XIV.

SULLA ESPRESSIONE DEL RESTO IN UNA OPERAZIONE FUNZIONALE USATA DA LORD RAYLEIGH

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. XX_1 (1911_1), pp. 605-614.

1. – Pongasi, per una generica funzione V della variabile φ,

$$DV = \frac{dV}{d\varphi}, \qquad D^2V = \frac{d^2V}{d\varphi^2}, \text{ ecc.}.$$

Se $\mathfrak{p}(D)$ indica un polinomio in D (a coefficienti costanti)

$$c_0 + c_1D + c_2D^2 + \ldots + c_nD^n,$$

la scrittura

$$\mathfrak{p}(D)V$$

sta manifestamente a rappresentare la somma

$$c_0 + c_1DV + c_2D^2V + \ldots + c_nD^nV.$$

Consideriamo più generalmente una funzione $\mathfrak{p}(D)$ del simbolo D, la quale (trattandovi per un momento D come una effettiva variabile) sia regolare nell'intorno dell'origine, e quindi sviluppabile in una serie di potenze di D (a coefficienti costanti) del tipo $\sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu D^\nu$.

Qualora (in un certo campo) risulti assolutamente convergente la serie

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu D^\nu V,$$

è naturale di porre [1] (per quelle V e in quel campo in cui la convergenza sussiste)

$$\mathfrak{p}(D)V = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, c_{\nu} D^{\nu} V \,.$$

Da tale definizione risulta ovviamente che, se $\mathfrak{p}_1(D)$ e $\mathfrak{p}_2(D)$ sono due operazioni della specie considerata, esse sono altresì permutabili e componibili coll'ordinaria regola di moltiplicazione, tostochè siano soddisfatte debite condizioni di convergenza. Si ha cioè, indicando con $\mathfrak{p}(D)$ il prodotto (nel senso ordinario) delle due funzioni $\mathfrak{p}_1(D)$, $\mathfrak{p}_2(D)$ (del simbolo D),

$$\mathfrak{p}_2(D)\{\mathfrak{p}_1(D)V\} = \mathfrak{p}_1(D)\{\mathfrak{p}_2(D)V\} = \mathfrak{p}(D)V \,.$$

2. – Prendiamo a considerare una funzione $\gamma(f)$ della variabile complessa $f = \varphi + i\psi$, reale sull'asse reale $\psi = 0$, e regolare nella striscia S compresa fra le rette $\psi = \pm 1$ (contorno incluso).

Detta $r(\varphi)$ la funzione reale, cui si riduce γ per $\psi = 0$, potremo dedurne $\gamma(\varphi + i)$ mediante la serie di TAYLOR.

Colle notazioni, testè richiamate, del calcolo funzionale, ciò si traduce nella formula

$$\gamma(\varphi+i) = e^{iD} r \,.$$

Scindendo il reale dall'immaginario, ove α e β designino rispettivamente la parte reale e il coefficiente di i in $\gamma(\varphi + i)$, se ne trae

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \alpha(\varphi) = \cos D\cdot r \,, \\ \beta(\varphi) = \operatorname{sen} D\cdot r \,. \end{cases}$$

Ove si possano ulteriormente applicare le operazioni $\operatorname{tg} D$, $D \cot D$ (che rientrano entrambe nel tipo $\mathfrak{p}(D)$ del n. precedente), abbiamo dalla prima delle (1)

$$\operatorname{tg} D\cdot\alpha = \operatorname{tg} D \cos D\cdot r = \operatorname{sen} D\cdot r \,,$$

e dalla seconda

$$D \cot D\cdot\beta = D \cot D \operatorname{sen} D\cdot r = D \cos D\cdot r \,.$$

---

[1] Cfr. S. PINCHERLE e U. AMALDI, *Le operazioni distributive*, Bologna, Zanichelli, 1901, Cap. VI.

Avendo riguardo alle (1) stesse, vien fatto di eliminare r, e rimane

$$\begin{cases} \operatorname{tg} D\cdot\alpha = \beta\,, \\ D\cot D\cdot\beta = D\alpha\,, \end{cases}$$

che costituiscono, come si vede, due relazioni funzionali tra le funzioni associate α e β (dei punti della retta $\psi = 1$).

