XV.

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN CORPUSCULE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE ET UN CHAMP ÉLECTRIQUE SUPERPOSÉS

extrait d'une lettre

de Mr. T. Levi-Civita à Mr. Carl Størmer

« Archiv for Mathematatik og Naturvidenskab » B. XXXI. Nr. 12, pp. 3-7.

Je saisis l'occasion pour vous faire part d'une petite remarque, qui m'a été suggérée par vos intéressantes recherches sur le mouvement des corpuscules (1).

Les équations qui régissent ce mouvement sont

$$(1)\qquad \begin{cases} m\ddot{x} = -\,\varepsilon\,\dfrac{\partial V}{\partial x} + \varepsilon(Y\dot{z} - Z\dot{y})\,, \\[2ex] m\ddot{y} = -\,\varepsilon\,\dfrac{\partial V}{dy} + \varepsilon(Z\dot{x} - X\dot{z})\,, \\[2ex] m\ddot{z} = -\,\varepsilon\,\dfrac{\partial V}{\partial z} + \varepsilon(X\dot{y} - Y\dot{x})\,, \end{cases}$$

où les points désignent des dérivées par rapport au temps t; m, ε des constantes; V, X, Y, Z des fonctions (uniformes) des coordonnés x, y, z, les trois dernières étant liées par l'identité

$$(2)\qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0\,.$$

(1) Voir « Comptes Rendus », 12 et 29 Septembre 1910.

Les équations (1) admettent l'intégrale des forces vives

$$T + \varepsilon V = h \qquad (h \text{ constante}), \tag{3}$$

ayant posé comme d'habitude

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{4}$$

Vous vous êtes servi de l'intégrale des forces vives pour éliminer le temps t, ce qui vous a d'abord amené à faire ressortir les équations des trajectoires d'une formule intégrale analogue au principe de la moindre action. Vous en avez ensuite déduit un système de forme canonique (avec t pour variable indépendente) entièrement équivalent à (1), et équivalent à son tour à un autre système provenant de la variation d'une certaine intégrale.

Ce dernier résultat peut s'établir plus directement, en partant de la forme générale du principe de HAMILTON [2], laquelle s'applique même à des forces dépendant de la vitesse, et par consequent aussi aux équations (1).

Voilà le point sur lequel je désire attirer pour un moment votre attention bienveillante: les propositions, qui vous ont servi d'intermédiaire, en résultent comme corollaires bien connus.

Je désignerai par U' (suivant la notation de Kirchhoff) le travail virtuel. C'est ici le travail de la force totale sollicitant le corpuscule, pour un déplacement infiniment petit (tout à fait arbitraire) de composantes δx, δy, δz. Il vient d'après (1)

$$U' = -\varepsilon \delta V + \varepsilon \frac{\Delta}{dt}, \tag{5}$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dx & dy & dz \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix}, \tag{6}$$

est une forme bilinéaire par rapport à dx, dy, dz; δx, δy, δz, et δV représente la variation subie par V dans le déplacement virtuel envisagé.

---

[2] Voir par exemple P. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, t. II, n. 483, pp. 422-423 de la deuxième édition (1904).

Le principe d'HAMILTON résume les équations du mouvement, pour un intervalle de temps quelconque (t_0, t_1), dans la formule

$$\int_{t_0}^{t_1} (U' + \delta T)\, dt = 0\,, \tag{7}$$

où la signification de δT est évidente, et les déplacements virtuels sont seulement assujettis à s'annuler pour les instants t_0, t_1.

Ceci rappelé, il y a lieu de faire intervenir la condition (2) [exprimant que la divergence du champ magnétique extérieur est nulle]. Elle autorise (d'après un théorème de JACOBI) les positions

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\,, \\ Y &= \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\,, \\ Z &= \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\,, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

A, B, C étant trois nouvelles fonctions (uniformes) du point (x, y, z) (³).

Posons encore

$$\begin{aligned} f_d &= A\,dx + B\,dy + C\,dz\,, \\ f_\delta &= A\,\delta x + B\,\delta y + C\,\delta z\,, \\ f &= A\dot{x} + B\dot{y} + C\dot{z} = \frac{f_d}{dt}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

En tenant compte de (6), (8) [et de ce qu'on peut intervertir les opérateurs d et δ], on a identiquement

$$\Delta = df_\delta - \delta f_d = df_\delta - dt\cdot\delta f\,,$$

d'où

$$U' = -\varepsilon\,\delta V + \varepsilon\frac{df}{dt_\delta} - \varepsilon\,\delta f = -\,\delta[\varepsilon(V + f)] + \frac{d}{dt}(\varepsilon f_\delta)\,.$$

(³) Voir par exemple P. APPELL, loco cit., t. III (deuxième édition 1909), pp. 20-24. Au point de vue de la théorie des champs de vecteurs, la conclusion indiquée revient évidemment à la suivante: La force magnétique (X, Y, Z) étant solénoïdale, il existe un vecteur (A, B, C) [fonction des points du champs] dont elle est le rot (*rotationnel* d'après M. M. BURALI-FORTI et MARCOLONGO; *curl* des anglais).

Introduisons cette valeur de U' dans l'expression (7) du principe de HAMILTON. Puisque f_δ s'annule aux limites t_0, t_1, il reste simplement

$$\int_{t_0}^{t_1} \{\delta T - \delta[\varepsilon(V + f)]\}\, dt = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0 , \tag{7'}$$

ayant posé pour abréger

$$L = T - \varepsilon(V + f) = T - \varepsilon(V + A\dot{x} + B\dot{y} + C\dot{z}) . \tag{10}$$

On en tire les équations de LAGRANGE

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 , \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 , \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 , \end{aligned}\right. \tag{1'}$$

parfaitement équivalentes aux (1) [qu'on pourrait retrouver en remontant de (1'), à travers (7') et (7)]. Voilà le dernier de vos théorèmes généraux.

Ces équations (1') admettent l'intégrale bien connue

$$\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \text{const.} ,$$

qui revient à l'équation (3) des forces vives. A l'aide de cette équation on peut éliminer le temps de (7'): il en résulte la définition des trajectoires par une généralisation du principe de la moindre action. C'est votre premier résultat. Le second, c'est-à-dire la forme canonique des équations du mouvement, s'obtient immédiatement en appliquant aux équations de LAGRANGE (1') la transformation classique d'HAMILTON.

On doit poser

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} , \qquad q = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} , \qquad r = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} , \tag{11}$$

$$H = p\dot{x} + q\dot{y} + r - L\dot{z} , \tag{12}$$

après quoi H (exprimée moyennant les variables $x, y, z; p, q, r$) constitue la fonction caractéristique du système canonique cherché.

D'après (10), (4) et (9), les équations (11) s'écrivent

$$p = m\dot{x} - \varepsilon A \,, \quad q = m\dot{y} - \varepsilon B \,, \quad r = m\dot{z} - \varepsilon C \,; \tag{11'}$$

d'où

$$p\dot{x} + q\dot{y} + r\dot{z} = 2T - \varepsilon f \,,$$

et par conséquent

$$H = T - \varepsilon V \,. \tag{12'}$$

Il ne reste donc qu'à remplacer, dans T, les $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ par leurs valeurs tirées de (11'), pour avoir H sous sa forme définitive:

$$H = \frac{1}{2m}\{(p + \varepsilon A)^2 + (q + \varepsilon B)^2 + (r + \varepsilon C)^2\} - \varepsilon V \,. \tag{12''}$$

. . . .

Agréez etc.

Padoue, le 18 Juin 1911.