{e^{-5|s|}}{5} + \ldots\right\}.$$

Come si vede, i singoli termini sono positivi e sempre decrescenti al crescere di $|s|$; la funzione tende poi asintoticamente ad annullarsi come $e^{-|s|}$. Essa rimane quindi integrabile fra $-\infty$ e $+\infty$, anche molitplicata per una potenza qualsiasi di $s$.

Lo stesso può dirsi, riponendo per $s$ il suo valore $(\pi/2)(\varphi_1 - \varphi)$, nei riguardi della variabile $\varphi_1$.

Ne consegue in particolare che, se $A(\varphi_1)$ designa una qualsiasi funzione di $\varphi_1$, finita e continua al finito, e finita (o anche dotata di singolarità polare comunque elevata) per $\varphi_1 = \pm \infty$, l'integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi) A(\varphi_1)\, d\varphi_1 ,$$

rappresenta una funzione di $\varphi$, finita e continua anche all'$\infty$.

Prendiamo in particolare $A(\varphi_1) = 1$. Avremo anzi tutto, adottando $s = (\pi/2)(\varphi_1 - \varphi)$ come variabile di integrazione al posto di $\varphi_1$, e tenendo presente la parità della $K$, considerata come funzione di $s$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi)\, d\varphi_1 = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty} \log\left(\frac{1+e^{-s}}{1-e^{-s}}\right)^2 ds .$$

Al $\log[(1+e^{-s})/(1-e^{-s})]^2$ si può applicare lo sviluppo (17) e integrare termine a termine da un $\varepsilon$ positivo, comunque piccolo, a $\infty$; dopo di che, attesa l'integrabilità della funzione e l'uniforme convergenza della serie degli integrali anche per $\varepsilon = 0$, si ha al limite

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi)\, d\varphi_1 = \frac{8}{\pi^2}\left\{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right\} = \frac{8}{\pi^2} s_2' ,$$

designando $s_2'$ la somma delle inverse dei quadrati dei numeri dispari. Ora la somma $s_2$ delle inverse dei quadrati di tutti i numeri naturali vale $\pi^2/6$ (²). D'altra parte $s_2$ consta di $s_2'$ e dell'analoga somma relativa ai numeri pari, che vale $\frac{1}{4}s_2$. Se ne ricava

$$s_2' = \tfrac{3}{4}\, s_2 = \frac{\pi^2}{8}\,,$$

e di conseguenza

$$(18) \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi)\, d\varphi_1 = 1\,,$$

per qualsiasi valore (reale) di $\varphi$.

Val la pena di rilevare che quest'ultima formula può essere considerata come quel caso particolare della relazione dispari (I), che si riferisce alla funzione $\gamma(f) = f = \varphi + i\psi$: si ha infatti, per tale funzione, $\alpha' = \beta = 1$ sulla retta $\psi = 1$. Si noti tuttavia che $\gamma(f) = f$ non è una di quelle funzioni, per cui la formula (I) può ritenersi senz'altro trasportabile dal cerchio, in base a quanto precede. In realtà lo è, come vedremo più innanzi. Intanto ho voluto, a titolo d'esempio, fare il calcolo diretto dell'integrale.

Passiamo alla funzione $\Lambda(\varphi_1, \varphi)$, e consideriamone il modo di variare con $\varphi_1$ in corrispondenza ad un valore (finito) generico di $\varphi$. Dalla (15) apparisce che $\Lambda$ ha una singolarità logaritmica per $\varphi_1 = \varphi$, si mantiene regolare per ogni altro valore reale di $\varphi_1$, convergendo, per $\varphi_1 = \pm\infty$, verso i limiti $\pm\pi\varphi$ rispettivamente. Questo infirma la integrabilità della $\Lambda$ (rispetto a $\varphi_1$) da $-\infty$ a $+\infty$.

Mostrerò in una prossima Nota come si possa allargare il campo di validità delle equazioni integrali (I), (II).

---

(²) Cfr. per es. CESÀRO, *Corso di analisi algebrica*. Torino, Bocca, 1894, p. 481.