

## SULLA GRAVITAZIONE DI UN TUBO SOTTILE CON APPLICAZIONE ALL'ANELLO DI SATURNO

« Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. XXXII (1° sem. 1912),

pp. 354-374.

Mi occupai alcuni anni or sono <sup>(1)</sup> dell'attrazione newtoniana di un tubo sottile, ed assegnai (sfruttando in modo essenziale la piccolezza delle dimensioni trasversali di fronte alla lunghezza del tubo) la risultante delle attrazioni che una fetta elementare subisce da parte di tutte le altre. L'espressione di questa risultante è notevolmente semplice, e dipende esclusivamente dall'andamento generale del tubo nell'immediata prossimità della fetta considerata. Il calcolo diretto con cui vi pervenni è per altro abbastanza laborioso, e si appoggia sopra una *preliminare indagine asintotica dell'attrazione esercitata da una linea materiale in punti vicinissimi ad essa* <sup>(2)</sup>. Data la semplicità del risultato, era da aspettarsi che lo si potesse pur stabilire per via più spedita. Una tale via è effettivamente offerta dalla considerazione dell'autopotenziale newtoniano  $\Omega$  del tubo. Tostochè lo si valuti con riguardo all'esiguità dello spessore (e per ciò basta invocare nozioni elementari di teoria del potenziale), la corrispondente variazione  $\delta\Omega$  porta a caratterizzare, col minimo sforzo concettuale e formale, l'accennata attrazione sopra una fetta elementare. Nel medesimo tempo si rileva che, accanto a queste forze di massa, si destano, per effetto della mutua attrazione, degli sforzi superficiali sopra il contorno del tubo; più precisamente sforzi normali, la cui intensità dipende dalla forma geometrica delle sezioni trasversali.

Di ciò la prima parte della presente Memoria (nn. 1-6). La seconda ne è, si può dire, il naturale corollario nell'ambito della statica.

<sup>(1)</sup> T. LEVI-CIVITA, *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XVII, 2° semestre 1908, pp. 413-426, 535-551 [in questo vol.: IV, pp. 35-68].

<sup>(2)</sup> T. LEVI-CIVITA, *Sull'attrazione esercitata da una linea materiale in punti prossimi alla linea stessa*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XVII, 2° semestre 1908, pp. 3-15 [in questo vol.: III, pp. 19-33].



E invero, approfondito lo studio del  $\delta\Omega$ , basta ricorrere al principio dei lavori virtuali, e si ha quanto occorre per impostare nella forma più conveniente una ben determinata categoria di problemi d'equilibrio: quella in cui da un lato si deve tener conto dell'influenza gravitazionale della materia costituente il tubo, ma d'altra parte si può ritenere trascurabile lo spessore rispetto allo sviluppo longitudinale. Si formano così (nn. 7-9) le esplicite equazioni di condizione, nelle diverse ipotesi che possono farsi circa lo stato di aggregazione (corpuscolare, liquido, gasoso).

L'esempio più cospicuo di questo tipo di problemi è notoriamente offerto dall'equilibrio relativo dell'anello di Saturno. Nelle classiche ricerche di LAPLACE, di MAXWELL, della sig.ra KOWALEWSKY, di POINCARÈ figura sempre tra le premesse la ipotesi (ovviamente suggerita dalla diretta osservazione del fenomeno) che si possa assumere come *direttrice* (linea mediana che segna l'andamento generale dell'anello) una circonferenza col centro nel baricentro di Saturno. Ora si può domandarsi se esistono altre configurazioni meccanicamente possibili, quali cioè sieno le curve, che potrebbero, al pari delle dette circonferenze, fungere da direttrici di un anello posto, quanto a sollecitazione dinamica, nelle stesse condizioni dell'anello di Saturno.

Ho mostrato in un precedente lavoro <sup>(\*)</sup> che, ove si assimili una fetta generica dell'anello ad un semplice punto materiale, la questione può ricondursi all'integrazione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, analoghe a quelle che reggono l'equilibrio di un filo flessibile ed inestendibile; di un tale sistema si mettono con tutta facilità in evidenza, accanto alle soluzioni circolari,  $\infty^2$  altre, corrispondenti a direttrici piane.

Applico qui all'anello di Saturno i più completi risultati di cui sopra è parola, concernenti la statica dei tubi sottili. Ne consegue in primo luogo che, nel caso di un anello corpuscolare, l'assimilazione di ogni fetta ad un punto materiale è senz'altro esauriente.

