Nota II.

Ibidem, pp. 381-391.

6. – Nella precedente Nota [1] abbiamo stabilito due equazioni integrali (I), (II) fra i valori al contorno di una funzione $\gamma(f)$ della variabile complessa f, regolare entro una striscia S e reale sull'asse reale (bisettrice della striscia). Vi siamo pervenuti per trasformazione di analoghe formule relative al cerchio, in base ad ipotesi addizionali piuttosto restrittive circa il comportamento della γ al contorno. È però facile, una volta acquisite le formule, il controllarle a posteriori. Avremo così il vantaggio di estenderne notevolmente i limiti di validità. E precisamente accerteremo che, *affinchè esista una funzione* $\gamma(f)$, *regolare entro la striscia, reale sull'asse reale e soddisfacente sul contorno* $\psi = 1$ *alla relazione dispari* (I), *basta la ipotesi seguente*:

a) $\alpha'(\beta)$ *è funzione* (dei punti della retta $\psi = 1$) *continua al finito, e dotata di limite superiore finito, anche al crescere indefinito dell'argomento.*

Per la relazione pari (II) *si ha invece come condizione sufficiente*:

b) $\beta'(\varphi)$ *è continua e integrabile da* $-\infty$ *a* $+\infty$, *essendo altresì*

$$\lim_{\varphi=\pm\infty} \beta = 0 \, ,$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta'(\varphi)\, d\varphi = 0 \, .$$

In entrambi i casi, la $\gamma(f)$ rimane altresì *univocamente* determinata (a meno di una costante additiva reale), purchè si prendano in considerazione soltanto funzioni, per cui la β ammette un limite superiore finito in tutta la striscia (contorno incluso).

---

[1] Cfr. p. 285 e seg. (seduta del 5 Marzo) [in questo vol., pp. 163-174].

7. - Prolungamento analitico della K.

Consideriamo la funzione

$$(19)\qquad K(\varphi_1, f-i) = \log\left\{\frac{e^{(\pi/2)\varphi_1} + e^{\pi/2(f-i)}}{e^{(\pi/2)\varphi_1} - e^{\pi/2(f-i)}}\right\}^2,$$

(che si ottiene materialmente dalla (9′) sostituendo $f-i$ a φ) per f variabile nella solita striscia S (compresa fra le rette $\psi = \pm 1$), e φ_1 parametro reale qualsiasi.

Prendiamo dapprima f sulla retta $\psi = 1$ che limita superiormente la striscia, e supponiamo, per fissare le idee, $\varphi > \varphi_1$. Scegliamo, in corrispondenza ad uno qualunque di tali valori ($\psi = 1$, $\varphi > \varphi_1$), quella determinazione reale $K(\varphi_1, \varphi)$, di cui abbiamo studiato il comportamento nella Nota precedente (n. 5). Ed esaminiamo quel che avviene quando si fa variare f *senza uscire dalla striscia e senza mai attraversare punti singolari*, attribuendo beninteso a $K(\varphi, f-i)$ la determinazione voluta dalla continuità.

Restando per un momento sulla retta $\psi = 1$, è chiaro che, fino a che $\varphi > \varphi_1$, la funzione definita dalla (19) seguiterà a coincidere colla $K(\varphi_1, \varphi)$ del n. 5. Ma non possiamo affermare che ciò accadrà pure per $\varphi < \varphi_1$, poichè c'è di mezzo una singolarità (logaritmica) per $\varphi = \varphi_1$. Evitiamola, addentrandoci intanto nella striscia, dove non saremo arrestati da alcuna singolarità: torneremo poi al contorno.

Posto, per brevità di scrittura,

$$\frac{\pi}{2}(\psi - 1) = \chi,$$

(con che, *entro* la striscia, $0 < \chi < \pi$) e

$$\frac{\pi}{2}(\varphi_1 - \varphi) = s,$$

la (19) assume l'aspetto

$$(20)\qquad K(\varphi_1, f-i) = \log\left(\frac{1+e^{-s+i\chi}}{1-e^{-s+i\chi}}\right)^2 = \log\left(\frac{1+e^{s-i\chi}}{1-e^{s-i\chi}}\right)^2.$$

Si vede che, per $0 < \chi < \pi$, la funzione di cui si deve prendere il logaritmo, non ha nè zeri, nè infiniti, qualunque sia il valore reale di s.

Considerazioni analoghe a quelle del n. 5 mostrano poi che la K si annulla esponenzialmente per $s = \pm\infty$.