Giova mettere in evidenza che si tratta di due relazioni equivalenti, anzi più precisamente una inversa dell'altra, scrivendo α' in luogo di $D\alpha$ e $\operatorname{tg} D/D\cdot\alpha'$ in luogo di $\operatorname{tg} D\cdot\alpha$. Esse assumono così l'aspetto

$$(2)\qquad \begin{cases} \beta = \dfrac{\operatorname{tg} D}{D}\cdot\alpha'\,, \\ \alpha' = D\cot D\cdot\beta\,. \end{cases}$$

Per $\operatorname{tg} D/D$ e $D\cot D$ si devono naturalmente intendere i loro sviluppi in serie di potenze di D, cioè [2]

$$(3)\qquad D\cot D = 1 - 2\,\frac{s_2}{\pi^2}\,D^2 - 2\,\frac{s_4}{\pi^4}\,D^4 - 2\,\frac{s_6}{\pi^6}\,D^6 - \dots$$

$$= 1 - 2\sum_1^\infty{}_\nu\,\frac{s_{2\nu}}{\pi^{2\nu}}\,D^{2\nu}\,,$$

$$(4)\qquad \frac{\operatorname{tg} D}{D} = \frac{D\cot D - 2D\cot 2D}{D^2} = 2\sum_1^\infty{}_\nu\,\frac{s_{2\nu}}{\pi^{2\nu}}\,(2^{2\nu}-1)D^{2\nu-2}$$

$$= 2\sum_0^\infty{}_\nu\,\frac{s_{2\nu+2}}{(\pi/2)^{2\nu+2}}\left(1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right)D^{2\nu}:$$

$s_{2\nu}$ indica la somma delle inverse delle potenze (2ν)-esime dei numeri naturali; in particolare si ha

$$s_2 = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}64\,\dots,\; s_4 = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}08\,\dots,\; s_6 = \frac{\pi^6}{945} = 1{,}01\,\dots,\,\dots\,.$$

3. – La effettiva validità delle (2) [colle espressioni (3) e (4) delle operazioni funzionali $D\cot D$, $\operatorname{tg} D/D$] è vincolata ad ipotesi enormemente restrittive circa la natura della funzione γ. Basta pensare che,

---

(2) Cfr. per es. E. CESÀRO, *Corso di analisi algebrica*, Torino, Bocca, 1894, pp. 481 e 283.

per potere applicare senza riserve ad una γ una operazione

$$\mathfrak{p}(D) = \sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu D^\nu ,$$

conviene introdurre limitazioni del tipo

$$|D^n \gamma| < M\varrho^n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

con M numero finito indipendente da n, e ϱ inferiore al raggio di convergenza della serie $\sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu D^\nu$. Nel caso nostro bisognerebbe prendere $\varrho < \pi/2$, che è il più piccolo dei due raggi di convergenza spettanti alle serie (3), (4).

In quest'ordine di idee, val forse la pena di notare che, per la *trascendenti intere di genere zero*, si ha la limitazione ([3])

$$|D^n \gamma| < M ,$$

corrispondente a $\varrho = 1$.

In base ad essa, le serie $D \cot D \cdot \gamma$, $\operatorname{tg} D/D \cdot \gamma$ convergono assolutamente in tutto il piano f, e ne rimangono rigorosamente dimostrate le (2). Ma la detta categoria di funzioni è press'a poco la sola per cui il risultato sussiste sotto forma di serie.

4. – È invece possibile, ricorrendo alla teoria delle funzioni armoniche e trasformando opportunamente una formula del DINI ([4]), attribuire alle relazioni fra α e β, sulla retta $\psi = 1$, due forme integrali assai più vantaggiose. E precisamente una prima forma, risoluta rispetto a β, che è applicabile in ogni caso (*relazione dispari*), e una seconda, risoluta rispetto ad α' (*relazione inversa*), che richiede (o, meglio, la cui dimostrazione ha richiesto) una ipotesi addizionale circa il comportamento all'infinito della β.