Contemplando successivamente il caso degli anelli fluidi, si riconosce che al sistema differenziale, il quale si presenta da solo nell'ipotesi corpuscolare, va associata un'ulteriore condizione, che opportunamente si denomina trasversale, e significa costanza della pressione al contorno. Essa fa dipendere la forma delle sezioni dalla preventiva risoluzione di un problema dello stesso tipo di quello proposto: ridotto però da tre a due dimensioni, e sottratto ad ogni azione di forze esterne. Circa tale problema piano noterò che se ne possiede una soluzione evidente (il cerchio), mentre non fu, per quanto mi consta, provato che sia la

(\*) T. LEVI-CIVITA, *Sulla forma dell'anello di Saturno*, « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », tomo LXVIII, (1908-1909), parte II, pp. 557-583 [in questo vol.: VIII, pp. 105-128].

sola (4). Comunque, per i fluidi *omogenei*, e così pure per i *gas perfetti*, si è condotti (combinando le condizioni longitudinali e trasversali) alla conclusione seguente: L'unica forma ammissibile per la direttrice è la circolare; quella appunto e soltanto quella che si presenta in natura.

### 1. - Generalità.

Sia  $\mathfrak{T}$  un tubo sottile, e si indichi con  $C$  la sua direttrice, cioè una qualunque fra le infinite linee geometriche atte a definirne l'andamento generale.

Designino ancora:  $P$  un punto generico di  $C$ ;  $\tau$  la sezione del tubo praticata con un piano normale a  $C$  in  $P$ ;  $P'$  un punto che ci riserviamo di far variare entro  $\tau$ ;  $d\tau'$  un elemento di  $\tau$  circostante a  $P'$ .

Alla decomposizione della sezione  $\tau$  in elementi  $d\tau'$  si può far corrispondere una decomposizione del tubo  $\mathfrak{T}$  in tubetti elementari, immaginando spiccate dai singoli punti  $P'$  delle linee  $C'$  di andamento analogo alla  $C$ .

Supposto che  $\mathfrak{T}$  sia riempito di materia distribuita con densità  $\varrho$  (funzione continua e derivabile dei punti di  $\mathfrak{T}$ ), ove si intenda con  $r$  la distanza di un punto generico del tubo da  $P$ ,

$$d\tau' \int_{C'} \frac{\varrho dC'}{r}$$

rappresenta manifestamente il valore nel punto  $P$  del potenziale newtoniano del tubo elementare proveniente dall'areola  $d\tau'$ .

Sommando tutti questi contributi, si ha il potenziale  $U_P$  dell'intero tubo (nello stesso punto  $P$ ) sotto la forma

$$(1) \quad U_P = \int_{\tau} d\tau' \int_{C'} \frac{\varrho dC'}{r} .$$

### 2. - Semplificazioni consentite dalla sottigliezza del tubo.

#### Espressioni del potenziale nei punti interni.

Se il tubo è molto sottile, il punto prefissato  $P$  risulta vicinissimo ad ognuna delle linee  $C'$ .

(4) La questione è analoga a quella che si presenta, in tre dimensioni, per la sfera. Veggasi in proposito: A. LIAPOUNOFF, *Sul corpo di massimo potenziale delle forze di attrazione* (in russo),



Si ricordi d'altra parte che il potenziale newtoniano

$$V = \int_{C'} \frac{\rho dC'}{r}$$

di una linea attraente  $C'$  diventa (logaritmicamente) infinito, quando il punto potenziato  $P$  tende a  $C'$ .

La relativa espressione asintotica è (5)

$$V^{(a)} = \rho_{P'} \log \frac{l^2}{PP'^2},$$

essendo  $\rho_{P'}$  il valore della densità  $\rho$  in  $P'$  e  $l$  una lunghezza (costante) che figura per ragione di omogeneità e che ci riserviamo [cfr. n. seguente] di fissare nel modo numericamente più opportuno.

L'essenziale è che all'integrale  $V$  si può approssimativamente sostituire  $V^{(a)}$  con errore relativo tanto meno sensibile quanto più è piccola la massima dimensione di  $\tau$ , cioè sottile il tubo.

Con ciò la (1) diviene

$$U_P = \int_{\tau} \rho_{P'} \log \frac{l^2}{PP'^2} \cdot d\tau'.$$

Ma si può semplificare ulteriormente notando che, per la sottigliezza del tubo, le cose vanno come se la densità fosse costante e sostituita dal suo valore medio. Più precisamente, si trarrà partito dall'ipotesi che la

\* Communications de la Société Mathématique de Kharkow », t. II, (1886), pp. 63-73; H. POINCARÉ, *Figures d'équilibre d'une masse fluide* (Paris, Naud, 1902), p. 15.