Ne consegue che, *colla determinazione iniziale*

$$K(\varphi, f - i) = K(\varphi_1, \varphi) \quad \text{per} \quad \psi = 1 \quad \text{e} \quad \varphi > \varphi_1 , \tag{21}$$

da noi adottata, la (19) *definisce una funzione uniforme della variabile complessa f, regolare entro la striscia S, per qualsiasi valore reale del parametro φ_1, e integrabile, rispetto a φ_1, da $-\infty$ a $+\infty$. Questa funzione è puramente immaginaria sull'asse reale $\psi = 0$.* Infatti la (19), per $f = \varphi$ [o la (20) per $\chi = \pi/2$], mostrano che la frazione sotto il segno logaritmo ha modulo 1; la parte reale del logaritmo stesso è quindi nulla, indipendentemente dalla determinazione con cui lo si deve prendere. Per essere $K(\varphi_1, f - i)$ puramente immaginaria sull'asse reale $\psi = 0$, saranno coniugati i valori di iK in punti simmetrici rispetto allo stesso asse: in particolare, i valori limiti di iK, e quindi di K, su $\psi = -1$ potranno essere desunti per riflessione da quelli che gli competono per $\psi = 1$.

Siamo così ridotti, per esaurire la nostra discussione, a renderci conto del comportamento di K sulla rimanente parte ($\varphi < \varphi_1$) della retta $\psi = 1$.

All'uopo notiamo che (f essendo l'affissa di un punto generico di S rispetto agli assi coordinati φ, ψ, cui ci siamo finora riferiti)

$$f^* = f - (\varphi_1 + i)$$

può interpretarsi come affissa (dello stesso punto) rispetto ad assi paralleli ai primitivi coll'origine nel punto $\varphi_1 + i$ (della retta limite $\psi = 1$). Rispetto a tale sistema i punti di S cadono tutti nel terzo e quarto quadrante: le anomalie loro, dedotte per continuità da una generica, potranno ritenersi comprese fra 0 e $-\pi$, ove si convenga di attribuire il valore zero dell'anomalia della semiretta $\psi = 1$, $\varphi > \varphi_1$. Questa ovvia osservazione si trasporta alla funzione

$$\log f^* = \log \{f - (\varphi_1 + i)\} ,$$

in cui il coefficiente di i è precisamente l'anomalia ϑ^* del punto considerato f^*, o, se si vuole, f, rispetto al sistema ausiliario. Adottata la determinazione reale $\log(\varphi - \varphi_1)$, per f^* reale e positivo ($\psi = 1$, $\varphi > \varphi_1$), si avrà, per f^* reale negativo ($\psi = 1$, $\varphi < \varphi_1$), $\vartheta^* = -\pi$, ossia

$$\log f^* = \log(\varphi_1 - \varphi) - i\pi \tag{22}$$

[si intende, colla determinazione aritmetica di $\log(\varphi_1 - \varphi)$].

Se ora si pone

$$K^* = \log \left\{ f^* \frac{1 + e^{(\pi/2)f^*}}{1 - e^{(\pi/2)f^*}} \right\}^2, \tag{23}$$

si vede che si tratta di funzione regolare nell'intorno di $f^* = 0$, essendo

$$\lim \left\{ \frac{f^*}{1 - e^{(\pi/2)f^*}} \right\}^2 = \frac{4}{\pi^2},$$

nonchè di ogni altro valore (finito) di f^*. Fissata quindi pel logaritmo la determinazione reale in corrispondenza al valore zero di f^*, si potrà asserire che esso si mantiene reale per tutti i valori reali dell'argomento.

Immaginando di sostituire per f^* il suo valore $f - (\varphi_1 + i)$, la K^* si presenta come funzione di f regolare nell'intorno di $\varphi_1 + i$, e reale su tutta la retta $\psi = 1$.

Siccome si ha dalle (19) e (23)

$$K(\varphi_1, f - i) = K^* - 2 \log f^*, \tag{19'}$$

così si accerta in primo luogo che, colle specificazioni adottate per K^* e per $\log f^*$, il secondo membro rappresenta effettivamente quella determinazione di $K(\varphi_1, f - i)$ (cui ci siamo sempre riferiti) che è reale per $\psi = 1$ e $\varphi > \varphi_1$, conformemente alla (21).

