XVII.

SULLO SPOSTAMENTO DELL'EQUILIBRIO

« Atti Ist. Ven. », s. 7ª, t. LXXI (1911-12), parte 2ª,

pp. 241-249.

Si devono a Lord RAYLEIGH (¹) risultati generali (la cui importanza si palesa anche in applicazioni termodinamiche (²)) sull'equilibrio dei sistemi materiali in prossimità di uno stato di minima energia interna. Questi risultati sono stati dedotti dal principio dei lavori virtuali con trasformazioni algebriche di immediata evidenza, nell'ipotesi che le espressioni analitiche dell'energia interna del sistema, dei suoi vincoli, e del campo di forza esterno sieno le più semplici possibili.

In generale, espressioni di questo tipo valgono, approssimativamente se non esattamente, entro un intorno abbastanza piccolo dello stato di minima energia (con approssimazione tanto maggiore quanto più piccolo è l'intorno considerato). Ciò posto, si potrebbe ragionevolmente aspettarsi che le conclusioni qualitative del RAYLEIGH seguitassero senz'altro a sussistere, in un intorno conveniente, per ragione di continuità. In realtà le cose non stanno a questo modo, ed è facile persuadersene con esempi elementari (cfr. n. 5 della presente nota). Ma è pur semplice esaurire la questione: basta impostarla fin da principio con generalità analitica e precisare la portata delle considerazioni di continuità.

Si riconosce così che l'influenza dei termini non contemplati nelle espressioni tipiche è addirittura nulla per quanto concerne l'energia interna; è praticamente poco importante nei riguardi del campo esterno; assume invece carattere essenziale ove provenga dai vincoli.

(¹) *General theorems relating to equilibrium and initial and steady motion*, « Philosophical Magazine », vol. XLIX, 1875, pp. 218-224; ovvero « Scientific papers », vol. I (Cambridge, University Press, 1899), pp. 232-237.

(²) Cfr. per es. P. DUHEM, *Traité d'énergétique*, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1911), cap. XI.

1. - Richiami di calcolo sul comportamento di una funzione Ω in prossimità di un minimo effettivo.

Indichino $x_1, x_2, ..., x_n$ variabili indipendenti, e si adotti il solito linguaggio iperspaziale, chiamando punto un insieme di valori attribuiti alle variabili, origine il punto $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$; ecc.

Sia $\Omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ funzione finita e continua assieme alle sue derivate dei primi due ordini, almeno in un intorno dell'origine, al quale intendiamo limitate le nostre considerazioni.

Supponiamo che Ω ammetta nell'origine un minimo effettivo e che l'esistenza del minimo si riconosca dal differenziale secondo, ossia che risulti definita e positiva la forma quadratica A_0, che ha per coefficienti le derivate seconde della Ω nel punto di minimo $x_i = 0$.

Rappresentiamo con A la forma analoga, in cui i coefficienti si riferiscano ad altro generico punto x_i; e ricordiamo che l'essere definita è per una forma carattere qualitativo, assicurato da certe disuguaglianze fra i coefficienti. Se, per una certa determinazione di questi, le disuguaglianze sono verificate, esse seguiteranno ad esserlo, quando i coefficienti si facciano variare abbastanza poco.

Ne viene che la quadrica A si conserva definita in un conveniente intorno dell'origine.

2. - Considerazione di altra funzione U a gradiente lentamente variabile.

Si designi con $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ una funzione qualsivoglia delle x, sottoposta alla sola condizione che le sue derivate seconde siano, in un intorno dell'origine, *abbastanza piccole* in valore assoluto. Si formi la quadrica B, che ha per coefficienti queste derivate seconde. Anche la forma $A - B$ risulterà, al pari di A, definita e positiva in un intorno non nullo dell'origine, che chiameremo I. Si intende che la condizione imposta alle derivate seconde di U, di essere in valore assoluto abbastanza piccole, andrebbe specificata nel senso di non superare certi limiti (dipendenti dalla Ω).

A noi basta ritenere la circostanza che, fissate una volta, sotto debite restrizioni, Ω ed U, l'intorno I esiste certamente.