Circa i veli fluidi piani va segnalata (per quanto abbia soprattutto di mira il caso di veli fluidi ruotanti) un'interessante ricerca del sig. J. H. JEANS, *On the Equilibrium of Rotating Liquid Cylinders*, « Philosophical Transactions », (A), vol. CC, (1903), pp. 67-104. Cfr. altresì: F. INSOLERA, *Figure ellittiche di equilibrio di un velo piano liquido ruotante*, « Questi Rendiconti », tomo XVIII, (1904), pp. 16-44.

(<sup>2</sup>) Cfr. BETTI, *Teorica delle forze newtoniane* (Pisa, Nistri, 1879), pp. 20-22. Il segmento che BETTI designa con  $t$  sarebbe nel caso presente  $\overline{PP'}$  sen  $\varphi$ , chiamando  $\varphi$  l'angolo che la tangente a  $C'$  in  $P'$  forma col piano  $\tau$ . Per ipotesi, le  $C'$  hanno andamento poco diverso dalla  $C$ , che è ortogonale a  $\tau$ . Ne consegue che sen  $\varphi$  differisce poco dall'unità, e la conclusione di BETTI « resta finita la differenza  $V - \rho_{P'} \log 1/l^2$  [per quanto  $P$  sia prossimo a  $P'$ ] » equivale a « resta finita la differenza  $V - V^{(a)}$  ». Quest'ultima infatti può scriversi

$$\left( V - \rho_{P'} \log \frac{1}{l^2} \right) - \rho_{P'} \log [l^2 \text{sen}^2 \varphi],$$

e il termine addizionale si mantiene evidentemente finito (è anzi una costante rispetto a  $P$ ).



funzione  $\varrho$  sia derivabile, in questo modo: Si fisserà dapprima, a piacimento, un limite superiore per le derivate della  $\varrho$ , e si considereranno poi tubi abbastanza sottili; al disotto di un certo spessore saranno certamente valide così la riportata espressione di  $U_P$  come la sostituzione di  $\varrho_{P'}$  col suo valore medio.

Pongasi all'uopo

$$(2) \quad v = \int_{\tau} \varrho_{P'} d\tau',$$

con che  $v/\tau$  — valor medio di  $\varrho$  entro  $\tau$  — sarà il valore assunto da  $\varrho$  in un qualche punto  $O$  del campo  $\tau$ . La differenza  $\varrho_{P'} - v/\tau$ , attesa la derivabilità di  $\varrho$ , può (applicando lo sviluppo di TAYLOR) presentarsi sotto la forma  $\overline{OP'} \cdot f$ , dove  $f$  ha un limite superiore ben determinato.

La presenza del fattore  $\overline{OP'}$  nell'integrale

$$\int_{\tau} \overline{OP'} f \log \frac{l^2}{PP'^2} d\tau',$$

lo rende trascurabile di fronte a

$$\frac{v}{\tau} \int_{\tau} \log \frac{l^2}{PP'^2} d\tau',$$

tostochè (ritenuto  $v$  diverso da zero)  $\tau$  sia abbastanza piccolo.

Si può dunque attribuire ad  $U_P$  l'espressione

$$U_P = \frac{v}{\tau} \int_{\tau} \log \frac{l^2}{PP'^2} d\tau'.$$

In questa formula  $P$  rappresenta quel punto particolare della sezione  $\tau$ , che appartiene alla direttrice  $C$ . È chiaro per altro che, ove si prendesse, sulla stessa sezione  $\tau$ , un punto qualsiasi  $Q$ , si potrebbe calcolare la parte preponderante del potenziale in  $Q$ , ripetendo per  $Q$  considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte per  $P$ . E si troverebbe ( $v$  rimanendo invariato al pari di  $\tau$ )

$$(3) \quad U_Q = \frac{v}{\tau} \int_{\tau} \log \frac{l^2}{QP'^2} d\tau',$$

con pari approssimazione (tanto maggiore quanto più il tubo è sottile).



Ecco l'espressione ridotta, che volevamo stabilire, applicabile — si noti bene — ad ogni punto interno al nostro tubo. Basta infatti pensare che, facendo scorrere  $P$  lungo la direttrice  $C$ , ogni prefissato punto  $Q$  viene a trovarsi sopra una ben determinata sezione normale  $\tau$ .