Ove si supponga invece $\varphi < \varphi_1$, e si passi, dall'interno delia striscia, alla retta limite $\psi = 1$, la (19'), avuto riguardo alla (22), ci dà senz'altro

$$\lim K(\varphi_1, f - i) = \lim K^* - 2 \log (\varphi_1 - \varphi) + 2\pi i.$$

Ora $\lim K^*$ seguita ad essere reale anche per f^* negativo, sicchè, data l'espressione (23) di K^*, la differenza

$$\lim K^* - 2 \log (\varphi_1 - \varphi)$$

non è altro che il nucleo reale $K(\varphi_1, \varphi)$ (definito dalla (7') per tutti i valori reali dei due argomenti).

Così in definitiva possiamo completare la (21), scrivendo

$$K(\varphi_1, f - i) = K(\varphi_1, \varphi) + 2\pi i \quad \text{per} \quad \psi = 1 \quad \text{e} \quad \varphi < \varphi_1. \tag{24}$$

8. - Verifica della relazione dispari.

Premesso tutto questo relativamente alla K, poniamo

$$(25) \qquad \gamma(f) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, f - i) A(\varphi_1)\, d\varphi_1\,,$$

indicando con $A(\varphi_1)$ una qualsiasi funzione della variabile reale φ_1, continua al finito e finita anche all'infinito [come sub a)].

Ne rimane ovviamente definita una funzione γ della variabile complessa f, reale sull'asse reale, e regolare *entro* S.

Osservando le (21) e (24), vediamo che la funzione $K(\varphi_1, f - i)$ non si mantiene integrabile rispetto a φ_1 (da $-\infty$ a $+\infty$) anche su $\psi = 1$, in causa del termine addizionale $2\pi i$, che figura nella (24). Si mantiene però integrabile la parte reale, che è il solito nucleo $K(\varphi_1, \varphi)$. Segue di qua che, scindendo nella (25) il reale dall'immaginario, e ponendo in conformità $\gamma = \alpha + i\beta$, si possono dedurre dalla (25) i valori al contorno della β. Basta passare al limite dall'interno della striscia, con che l'integrale del secondo membro si mantiene finito e continuo, porgendo

$$(26) \qquad \beta(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi) A(\varphi_1)\, d\varphi_1\,.$$

Ne risulterà la (I), tostochè si accerti che i valori limiti di α', al convergere di f verso un punto generico φ_0 della retta $\psi = 1$, coincidono coi corrispondenti valori $A(\varphi_0)$.

Deriviamo all'uopo la (25) rispetto ad f, supponendo f *interno* ad S: tutto essendo in tal caso regolare, si possono applicare senza riserve gli algoritmi ordinari del calcolo, e scrivere (avuto riguardo alla monogeneità di K)

$$\frac{d\gamma}{df} = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\varphi} K(\varphi_1, f - i) A(\varphi_1)\, d\varphi_1\,.$$

Scindiamo l'intervallo di integrazione in tre parti: da $-\infty$ a $\varphi_0 - \varepsilon$, da $\varphi_0 - \varepsilon$ a $\varphi_0 + \varepsilon$ e da $\varphi_0 + \varepsilon$ *a* $+\infty$, essendo ε una quantità positiva arbitraria, che ci riserviamo di far rimpicciolire indefinitamente.

Poniamo in conformità

$$(27)\qquad \begin{cases} J_1 = \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi_0-\varepsilon}\frac{\partial K}{\partial\varphi}\,A(\varphi_1)\,d\varphi_1\,, \\[2ex] J_2 = \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{\varphi_0+\varepsilon}^{\infty}\frac{\partial K}{\partial\varphi}\,A(\varphi_1)\,d\varphi_1\,, \end{cases}$$

profittando, per la parte residua

$$\frac{i}{2\pi}\int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon}\frac{\partial K}{\partial\varphi}\,A(\varphi_1)\,d\varphi_1\,,$$

dell'espressione (19′) di K. Ponendo ancora

$$(28)\qquad J = J_1 + J_2 + \frac{i}{2\pi}\int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon}\frac{\partial K^*}{\partial\varphi}\,A(\varphi_1)\,d\varphi_1\,,$$

avremo

$$(29)\qquad \frac{d\gamma}{df} = J - \frac{i}{\pi}\int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon}\frac{\partial \log f^*}{\partial\varphi}\,A(\varphi_1)\,d\varphi_1\,.$$

Nell'intento di far tendere f al punto φ_0 della retta $\psi = 1$, notiamo:

