XX.

SULLA CONTINUAZIONE ANALITICA

« Atti Acc. di Scienze, lettere ed arti di Padova », vol. XXVIII (1912), pp. 61-63.

Il principio della riflessione analitica, dovuto a SCHWARZ (¹), si suol stabilire (²) ricorrendo a qualcuna delle rappresentazioni formali, ammesse dalle funzioni di variabili complessa, ovvero dalle funzioni armoniche. Il principio stesso si può però ricavare anche più semplicemente come immediato corollario di una proposizione generale del compianto MORERA (³). Mi permetto di comunicare all'Accademia questa mia osservazione, sorta da una lezione introduttiva alla teoria delle onde di canale.

1. – Designino: A un'area piana; l una linea di A, che la separi in due regioni A' ed A''; z l'affissa di un punto generico di A.

Siano w' e w'' due funzioni della variabile complessa z, rispettivamente definite in A' e in A'', e regolari nei punti interni.

Si sappia altresì che w' e w'' rimangono finite e si riattaccano con continuità lungo l.

Dico che, in queste condizioni, si ha vera e propria continuazione analitica, cioè che, ponendo

$$(1) \qquad \begin{cases} w = w', \text{ entro } A' \text{ (e su } l); \\ w = w'', \text{ entro } A'' \text{ (e su } l), \end{cases}$$

la w risulta funzione regolare di z in tutto il campo A.

(¹) « Ges. Abhandlungen », B. II, p. 65.

(²) Veggasi ad es. oltre alla memoria originale di SCHWARZ:
DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, pp. 174-175.
PICARD, *Traité d'analyse*, t. II (seconda edizione), p. 299.
OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, B. I, pp. 580-581.

(³) *Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di variabile complessa*, « Rend. del R. Istituto Lombardo », ser. II, vol. XIX, 1886, pp. 304-307; oppure: OSGOOD, loc. cit., pp. 256-257.

Per la dimostrazione mi varrò del teorema di MORERA, a norma del quale basta provare che si annulla l'integrale

$$\int w(z)\,dz\,,$$

esteso ad una qualsiasi linea chiusa s del campo.

Ora, se il campo σ racchiuso da s è tutto contenuto in una delle due regioni, A' ovvero A'', l'annullarsi di $\int_s w\,dz$ è conseguenza necessaria della regolarità di w' entro A', o rispettivamente di w'' entro A''. Se invece una parte σ' di σ giace in A' e la parte rimanente σ'' in A'', conviene designare con s' ed s'' le corrispondenti porzioni del contorno s, con λ la porzione di l, che giace entro σ, e notare che il contorno completo di σ' è costituito da $s'+\lambda$, mentre quello di σ'' risulta da s'' e dalla stessa λ.

Dopo ciò, attesa la (1) e la continuità di w anche attraverso λ, è lecito scrivere

$$\int_s w\,dz = \int_{s'+\lambda} w'\,dz + \int_{s''+\lambda} w''\,dz\,,$$

i due integrali addizionali estesi a λ avendo somma nulla, semprechè, ben si intende, ciascuno dei due cammini chiusi $s'+\lambda$, $s''+\lambda$ si supponga percorso nel senso originariamente assunto su s.

Dacchè w' è regolare e rimane finita anche su l, si annulla il primo integrale del secondo membro. Per analoga ragione si annulla il secondo. Si conclude pertanto

$$\int_s w\,dz = 0\,,$$

qualunque sia la linea chiusa s di A, c. d. d.

2. – Supponiamo in particolare che l sia un segmento rettilineo e che sia data soltanto la regione A', tutta da una banda di l, nonchè una funzione w', che assume su l valori reali.

Prendiamo come A'' la regione simmetrica di A' rispetto ad l, e definiamo una funzione w'' dei punti di A'', deducendola per riflessione da w', convenendo cioè che a punti simmetrici rispetto ad l corrispondano valori coniugati.

La funzione così definita è manifestamente monogena e regolare in A'' e si riattacca con continuità a w' nei punti di l.

Questo basta, per quanto precede, ad assicurare che w' e w'' costituiscono un'unica funzione analitica: ecco il risultato di SCHWARZ, che ha trovato in più campi applicazioni cospicue.