Ove si immagini di individuare  $P$ , e con esso la corrispondente  $\tau$ , mediante l'arco  $s$  di  $C$  (contato a partire da un'origine arbitraria), il potenziale  $U_q$  dei punti del tubo si può anche considerare come funzione di  $s$  e della posizione occupata da  $Q$  entro  $\tau$ .

### 3. - Autopotenziale. Valutazione per fette.

#### Determinazione più conveniente della costante di omogeneità.

L'autopotenziale newtoniano  $\Omega$  (o energia potenziale cambiata di segno) del nostro tubo  $\mathfrak{T}$  è, per sua definizione,

$$(4) \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{T}} \rho U d\mathfrak{T}.$$

Per eseguire l'integrazione, gioverà adottare una decomposizione del campo diversa da quella di cui ci siamo serviti al n. 1. Dividiamo allora il tubo longitudinalmente, in tubetti elementari, aventi tutti l'andamento generale della direttrice  $C$ . È adesso indicata una decomposizione trasversale, in fette elementari di spessore  $ds$ : la fetta generica si troverà compresa fra la sezione  $\tau$  normale a  $C$  in  $P$ , e l'analoga relativa al punto vicinissimo  $s+ds$  (di  $C$ ). Il contributo, recato da una tale fetta all'integrale della funzione  $\rho U$ , sarà manifestamente

$$ds \int_{\tau} \rho_q U_q d\tau,$$

dove, comè poc'anzi, è ancora lecito (con errore che tende a zero assieme alla sezione del tubo) sostituire a  $\rho_q$  il valore medio  $\nu/\tau$ . Posto

$$(5) \quad k = \frac{1}{\tau^2} \int_{\tau} d\tau \int_{\tau} d\tau' \log \frac{l}{QP'},$$

risulta in conformità della (3)

$$ds \int_{\tau} \rho_q U_q d\tau = 2\nu^2 k ds.$$



All'uopo giova immaginare che il divario fra la sezione primitiva e la sezione deformata venga caratterizzato mediante gli spostamenti normali  $\delta n$  che fanno passare da  $\sigma$  alla nuova configurazione (senza inessenziali spostamenti rigidi, convenendo per es. di mettere a raffronto le due aree dopo averne fatto coincidere il baricentro e gli assi principali d'inerzia). I  $\delta n$  si intenderanno contati positivamente verso l'interno di  $\tau$ . Con ciò sarà intanto

$$(9) \quad \delta\tau = - \int_{\sigma} \delta n \, d\sigma.$$

D'altra parte, ove si introduca il *potenziale logaritmico*

$$\lambda_Q = \int_{\tau} \log \frac{l}{QP'} \, d\tau'$$

dell'area  $\tau$  (supposta omogenea) in un suo punto generico  $Q$ , si ha manifestamente

$$(5') \quad k = \frac{1}{\tau^2} \int_{\tau} \lambda_Q \, d\tau.$$

La variazione di

$$\int_{\tau} \lambda_Q \, d\tau,$$

(quando si passa alla sezione deformata) consta di un duplice contributo: quello dovuto all'alterazione del campo di integrazione ( $\lambda_Q$  rimanendo invariato); e quello che proviene dall'alterazione del potenziale logaritmico  $\lambda_Q$ .

Il primo si calcola subito, perchè l'alterazione del campo è rappresentata dalle areole  $d\sigma |\delta n|$  contigue al contorno, che si devono *aggiungere* quando  $\delta n$  è *negativo* (cioè rivolto verso l'esterno), e togliere nel caso opposto. Ciascuna areola contribuisce quindi alla variazione dell'integrale per  $-\lambda \, d\sigma \, \delta n$ , il valore di  $\lambda$  potendosi addirittura riferire al contorno (e precisamente al  $d\sigma$  di cui si tratta). Si ha così il primo contributo

$$- \int_{\sigma} \lambda \delta n \, d\sigma.$$



mazione, si intenderà stabilita in modo che rimanga inalterata la massa di ciascuna fetta elementare compresa fra due sezioni trasversali vicinissime.