1) che, per ogni valore di φ_1, compreso fra $-\infty$ e $\varphi_0 - \varepsilon$, oppure fra $\varphi_0 + \varepsilon$ e $+\infty$, $K(\varphi_1, f - i)$, ed anche $\partial K(\varphi_1, f - i)/\partial\varphi$ tendono *uniformemente* verso i loro valori limiti forniti dalle (21), (24) e rispettive derivate;

2) che, essendo K^* regolare nell'intorno di $f^* = 0$, anche $\partial K^*/\partial\varphi$ converge *uniformemente*, rispetto ad ogni φ_1 dell'intervallo $\varphi_0 - \varepsilon$, $\varphi_0 + \varepsilon$, verso il valore che gli compete per $f = \varphi_0 + i$, ossia per

$$f^* = \varphi_0 + i - (\varphi_1 + i) = \varphi_0 - \varphi_1\,.$$

Le (21), (24) e (23) mostrano d'altra parte che i valori limiti di $\partial K/\partial\varphi$ e di $\partial K^*/\partial\varphi$ sono puramente reali. Si ha così, rappresentando con $\Re J$ la parte reale di J,

$$(30)\qquad \lim \Re J = 0\,.$$

Notiamo altresì che $\log f^*$ dipende da φ pel tramite della differenza $\varphi - \varphi_1$, e che, ϑ^* essendo l'anomalia del punto generico f [relativa al sistema ausiliario coll'origine in $(\varphi_1, 1)$], la parte reale di $-i \log f^*$ vale precisamente ϑ^*.

Eguagliando le parti reali dei due membri della (29), e scrivendo $\alpha'(\varphi, \psi)$ in luogo di $\partial\alpha(\varphi, \psi)/\partial\varphi$, abbiamo

$$\alpha'(\varphi, \psi) = \Re J - \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \frac{\partial\vartheta^*}{\partial\varphi_1} A(\varphi_1)\, d\varphi_1 ,$$

cui, aggiungendo e togliendo ad $A(\varphi_1)$ la costante $A(\varphi_0)$, e ponendo

$$J_3 = -\frac{1}{\pi}\int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \frac{\partial\vartheta^*}{\partial\varphi_1} \{A(\varphi_1) - A(\varphi_0)\}\, d\varphi_1 , \tag{31}$$

attribuiremo la forma

$$\alpha'(\varphi, \psi) = \Re J + J_3 - \frac{1}{\pi} A(\varphi_0)[\vartheta^*]_{\varphi_1=\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_1=\varphi_0+\varepsilon} . \tag{32}$$

Ora, dato il significato di ϑ^*, finchè f si riferisce ad un punto interno alla striscia, quando φ_1, origine del sistema ausiliario, percorre la retta $\psi = 1$ (da $-\infty$ a $+\infty$), ϑ^* varia, sempre decrescendo, da 0 a $-\pi$. Se dunque si indica con δ il limite superiore di

$$|A(\varphi_1) - A(\varphi_0)| ,$$

per φ_1 compreso fra $\varphi_0 - \varepsilon$ e $\varphi_0 + \varepsilon$, si vede che $|J_3|$ non può superare δ, il quale, a sua volta, per la continuità della A, va a zero con ε.

Per f tendente a $\varphi_0 + i$ si ha manifestamente, qualunque sia la quantità positiva ε,

$$\lim\, [\vartheta^*]_{\varphi_1=\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_1=\varphi_0+\varepsilon} = -\pi ,$$

con che la (32), avuto riguardo alla (30), porge

$$\lim \alpha' = A(\varphi_0) + \lim J_3 .$$

Nè $\lim \alpha'$, nè $A(\varphi_0)$ dipendono da ε. Passando ulteriormente al limite per $\varepsilon = 0$, otteniamo infine

$$\lim \alpha' = A(\varphi_1) . \tag{33}$$

La (26) dà luogo pertanto alla (I), la quale rimane così provata in base all'unica condizione a).

In modo più preciso conviene dire:

Premesso:

1) che esiste al più una funzione armonica β, regolare entro S, dotata (contorno incluso) di limite superiore finito, la quale verifica le due condizioni

$$\frac{\partial \beta}{\partial \psi} = A \quad \text{per } \psi = 1,$$

$$\beta = 0 \quad \text{per } \psi = 0 \, ;$$

2) che, in virtù della (33) e della identità $\partial\beta/\partial\psi = \alpha'$, una tale funzione è il coefficiente di i nella $\gamma(f)$ definita dalla (25);
rimane provato che l'ipotesi a) dà luogo ad una e (a meno di una costante additiva reale) una sola funzione $\gamma(f)$, regolare entro S, reale sull'asse reale, soddisfacente, in causa della (26), alla relazione dispari (I) e tale che rimane finito il termine superiore di β in S (contorno incluso).