Aggiungo, a giustificazione del titolo del presente n., che supporre piccole le derivate seconde di U equivale a supporre lentamente variabili le derivate prime, le quali complessivamente definiscono il gradiente della funzione.

3. - Problema statico e sua classica risoluzione in base al principio dei lavori virtuali.

Interpretiamo Ω come energia interna di un sistema materiale S, il cui stato sia definito dalle variabili $x_1, x_2, ..., x_n$: l'ennupla $x_i = 0$ viene così a individuare lo stato di minima energia interna o *stato naturale* C_0.

Supponiamo che un tale sistema S si trovi soggetto a vincoli olonomi del tipo

$$f_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, ..., l;\ l < n), \tag{1}$$

le f essendo funzioni indipendenti, finite e continue, assieme alle derivate prime e seconde, nell'intorno I.

Sia poi S sollecitato da forze esterne conservative di potenziale U, con che $\partial U / \partial x_i$ rappresenterà la componente delle forze esterne secondo la coordinata generale x_i. La considerazione di questa sollecitazione esterna rende espressiva l'ipotesi del n. precedente (concernente le derivate seconde di U), mostrandone il significato meccanico, che è il seguente: Il campo di forza, in cui si suppone immerso il sistema S, è *pressochè uniforme* (componenti $\partial U / \partial x_i$ lentamente variabili), almeno in prossimità dello stato naturale C_0.

Per caratterizzare l'equilibrio del sistema nelle indicate condizioni, basta naturalmente ricorrere al principio dei lavori virtuali, secondo cui il differenziale primo di $\Omega - U$,

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} \delta x_i ,$$

deve annullarsi per ogni spostamento δx_i compatibile coi legami (1).

Introducendo i moltiplicatori di LAGRANGE, si hanno le n equazioni

$$\frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0 , \qquad (i = 1, 2, ..., n) , \tag{2}$$

dalle quali (formandone sistema colle (1) ed eliminandone le ausiliarie λ) vanno ricavati i valori delle x_i. Queste definiscono la configurazione di equilibrio C, sempreché la risoluzione delle (1), (2) sia effettivamente possibile.

Supporremo che sia così, anzi che la configurazione C cada ancora nell'intorno I.

Ove si noti che, mancando i vincoli e il campo esterno, C si identifica collo stato C_0 di minima energia, e che d'altra parte si può (in generale anzi, attese le introdotte restrizioni, si deve) limitarsi ad un intorno convenientemente circoscritto di questo stato, appare perfettamente naturale di rappresentarsi l'equilibrio in C come un fenomeno di *spostamento dell'equilibrio* (da C_0 a C), lo spostamento essendo dovuto alla duplice circostanza che si impongono dei vincoli (olonomi) e si fanno agire delle forze conservative: senza escludere beninteso che, in casi particolari, intervenga una sola delle due influenze perturbatrici.

4. - Stabilità dell'equilibrio spostato. Caso di vincoli lineari.

Affinchè l'equilibrio in C [definito dalle (1), (2)] sia anche stabile, basta notoriamente che la funzione $\Omega - T$ abbia in C un minimo effettivo rispetto alle altre configurazioni consentite dai vincoli; e ciò è assicurato ove risulti essenzialmente positivo il differenziale secondo di $\Omega - U$, calcolato con riguardo alle (1).

Formiamolo materialmente, differenziando una seconda volta

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} \delta x_i ,$$

e tenendo conto che non si può porre senz'altro $\delta^2 x_i = 0$, perché le x_i vanno trattate come variabili (non completamente indipendenti, ma) legate dalle (1).

Risulta ovviamente

$$\delta^2(\Omega - U) = A - B + \sum_1^n {}_i \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} \delta^2 x_i ,$$

la forma quadratica $A - B$ [nn. 1 e 2] avendo per argomenti gli incrementi δx_i, e per coefficienti le derivate seconde di $\Omega - U$ relative alla configurazione C.