Diremo  $\delta P$  lo spostamento infinitesimo da attribuirsi al punto generico  $P$  di  $C$  per passare al punto corrispondente nella nuova configurazione;  $\delta ds$  l'alterazione che subisce in conformità l'elemento lineare  $ds$  della direttrice;  $\delta k$  l'incremento del parametro  $k$  (dovuto ad eventuale cambiamento di forma, o di dimensioni, della sezione trasversale);  $\delta v$  l'incremento della densità  $v$ . Quest'ultimo è però esprimibile mediante  $\delta ds$ , in quanto, per ipotesi, si rispetta l'invariabilità della massa  $dm$  di ciascuna fetta, ciò che, in virtù della (6), dà luogo alla relazione

$$(7) \quad \delta(dm) = \delta(v ds) = 0.$$

Il  $\delta ds$  è a sua volta esprimibile per mezzo del vettore  $\delta P$  (e di elementi spettanti all'originaria direttrice  $C$ ). Detto infatti  $\mathbf{t}$  il vettore unitario tangente a  $C$  in  $P$  (nel verso delle  $s$  crescenti) e  $dP$  il vettore elementare, che rappresenta in grandezza, direzione e senso l'elemento  $ds$  di direttrice, si ha ovviamente (?)

$$ds = \mathbf{t} \times dP,$$

da cui

$$\delta ds = \delta \mathbf{t} \times dP + \mathbf{t} \times \delta dP.$$

Il primo termine del secondo membro è nullo, perchè  $\delta \mathbf{t}$  è perpendicolare a  $\mathbf{t}$  e quindi a  $dP$  (come risulta dall'identità  $\mathbf{t} \times \mathbf{t} = 1$ ). Nel secondo addendo si possono invertire i simboli  $d$  e  $\delta$ , e rimane

$$(8) \quad \delta ds = \mathbf{t} \times d \delta P.$$

In definitiva, per quanto concerne l'alterazione longitudinale del tubo, tutto va, in base alle (7) ed (8), come se si trattasse di una linea materiale di densità  $v$ : conclusione evidente a priori.

Della deformazione trasversale (alterazione delle sezioni normali alla direttrice) c'è da tener conto in quanto influisce sul parametro  $k$ . La dipendenza è funzionale, a norma della definizione (5) di  $k$ . Si può però esprimere  $\delta k$  mediante una formula che fa intervenire soltanto gli spostamenti al contorno  $\sigma$  della sezione  $\tau$ .

(?) Mi valgo delle notazioni vettoriali di BURALI-FORTI e MARCOLONGO. Cfr. i loro *Elementi di calcolo vettoriale* (Bologna, Zanichelli, 1909); e traduzione francese di S. LATTÈS (Paris, Hermann, 1910).

rappresentando  $r$  la distanza di  $Q$  dal centro e  $a$  il raggio del cerchio  $\tau$ . In ogni punto esterno si ha poi

$$\lambda_0 = \tau \log \frac{l}{r},$$

come se tutta la massa fosse raccolta nel centro. Il valore (comune) al contorno è

$$\lambda = \tau \log \frac{l}{a} = \frac{1}{2} \tau \log \frac{\pi l^2}{\tau}.$$

Dalla precedente espressione di  $\lambda$  nei punti interni si trae immediatamente, a norma della (5'),

$$(11) \quad k = \frac{1}{4} + \log \frac{l}{a} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log \frac{\pi l^2}{\tau};$$

risulta quindi

$$(12) \quad k\tau - \lambda = \frac{1}{4} \tau.$$

### 5. - Variazione dell'autopotenziale.

È ben noto il significato meccanico dell'autopotenziale  $\Omega$ . Esso rappresenta il lavoro complessivo, che dovrebbe compiere l'attrazione mutua delle masse del sistema, per passare dall'infinito (da posizioni delle masse così discoste tra loro che riescano insensibili le azioni a distanza) sino alla configurazione attuale. Ne consegue — ed è questo l'essenziale — che, facendo passare (in modo qualunque) il sistema da una configurazione ad un'altra, la corrispondente variazione di  $\Omega$  misura il lavoro che viene compiuto in tale passaggio dalle forze di attrazione.

Così in particolare, di fronte alle variazioni infinitesime testè specificate, la corrispondente variazione  $\delta\Omega$  fornisce il lavoro elementare, complessivamente effettuato durante lo spostamento, dalle attrazioni mutue delle particelle elementari del nostro tubo.