9. - Prolungamento analitico della Λ. Verifica della relazione pari.

Con procedimento identico a quello tenuto per K, immaginiamo di introdurre, nella formula (15), che definisce $\Lambda(\varphi_1, \varphi)$, $f - i$ in luogo di φ e conveniamo di attribuire al logaritmo la determinazione reale per $\psi = 1$ e $\varphi > \varphi_1$.

Con tale specificazione, da

$$\text{(34)} \qquad \Lambda(\varphi_1, f - i) = \log \left\{ \frac{e^{(\pi/2)\varphi_1} + e^{-(\pi/2)\varphi_1}}{e^{(\pi/2)[\varphi_1 - (f-i)]} - e^{(-\pi/2)[\varphi_1 - (f-i)]}} \right\}^2 ,$$

rimane definita (per qualsiasi valore reale di φ_1) una funzione di f regolare *entro* la striscia S, la quale, per $\varphi_1 = \pm\infty$, tende verso i limiti $\pm \pi/2(f - i)$. La parte immaginaria di Λ è *costante* sull'asse reale $\psi = 0$.

Sulla parte rimanente ($\varphi < \varphi_1$) della retta $\psi = 1$, i valori limiti di Λ (in quanto raggiunti dall'interno della striscia) non coincidono colla determinazione reale $\Lambda(\varphi_1, \varphi)$, ma, come già avveniva per K, presentano l'incremento costante $2\pi i$.

Ciò premesso, si parta da una generica funzione $B(\varphi_1)$, che verifichi le condizioni sub b) (con che il prodotto ΛB riesce integrabile rispetto a φ_1 da $-\infty$ a $+\infty$, essendo inoltre $\int_{-\infty}^{\infty} B(\varphi_1)\, d\varphi_1 = 0$), e si ponga

$$\text{(35)} \qquad \gamma(f) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\varphi_1, f - i) B(\varphi_1)\, d\varphi_1 + \text{costante reale} .$$

Ripetendo pressochè integralmente le considerazioni del n. precedente, si riconosce che $\gamma(f) = \alpha + i\beta$ è funzione regolare in S, reale sull'asse reale, tale che, per $\psi = 1$,

$$\alpha(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\varphi_1, \varphi) B(\varphi_1)\, d\varphi_1 + \text{cost.}, \tag{36}$$

e ancora

$$\beta(\varphi) = -\int_{\varphi}^{\infty} B(\varphi_1)\, d\varphi_1 , \tag{37}$$

mentre i valori limiti di $\beta'(\varphi)$ (vogliamo dire di $\partial\beta/\partial\varphi$) coincidono con quelli dell'assegnata funzione $B(\varphi)$.

Nel discutere la relazione dispari, l'analoga circostanza concernente α', si dovette verificare direttamente, non derivando dall'ipotesi a) la congenza dell'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} A(\varphi_1)\, d\varphi_1$ e non potendosi perciò trarre dalla (25) una relazione limite per α, analoga alla (37). La coincidenza di β' con B può quindi essere desunta addirittura dalla (37), la quale mostra altresì che

$$\lim_{\varphi_1 = +\infty} \beta(\varphi_1) = 0 .$$

Sostituendo β' a B, la (36) si cambia materialmente nella (II), della quale (nel senso precisato alla fine del n. 8, che conviene, salvo ovvie varianti, anche al caso presente) rimane accertata la legittimità sotto la sola ipotesi b) [2], c. d. d.

---

[2] Si sfruttano effettivamente tutte le condizioni enumerate in detta ipotesi: l'integrabilità della β', perchè si possa intendere, nella (35), sostituita β' alla generica B; l'identità $\int_{-\infty}^{\infty} \beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 = 0$ per poter asserire che la $\gamma(f)$, definita dalla (35) con $B = \beta'$, risulta reale sull'asse reale; l'identità $\lim_{\varphi_1 = +\infty} \beta(\varphi_1) = 0$, affinchè la stessa $\gamma(f)$ verifichi la (37). Le due condizioni

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 = 0 , \quad \lim_{\varphi = +\infty} \beta(\varphi_1) = 0 ,$$

equivalgono manifestamente alle due enunciate sub b) $\lim_{\varphi_1 = \pm\infty} \beta(\varphi_1) = 0$.