Le due relazioni sono (gli apici designando derivazioni rispetto agli

([3]) Come risulta da un teorema generale di H. POINCARÉ. Veggasi ad es. E. BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, Gauthier-Villars, 1900, p. 56.

([4]) Cfr. le Note: *Trasformazione di una relazione funzionale dovuta al Dini*, pp. 285-296, 381-391 di questi « Rendiconti » (sedute del 5 e 19 marzo u. s.) [in questo vol.: XIII, pp. 163-185].

argomenti indicati)

$$\beta(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi)\alpha'(\varphi_1)\,d\varphi_1\,, \tag{5}$$

$$\alpha'(\varphi) = \beta(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1, \varphi)\beta''(\varphi_1)\,d\varphi_1\,, \tag{6}$$

con

$$K(\varphi_1, \varphi) = \log\left(\frac{e^{(\pi/2)\varphi_1} + e^{(\pi/2)\varphi}}{e^{(\pi/2)\varphi_1} - e^{(\pi/2)\varphi}}\right)^2, \tag{7}$$

$$L(\varphi_1, \varphi) = \log\frac{1}{(1 - e^{-\pi|\varphi_1 - \varphi|})^2}\,. \tag{8}$$

La (5) può ben dirsi valida incondizionatamente, essendo certo soddisfatta [5], ogniqualvolta si sappia che α' è funzione (dei punti della retta $\psi = 1$) continua al finito e finita anche all'infinito.

La (6) è stata stabilita nell'ipotesi che $\beta(\varphi)$, oltre ad ammettere le prime due derivate (continue al finito), tenda ad annullarsi per $\varphi = \pm\infty$: quest'ultima è in sostanza la sola ipotesi restrittiva, potendosi tranquillamente ammettere — almeno nelle applicazioni che abbiamo in vista — che si tratti di funzioni derivabili quante volte occorre, e finite ovunque (anche all'infinito), assieme alle loro derivate.

5. – Scopo della presente Nota è di ricavare dalle richiamate relazioni integrali — (5) e (6) — degli sviluppi differenziali, che contengono rispettivamente quanti si vogliano termini della serie $\operatorname{tg} D/D\cdot\alpha'$, $D\cot D\cdot\beta$, più un resto. È chiaro che l'interesse risiede esclusivamente nell'espressione del resto. Essa ci mostrerà che le serie (2) (pur essendo quasi sempre divergenti, come abbiamo osservato poc'anzi) possono servire utilmente in calcoli approssimativi, quando si limitano a un numero conveniente di termini.

6. – Occupiamoci dapprima della *relazione inversa* (6), che fa riscontro alla seconda delle (2). Sotto questa forma essa fu già rilevata e (in via di approssimazione) genialmente sfruttata da Lord Rayleigh nelle sue ricerche sull'onda solitaria [6].

---

[5] Da una e una sola funzione $\gamma(f)$ regolare entro la striscia S, e tale che la sua parte immaginaria $i\beta$ si mantiene ovunque finita (*contorno incluso*) (cfr. p. 387, seduta del 19 marzo [in questo vol., p. 182]).

[6] *Scientific Papers*, vol. I, Cambridge University Press, 1899, pp. 256-261.

Introduciamo, al posto di φ_1, una nuova variabile di integrazione

$$s = \pi(\varphi_1 - \varphi) .$$

Per essere L funzione pari del solo argomento $\pi(\varphi_1 - \varphi)$, risulta subito

$$(6') \qquad \alpha'(\varphi) = \beta(\varphi) - \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty L(s)\left\{\beta''\left(\varphi - \frac{s}{\pi}\right) + \beta''\left(\varphi + \frac{s}{\pi}\right)\right\} ds ,$$

con

$$(8') \qquad L(s) = \log\frac{1}{(1-e^{-s})^2} .$$

Se si ricorre all'identità

$$(9) \qquad \beta(\varphi + h) = \beta(\varphi) + hD\beta + \frac{h^2}{2}D^2\beta + \dots + \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}D^{2n-1}\beta$$