Chiamiamo α il termine addizionale

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} \delta^2 x_i ,$$

proveniente dai legami, e scriviamo in conformità

$$\delta^2(\Omega - U) = A - B + \alpha .$$

Immaginando eliminate, a mezzo delle l equazioni dei vincoli, altrettante x (o, più generalmente, espresse tutte le x a mezzo di $n - l = \nu$ parametri lagrangiani $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$), A, B ed α divengono forme quadratiche di $n - l$ argomenti (le δx rimaste indipendenti, oppure gli incrementi arbitrari $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_\nu$).

Dacchè $A - B$, considerata come forma ennaria nelle δx, è essenzialmente positiva, tale rimane anche riducendo comunque il grado di libertà. Nulla invece può dirsi a priori pel termine addizionale α. Un'ovvia osservazione si presenta tuttavia, ed è che α si annulla ove sia ogni $\delta^2 x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ciò avviene in particolare se i vincoli (1) sono rappresentati da equazioni lineari (anche non omogenee) nelle x.

Infatti, quando le $f_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, l)$ sono lineari, tali riescono anche le espressioni risolute di l delle x, in termini delle rimanenti $n - l$.

Attesa la linearità di queste espressioni, rispetto a variabili tutte indipendenti, i loro differenziali secondi sono identicamente nulli. Si annullano pertanto anche i differenziali secondi di quelle l variabili x, che si considerano funzioni delle altre; c. d. d.

Ne consegue la stabilità dell'equilibrio spostato, in ogni campo di forza quasi uniforme e di fronte a vincoli lineari.

5. - Esempio.

Il sistema S sia costituito da un unico punto materiale P, posto in un piano x, y, e dotato di energia (elastica, ad es.) di richiamo verso l'origine O delle coordinate, espressa da

$$\Omega = \frac{\mu}{2}(x^2 + y^2),$$

designando μ una costante positiva.

Le cose vanno manifestamente come se P fosse attratto da O con forza proporzionale alla distanza $\overline{OP}$.

In assenza di vincoli e d'altre forze, O è posizione d'equilibrio stabile.

Consideriamo uno spostamento dell'equilibrio, limitandoci per semplicità al caso in cui, senza far agire forze esterne ($U =$ cost.), si introduce un vincolo.

Si tratti dapprima di vincolo lineare. Sia cioè P costretto a rimanere sopra una retta. Il piede M della perpendicolare abbassata da O sulla retta costituisce evidentemente la nuova posizione di equilibrio. Siccome, di tutti i punti della retta, M è il più vicino ad O, la Ω assume ivi il valore minimo rispetto a tutte le posizioni consentite dai vincoli, e l'equilibrio è ancora stabile.

Passiamo al caso generale, in cui si costringa P a rimanere sopra una linea L diversa da una retta. L'equilibrio può benissimo divenire instabile.

Per rendercene conto in modo intuitivo, cominciamo col fissare a piacimento un punto M (distinto da O), e, detta γ la circonferenza di centro O passante per M, una curva L tangente a γ in M. Supponiamo — al solo scopo di abbreviare la discussione — che il raggio di curvatura di L in M sia diverso da $\overline{OM}$. Questo permette di affermare che, nell'immediata prossimità di M, la L sarà o tutta esterna, o tutta interna a γ.

Nella prima eventualità, l'equilibrio vincolato seguita manifestamente ad essere stabile (come nel caso della retta); è invece instabile nella seconda, e ciò anche rendendo infinitamente piccolo lo spostamento, scegliendo cioè M vicino quanto si voglia ad O.

Analoghe conclusioni possono, pur semplicemente, conseguirsi per via analitica, riattaccandosi al criterio generale richiamato nel n. precedente.

Immaginiamo che l'equazione del vincolo esprima y come funzione di x (regolare nell'intorno dell'origine) sotto la forma

$$y = a + bx + cx^2 + \dots , \tag{3}$$

$a, b, c, \dots$ designando altrettante costanti.

Se ne trae

$$\delta y \;= \{b + 2cx + \dots\}\, \delta x ,$$

$$\delta^2 y = \{2c + \dots\}\, \delta x^2 ,$$

i termini omessi contenendo almeno x^2 a fattore nell'espressione di δy, e quindi almeno x nell'espressione di $\delta^2 y$.