Ritenuta per  $\Omega$  l'espressione (4'), la valutazione di  $\delta\Omega$  si fa con tutta facilità in base alle (7) ed (8). In primo luogo, dacchè, per la (7)  $v ds = dm$  ha variazione nulla, conviene sostituire  $dm/ds$  a  $v$ , e scrivere

$$\Omega = \int_c dm^2 \frac{k}{ds},$$



Se ora si osserva:

1) che in

$$\int_{\tau} \lambda_Q d\tau = \int_{\tau} d\tau \int_{\tau} \log \frac{l}{QP'} d\tau',$$

i due punti  $Q$  e  $P'$  entrano in modo simmetrico,

2) che il termine, testè calcolato, va attribuito all'alterazione del campo di integrazione concernente il punto  $Q$ , mentre quello da calcolarsi è in sostanza l'analogo, salvo lo scambio di  $Q$  in  $P'$ ,

risulta senz'altro che la cercata variazione di

$$\int_{\tau} \lambda_Q d\tau,$$

è il doppio di

$$-\int_{\sigma} \lambda \delta n d\sigma.$$

Ne consegue, badando alle (5') e (9),

$$(10) \quad \delta k = \frac{2}{\tau^2} \int_{\sigma} (k\tau - \lambda) \delta n d\sigma.$$

Giova rilevare che, se il potenziale logaritmico  $\lambda$  è costante su tutto il contorno  $\sigma$ , la (10) può essere scritta

$$\delta k = -\frac{2}{\tau^2} (k\tau - \lambda) \delta \tau,$$

dove apparisce che, in tal caso, la variazione di  $k$  è semplicemente proporzionale alla complessiva variazione di area.

*Sezione circolare.* — La costanza di  $\lambda$  al contorno si verifica in particolare per i campi circolari. È infatti evidente che il potenziale logaritmico di un cerchio omogeneo può dipendere soltanto dalla distanza dal centro, ed è quindi costante sulla circonferenza contorno. Del resto si trova subito, per ogni punto  $Q$  interno al cerchio, l'espressione semplicissima

$$\lambda_Q = -\frac{1}{2} \pi r^2 + \frac{1}{2} \pi a^2 + \pi a^2 \log \frac{l}{a} = \tau \left[ -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} + \log \frac{l}{a} \right],$$

Supponiamo all'uopo, fissata una tale fetta e con essa il corrispondente punto  $P$  della direttrice, di deformare il tubo solo nell'immediata prossimità di  $P$ , facendo subire alla fetta circostante una traslazione arbitraria  $\delta P$ . Con ciò non si altera la forma di alcuna sezione, sicchè si annulla ogni  $\delta k$ , e quindi  $\delta_2 \Omega = 0$ ;  $\varepsilon$  è pur zero, ritenuto che si tratti di fetta intermedia; e  $\delta_1 \Omega$  si riduce sensibilmente al solo contributo proveniente dalla fetta considerata. Rimane pertanto, a norma della (14),

$$\frac{d(v^2 k t)}{ds} ds \times \delta P.$$

D'altra parte, dalla definizione di autopotenziale segue che nel caso presente  $\delta \Omega$  misura il lavoro effettuato, nella traslazione elementare  $\delta P$  della fetta considerata, da tutte le attrazioni newtoniane che la sollecitano. Sarà pertanto

$$\delta \Omega = \Phi ds \times \delta P,$$

ove si rappresenti con  $\Phi ds$  la risultante delle suddette attrazioni (o, se si vuole, di quelle che la fetta subisce da parte del rimanente tubo, non portandovi le azioni interne alcun contributo).

Eguagliando le due espressioni di  $\delta \Omega$ , si ha

$$\Phi ds \times \delta P = \frac{d(v^2 k t)}{ds} ds \times \delta P,$$

la quale, dovendo sussistere per ogni  $\delta P$ , porge

$$(18) \quad \Phi = \frac{d(v^2 k t)}{ds}.$$

Se si ricorda che

$$\frac{dt}{ds} = cn,$$

designando  $c$  la curvatura della direttrice e  $n$  un vettore unitario diretto secondo la normale principale (nel verso della concavità), si ha dalla (18), eseguendo la derivazione

$$\Phi = \frac{d(v^2 k)}{ds} t + v^2 k cn,$$

donde apparisce che le tre componenti di  $\Phi$  secondo la tangente a  $C$



dopo di che si ha, per materiale differenziazione,

$$\delta\Omega = -\int_{\sigma} \left(\frac{dm}{ds}\right)^2 k \delta ds + \int_{\sigma} \frac{dm^2}{ds} \delta k.$$

Riposto per  $dm$  il suo valore  $v ds$ , si introduca per  $\delta ds$  l'espressione (8), e si eseguisca, nel primo integrale, un'integrazione per parti.