$$+ \frac{h^{2n}}{(2n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{2n-1}D^{2n}\beta(\varphi + ht)\cdot dt ,$$

e la si applica alla funzione β'' facendovi $h = \pm s/\pi$, si ottiene

$$\beta''\left(\varphi - \frac{s}{\pi}\right) + \beta''\left(\varphi + \frac{s}{\pi}\right) = 2\sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{1}{(2\nu)!}\frac{s^{2\nu}}{\pi^{2\nu}}D^{2\nu+2}\beta$$

$$+ \frac{1}{(2n-1)!}\frac{s^{2n}}{\pi^{2n}}\int_0^1 (1-t)^{2n-1}\left\{D^{2n+2}\beta\left(\varphi + \frac{st}{\pi}\right) + D^{2n+2}\beta\left(\varphi - \frac{st}{\pi}\right)\right\} dt .$$

Procuriamoci il valore degli integrali definiti

$$\int_0^\infty s^{2\nu}\log\frac{1}{1-e^{-s}}\cdot ds , \qquad (\nu \text{ intero positivo}),$$

che è del resto ben noto (7). Lo si calcola partendo dalla formula ele-

(7) Cfr. per es. CH. HERMITE, *Cours d'analyse*, p. 96 della terza edizione, Paris, Hermann, 1887.

mentare

$$\int_0^\infty s^{2\nu} e^{-s} ds = (2\nu)!\,,$$

o, meglio, da questo suo corollario:

$$\int_0^\infty s^{2\nu} e^{-ms} ds = \frac{(2\nu)!}{m^{2\nu+1}},$$

in cui m designa un qualsiasi numero positivo. Si immagini infatti di integrare

$$s^{2\nu} \log \frac{1}{1-e^{-s}}$$

da un ε comunque piccolo a $+\infty$, sostituendo al logaritmo il suo sviluppo in serie di potenze di e^{-s}, e passando poi al limite per $\varepsilon = 0$. Si ha

$$(10) \qquad \int_0^\infty s^{2\nu} \log \frac{1}{1-e^{-s}} \cdot ds = \sum_1^\infty{}_m \frac{1}{m} \int_0^\infty s^{2\nu} e^{-ms} ds$$
$$= (2\nu)! \sum_1^\infty{}_m \frac{1}{m^{2\nu+2}} = (2\nu)!\, s_{2\nu+2}\,.$$

Ciò posto, portiamo l'espressione sopra scritta di

$$\beta''\left(\varphi - \frac{s}{\pi}\right) + \beta''\left(\varphi + \frac{s}{\pi}\right),$$

nel secondo membro della (6'). In virtù delle (10), risulta

$$(6'') \qquad \alpha'(\varphi) = \beta(\varphi) - 2\,\frac{s_2}{\pi^2}\,D^2\beta - 2\,\frac{s_4}{\pi^4}\,D^4\beta - \ldots - 2\,\frac{s_{2n}}{\pi^{2n}}\,D^{2n}\beta - R_{2n}\,,$$

il resto R_{2n} avendo l'espressione

$$(11) \qquad R_{2n} = \frac{1}{(2n-1)!}\,\frac{1}{\pi^{2n+2}}\,.$$
$$\cdot \frac{1}{2}\int_0^\infty s^{2n} L(s)\, ds \int_0^1 (1-t)^{2n-1} \left\{ D^{2n+2}\beta\left(\varphi + \frac{st}{\pi}\right) + D^{2n+2}\beta\left(\varphi - \frac{st}{\pi}\right)\right\} dt\,.$$

La coincidenza dei vari termini dello sviluppo trovato con quelli che sarebbero forniti dalla serie $D \cot D \cdot \beta$ è manifesta: basta confrontare colla (3). Rendiamoci conto dell'ordine di grandezza del resto.

Seguendo una notazione espressiva introdotta dal sig. SCHMIDT, indichiamo con $\overline{\beta}$ il limite superiore dei valori (assoluti) assunti da una generica funzione β nel campo che si considera (sopra la retta $\psi = 1$ nel caso attuale).