La quadrica da prendersi in considerazione è quindi:

$$\delta^2 \Omega = \mu\{\delta x^2 + \delta y^2\} + \mu y\, \delta^2 y = \{1 + b^2 + 2ac + \dots\}\, \delta x^2 ,$$

la parte non esplicitata contenendo x a fattore.

Ritenuto pertanto che lo spostamento dell'equilibrio sia abbastanza piccolo (ciò che si riverbera in particolare nell'ascissa x della nuova posizione di equilibrio), discriminante della stabilità è il segno del trinomio $1 + b^2 + 2ac$. Per un vincolo lineare, c è zero e si ha quindi stabilità qualunque sia il valore di a (nonchè quello di b). In generale invece, per quanto sia piccolo a, cioè per quanto la curva (3) passi vicino all'origine, si possono sempre attribuire a c valori tali che il trinomio suddetto risulti negativo; ecc.

6. - Il secondo teorema di Rayleigh.

Tornando ad un sistema S generico, supponiamo che i vincoli che gli sono imposti consistano nell'essere assegnate talune delle x, $x_1, x_2, \ldots, x_l$ per es.; ciò che si può esprimere dicendo che sono assegnati l degli spostamenti che fanno passare dalla configurazione naturale C_0 a quella che sarà la nuova configurazione di equilibrio. Si ha qui manifestamente un caso particolare di vincoli lineari (in generale non omogenei).

Supponiamo ancora che non agiscano forze esterne.

Potremo asserire (n. 4) che $\Omega - U$ e quindi (per essere U costante) *l'energia interna Ω ha, nella configurazione C, in cui per effetto dei vincoli si stabilisce l'equilibrio, un minimo, di fronte a tutte le altre configurazioni consentite dai vincoli stessi, cioè, nel caso attuale, dagli l spostamenti prescritti.*

7. - Il primo teorema.

Esso contempla sistemi la cui energia interna Ω abbia l'espressione tipica di forma quadratica nelle x (a coefficienti costanti), e i cui vincoli siano lineari ed *omogenei*; le forze esterne essendo inoltre costanti (campo rigorosamente uniforme), il che permette di supporre anche U funzione lineare ed *omogenea* delle x.

In questo caso le limitazioni qualitative (di cui ai nn. 1 e 2) sono senz'altro verificate per valori qualisivogliano delle x, ossia l'intorno I dell'origine comprende tutto lo spazio. Si ha poi dalle (2), moltiplicandole ordinatamente per x_i (si intende le x_i della configurazione C di equilibrio), sommando e avendo riguardo al teorema di Eulero sulle funzioni omogenee,

$$2\Omega - U + \sum_1^i{}_k \lambda_k f_k = 0 .$$

In virtù delle (1), rimane

$$2\Omega - U = 0 ,$$

o, se si vuole,

$$\Omega - U = -\Omega . \tag{4}$$

Quest'ultima relazione, verificata in C, lo sarebbe ad egual titolo in ogni altra configurazione $\overline{C}$, in cui si stabilisse l'equilibrio, aumentando i vincoli (purché sempre lineari ed omogenei), e lasciando inalterata la sollecitazione esterna.

D'altra parte (n. 4) la $\Omega - U$ ha in C un minimo di fronte a tutte le altre configurazioni consentite dai vincoli originari (1), e quindi, *a fortiori*, di fronte a tutte le $\overline{C}$. Ma in una qualsiasi $\overline{C}$ sussiste la (4). Il minimo di $\Omega - U$ (rispetto alle varie $\overline{C}$) si traduce quindi in un massimo di Ω, donde l'enunciato: Nelle supposte condizioni, *la configurazione di equilibrio spostato C rende massima l'energia interna Ω rispetto ai valori che essa energia assumerebbe in ogni nuovo stato di equilibrio $\overline{C}$ conseguente all'introduzione di ulteriori vincoli* (lineari ed omogenei).