10. - La relazione inversa.

Poniamo

$$L(\varphi_1, \varphi) = \log \frac{1}{(1 - e^{-\pi|\varphi_1 - \varphi|})^2}, \tag{38}$$

$$M(\varphi_1, \varphi) = \begin{cases} 2 \log e^{(\pi/2)\varphi}(1 + e^{-\pi\varphi_1}) & \text{per } \varphi_1 > \varphi, \\ 2 \log e^{-(\pi/2)\varphi}(1 + e^{\pi\varphi_1}) & \text{per } \varphi_1 < \varphi, \end{cases} \tag{39}$$

con che $L(\varphi_1, \varphi)$ si annulla esponenzialmente per $\varphi_1 = \pm \infty$, e $M(\varphi_1, \varphi)$ resta continua anche per $\varphi_1 = \varphi$, mentre

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = \begin{cases} \pi & \text{per } \varphi_1 > \varphi, \\ -\pi & \text{per } \varphi_1 < \varphi, \end{cases} \tag{40}$$

presenta una discontinuità.

Si verifica subito che la (15) equivale a

$$\Lambda(\varphi_1, \varphi) = L(\varphi_1, \varphi) + M(\varphi_1, \varphi)$$

e che la (II) può in conformità essere scritta

$$\alpha(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1, \varphi)\beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} M(\varphi_1, \varphi)\beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 + \text{cost.} \tag{41}$$

Introduciamo nei riguardi di $\beta'(\varphi)$ [che già supponiamo soddisfacente alla *b*)] l'ipotesi complementare seguente:

c) esiste la derivata $\beta''(\varphi)$, soddisfacente a sua volta alla *a*);

e profittiamone per la derivazione (rapporto a φ) dell'integrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1, \varphi)\beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 .$$

Assumendo per un momento $\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$ come variabile di integrazione e badando alla (38), esso può essere scritto

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log \frac{1}{(1 + e^{-\pi|\varphi_2|})}\, \beta'(\varphi_2 + \varphi)\, d\varphi_2 .$$

Sotto questa forma, diviene perfettamente legittima la derivazione sotto il segno, in base alla *c*). Se, a derivazione eseguita, si riprende la variabile φ_1, risulta provata l'identità

$$(42)\qquad -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1,\varphi)\beta'(\varphi_1)\,d\varphi_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1,\varphi)\beta''(\varphi_1)\,d\varphi_1\,.$$

L'integrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} M(\varphi_1,\varphi)\beta'(\varphi_1)\,d\varphi_1\,,$$

può essere senz'altro derivato sotto il segno, data l'incondizionata integrabilità di β' fra $-\infty$ e $+\infty$, e l'espressione (40) della $\partial M/\partial\varphi$.

Dacchè si ha, per la *b*),

$$\lim_{\varphi_1=\pm\infty}\beta(\varphi_1) = 0\,,$$

risulta

$$(43)\qquad -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} M(\varphi_1,\varphi)\beta'(\varphi_1)\,d\varphi_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\varphi}\beta'(\varphi_1)\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\varphi}^{\varphi}\beta'(\varphi_1)\,d\varphi_1 = \beta(\varphi)\,.$$

Le (42) e (43) mostrano che il secondo membro della (41) rappresenta una funzione di φ, dotata di derivata finita e continua. Tale proprietà compete di conseguenza anche ad α, e *rimane così provata, sotto l'ipotesi addizionale c), questa conseguenza della relazione pari*:

$$(\text{III})\qquad \alpha'(\varphi) = \beta(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1,\varphi)\beta''(\varphi_1)\,d\varphi_1\,.$$

Essa può manifestamente riguardarsi come risolvente della relazione dispari (I), poichè esprime esplicitamente α' mediante β e β''; le conviene pertanto la qualifica di *relazione inversa*, sotto cui mi propongo di richiamarla in una prossima comunicazione.

Giova fissare l'attenzione sopra la circostanza che la (I) e la (III) sono di necessità equivalenti, tostochè sussistono simultaneamente. Può però accadere che sussista sola la (I) [senza che sia lecito risolverla rispetto ad α' sotto la forma (III)], per essere verificata la *a*), ma non le condizioni più restrittive *b*) e *c*), che assicurano la validità della (III).