$L(s)$ mantenendosi positiva in tutto l'intervallo di integrazione, avremo dalla (11)

$$|R_{2n}| \leqslant \frac{1}{(2n-1)!} \frac{1}{\pi^{2n+2}} \overline{D^{2n+2}\beta} \int_0^\infty s^{2n} L(s)\, ds \int_0^1 (1-t)^{2n-1} dt\,.$$

L'integrale interno vale $1/2n$, quello rispetto ad s [a norma delle (8') e (10)] $2 \cdot (2n)!\, s_{2n+2}$. Si ha pertanto la limitazione

$$(12) \qquad |R_{2n}| \leqslant \frac{2}{\pi^{2n+2}} s_{2n+2} \overline{D^{2n+2}\beta}\,.$$

Dacchè le s_{2n+2} differiscono poco dall'unità (la massima s_2 è $\pi^2/6 = 1{,}64...$), si può dire che l'ordine di grandezza di R_{2n} è dato dalla derivata $(2n+2)$-esima di β, divisa per la corrispondente potenza di π.

In particolare, per $n = 1$, l'errore che si commette sostituendo il secondo membro della (6) con $\beta = \beta''/3$ non può superare

$$2 \frac{s_4}{\pi^4} \overline{\beta^{(IV)}} = \frac{1}{45} \overline{\beta^{(IV)}}\,,$$

cioè poco più di $^2/_{100}$ di $\overline{\beta^{(IV)}}$.

Per $n = 2$, il limite dell'analogo errore è

$$2 \frac{s_6}{\pi^6} \overline{\beta^{(VI)}} = \frac{2}{945} \overline{\beta^{(VI)}}\,.$$

7. – L'approssimazione di Lord RAYLEIGH si è sostanzialmente esplicata riducendo $D \cot D \cdot \beta$ a $\beta - \beta''/3$, con presumibile errore dell'ordine di grandezza della derivata quarta. Come questa sua intuizione fosse corretta è provato dalla precedente espressione del resto. Non sarebbe stato invece possibile valutare direttamente l'ammontare dei termini trascurati

$$2 \sum_2^\infty {}_\nu \frac{s_{2\nu}}{\pi^{2\nu}} D^{2\nu+2}\beta\,,$$

(sostituendovi per β la speciale espressione assegnata da Lord RAYLEIGH come soluzione approssimata del problema idrodinamico), perchè la serie risulta divergente.

8. - Indichiamo, anche per la relazione dispari (5), lo sviluppo per derivate e la forma del resto.

Adottando come variabile di integrazione

$$s = \frac{\pi}{2}(\varphi_1 - \varphi),$$

e notando che $K(\varphi_1, \varphi)$, al pari di L, è funzione pari della sola differenza $\varphi_1 - \varphi$, la (5) stessa può essere scritta

$$(5') \qquad \beta(\varphi) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty K(s)\left\{\alpha'\left(\varphi - \frac{2}{\pi}s\right) + \alpha'\left(\varphi + \frac{2}{\pi}s\right)\right\} ds,$$

con

$$(7') \qquad K(s) = \log\left(\frac{1+e^{-s}}{1-e^{-s}}\right)^2.$$

Con procedimento analogo a quello tenuto per stabilire la (10), si ha

$$\int_0^\infty s^{2\nu}\log(1+e^{-s})\,ds = (2\nu)!\sum_1^\infty{}_m (-1)^{m+1}\frac{1}{m^{2\nu+2}}.$$

Ne deduciamo

$$\int_0^\infty s^{2\nu}K(s)\,ds = 2(2\nu)!\left\{\sum_1^\infty{}_m (-1)^{m+1}\frac{1}{m^{2\nu+2}} + \sum_1^\infty{}_m \frac{1}{m^{2\nu+2}}\right\} = 4(2\nu)!\sum{}'\frac{1}{m^{2\nu+2}},$$