Ove siano  $P_1$  e  $P_2$  i due estremi di  $C$  (coincidenti, qualora si tratti di una linea chiusa) e si ponga, con evidente significato delle notazioni,

$$(13) \quad \varepsilon = -[v^2 k t \times \delta P]_{P_1}^{P_2},$$

nonchè

$$(14) \quad \delta_1\Omega = \int_{\sigma} \left[ \frac{d(v^2 k t)}{ds} \times \delta P \right] ds,$$

$$(15) \quad \delta_2\Omega = \int_{\sigma} v^2 \delta k ds,$$

risulta

$$(16) \quad \delta\Omega = \delta_1\Omega + \delta_2\Omega + \varepsilon.$$

Il termine  $\varepsilon$  è manifestamente nullo ogniqualevolta si tratta di tubo chiuso.

Quanto a  $\delta_2\Omega$ , badando alla (10), e ponendo per brevità

$$(17) \quad p = 2 \frac{v^2}{\tau^2} (k\tau - \lambda),$$

si può anche attribuirgli la forma

$$(15') \quad \delta_2\Omega = \int_{\sigma} ds \int_{\sigma} p \delta n d\sigma.$$

## 6. - Interpretazione dei vari termini.

Attrazione del tubo sopra una generica sua fetta.

Forze terminali e superficiali.

L'espressione (16) di  $\delta\Omega$  porta a conseguenze notevoli.

Si può valersene in primo luogo per assegnare la risultante delle attrazioni che una fetta generica di tubo di spessore  $ds$  subisce da parte delle altre.

gli elementi, e quindi in particolare a contrarre le sezioni trasversali, così di regola dovrà riscontrarsi  $p > 0$  (senza poter però escludere — specie per contorni non convessi — che  $p$ , in qualche particolare punto, assuma valori negativi). Per i tubi a sezione circolare si ha, dalle (17) e (12),

$$(17') \quad p = \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\tau},$$

valore manifestamente costante sul contorno di ciascuna sezione, costante addirittura su tutta la superficie terminale se sono uniformi lo spessore e la densità lineare ( $\tau$  e  $\nu$  indipendenti da  $s$ ).

**7. - Ipotesi corpuscolare. Considerazione dei soli effetti globali.**

**Espressione ridotta del  $\delta\Omega$ .**

Immaginiamo un tubo costituito da una filza di corpuscoli rigidi, supponendo che un tratto di tubo, piccolo rispetto alla sua lunghezza, contenga ancora molti corpuscoli. Rimarrà sensibilmente valida l'espressione (4') di  $\Omega$ , per quanto essa sia stata stabilita nell'ipotesi di una distribuzione continua. Dovremo soltanto ragionare così: Intendendo per  $\nu^*$  e  $k^*$  dei valori medi relativi ad un tratto generico  $\Delta C$  di direttrice (piccolo rispetto a  $C$ , ma tale da infilzare molti corpuscoli), sarà con sufficiente approssimazione

$$(19) \quad \Omega = \sum \nu^{*2} k^* \Delta C,$$

la somma essendo estesa a tutti i  $\Delta C$  e potendo assimilarsi ad un  $\int$  nei riguardi della funzione  $\nu^{*2} k^*$ .

Di qui, procedendo come al n. 5, e ponendo

$$\delta_1 \Phi = \sum \left[ \frac{d(\nu^{*2} k^* \mathbf{t}^*)}{ds} \times \delta P \right] \Delta C,$$

( $\mathbf{t}^*$  determinazione media di  $\mathbf{t}$  in  $\Delta C$ ),

$$\begin{aligned} \delta_2 \Omega &= \sum \nu^{*2} \delta k^* \Delta C, \\ \varepsilon &= - (\nu^{*2} k^* \mathbf{t}^* \times \delta P)_{\mathbf{E}_1}^{\mathbf{E}_1}, \end{aligned}$$

si ricava

$$\delta\Omega = \delta_1\Omega + \delta_2\Omega + \varepsilon.$$



(nel senso in cui si contano gli archi), secondo la normale principale (nel senso della concavità), e secondo la binormale sono ordinatamente

$$\frac{d(v^2k)}{ds}, \quad v^2kc, \quad 0.$$

È questo il risultato che avevo stabilito qualche anno fa <sup>(\*)</sup> con più faticosa analisi. Come indicai allora, se si assume un sistema cartesiano di riferimento  $Oxyz$ , e si rappresentano con  $dx/ds$ ,  $dy/ds$ ,  $dz/ds$  i coseni direttori della tangente alla direttrice  $C$ , si hanno dalla (18) le tre componenti  $\Phi_x$ ,  $\Phi_y$ ,  $\Phi_z$  di  $\Phi$  sotto la forma

$$\Phi_x = \frac{d}{ds} \left( v^2k \frac{dx}{ds} \right), \quad \Phi_y = \frac{d}{ds} \left( v^2k \frac{dy}{ds} \right), \quad \Phi_z = \frac{d}{ds} \left( v^2k \frac{dz}{ds} \right).$$