$\sum'$ indicando una somma estesa ai soli numeri dispari. Se si introduce per un momento anche la somma complementare $\sum'' 1/m^{2\nu+2}$, estesa ai soli numeri pari, si hanno manifestamente le identità

$$\sum{}'\frac{1}{m^{2\nu+2}} + \sum{}''\frac{1}{m^{2\nu+2}} = s_{2\nu+2},$$

$$\sum{}''\frac{1}{m^{2\nu+2}} = \frac{1}{2^{2\nu+2}}s_{2\nu+2},$$

da cui

$$\sum' \frac{1}{m^{2\nu+2}} = \left\{1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right\} s_{2\nu+2}\,.$$

Risulta così

$$\int_0^\infty K(s) s^{2\nu}\, ds = 4(2\nu)!\left\{1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right\} s_{2\nu+2}\,. \tag{13}$$

Dalla (9), sostituendovi α' in luogo di β, e $\pm s/(\pi/2)$ in luogo di h, si ricava

$$\alpha'\left(\varphi - \frac{2}{\pi}s\right) + \alpha'\left(\varphi + \frac{2}{\pi}s\right) = 2\sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{1}{(2\nu)!}\,\frac{s^{2\nu}}{(\pi/2)^{2\nu}}\, D^{2\nu+1}\alpha$$

$$+ \frac{1}{(2n-1)!}\,\frac{s^{2n}}{(\pi/2)^{2n}}\int_0^1 (1-t)^{2n-1}\left\{D^{2n-1}\alpha\left(\varphi + \frac{2st}{\pi}\right) + D^{2n+1}\alpha\left(\varphi - \frac{2st}{\pi}\right)\right\} dt\,,$$

con che la (5′), tenuto conto della (13), e posto

$$R^*_{2n} = \frac{1}{4(2n-1)!}\,\frac{1}{(\pi/2)^{2n+2}}\cdot \tag{14}$$

$$\cdot\int_0^\infty s^{2n}K(s)\, ds\int_0^1 (1-t)^{2n-1}\left\{D^{2n+1}\alpha\left(\varphi + \frac{2st}{\pi}\right)\right\} + D^{2n+1}\alpha\left(\varphi - \frac{2st}{\pi}\right)\right\} dt\,,$$

assume la forma

$$\beta(\varphi) = 2\sum_0^\infty{}_\nu \frac{s_{2\nu+2}}{(\pi/2)^{2\nu+2}}\left\{1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right\} D^{2\nu}\alpha' + R^*_{2n}\,. \tag{5″}$$

I primi n termini coincidono con quelli dello sviluppo di $\operatorname{tg} D/D\cdot\alpha'$, come apparisce dalla (4). Quanto al resto, per essere $K(s)$ essenzialmente positiva, si ha

$$|R^*_{2n}| \leqslant \frac{1}{2(2n-1)!}\,\frac{1}{(\pi/2)^{2n+2}}\,\overline{D^{2n+1}\alpha}\int_0^\infty s^{2n}K(s)\, ds\int_0^1 (1-t)^{2n-1}\, dt\,,$$

donde, eseguendo le quadrature e badando alla (13),

$$(15) \qquad |R^*_{2n}| \leqslant \frac{2}{(\pi/2)^{2n+2}} s_{2n+2} \left\{1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right\} \overline{D^{2n+1}\alpha} \, .$$

Siccome

$$s_{2n+2} \left\{1 - \frac{1}{2^{2n+2}}\right\},$$

tende ad 1 al crescere di n (differendone in ogni caso ben poco), si può dire che l'ordine di grandezza di R^*_{2n} è quello della derivata $(2n+1)$-esima di α divisa per la corrispondente potenza di $\pi/2$. La limitazione è un po' meno vantaggiosa di quella trovata per l'analogo resto della relazione inversa: in quel caso si hanno a denominatore potenze di π, in questo soltanto potenze di $\pi/2$.

Mostrerò in una prossima comunicazione come effettivamente si applichino le equazioni integrali (5), (6) alla teoria delle onde di canale, e in particolare all'onda solitaria, conducendo, per quest'ultima, ad una approssimazione maggiore di quella raggiunta da Lord Rayleigh e, con diverso procedimento, da Boussinesq.