*Forze terminali.* - Tornando alla (16), possiamo ancora ricavarne la risultante delle attrazioni che si esercitano sopra una (eventuale) sezione terminale del tubo. Si tratti per es. di quella che corrisponde a  $P_1$ . Con considerazioni analoghe a quelle istituite or ora, attribuendo cioè una traslazione  $\delta P$  soltanto alla fetta d'estremità (circostante a  $P_1$ ), e badando alla espressione (13) di  $\varepsilon$ , risulta ovviamente

$$v^2kt$$

come determinante di tale forza. Essa è tangenziale e rivolta verso l'interno del tubo: non poteva essere altrimenti quanto al senso, poichè si tratta di azioni attrattive sopra una sezione terminale.

*Pressioni superficiali.* - L'espressione (15') di  $\delta_2\Omega$  mostra che, di fronte ad una alterazione di forma del tubo  $\mathfrak{L}$ , le cose vanno come se il lavoro dell'attrazione si riducesse al contributo

$$p \, ds \, d\sigma \cdot \delta n$$

per ogni elemento  $dsd\sigma$  della superficie laterale di  $\mathfrak{L}$ .

Dacchè  $\delta n$  rappresenta lo spostamento normale dell'elemento (contato positivamente verso l'interno del tubo) il contributo in questione è identico a quello che competerebbe ad uno sforzo normale di intensità  $|p|$  e avente carattere di pressione o di trazione secondochè  $p$  è positivo o negativo.

Siccome l'effetto generale dell'attrazione deve tendere a ravvicinare

(\*) Loco cit. (\*).

gli elementi, e quindi in particolare a contrarre le sezioni trasversali, così di regola dovrà riscontrarsi  $p > 0$  (senza poter però escludere — specie per contorni non convessi — che  $p$ , in qualche particolare punto, assuma valori negativi). Per i tubi a sezione circolare si ha, dalle (17) e (12),

$$(17') \quad p = \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\tau},$$

valore manifestamente costante sul contorno di ciascuna sezione, costante addirittura su tutta la superficie terminale se sono uniformi lo spessore e la densità lineare ( $\tau$  e  $\nu$  indipendenti da  $s$ ).

**7. - Ipotesi corpuscolare. Considerazione dei soli effetti globali.**

**Espressione ridotta del  $\delta\Omega$ .**

Immaginiamo un tubo costituito da una filza di corpuscoli rigidi, supponendo che un tratto di tubo, piccolo rispetto alla sua lunghezza, contenga ancora molti corpuscoli. Rimarrà sensibilmente valida l'espressione (4') di  $\Omega$ , per quanto essa sia stata stabilita nell'ipotesi di una distribuzione continua. Dovremo soltanto ragionare così: Intendendo per  $\nu^*$  e  $k^*$  dei valori medi relativi ad un tratto generico  $\Delta C$  di direttrice (piccolo rispetto a  $C$ , ma tale da infilzare molti corpuscoli), sarà con sufficiente approssimazione

$$(19) \quad \Omega = \sum \nu^{*2} k^* \Delta C,$$

la somma essendo estesa a tutti i  $\Delta C$  e potendo assimilarsi ad un  $\int_0$  nei riguardi della funzione  $\nu^{*2} k^*$ .

Di qui, procedendo come al n. 5, e ponendo

$$\delta_1 \Phi = \sum \left[ \frac{d(\nu^{*2} k^* t^*)}{ds} \times \delta P \right] \Delta C,$$

( $t^*$  determinazione media di  $t$  in  $\Delta C$ ),

$$\begin{aligned} \delta_2 \Omega &= \sum \nu^{*2} \delta k^* \Delta C, \\ \varepsilon &= - (\nu^{*2} k^* t^* \times \delta P)_{P_1}^2, \end{aligned}$$

si ricava

$$\delta \Omega = \delta_1 \Omega + \delta_2 \Omega + \varepsilon.$$



In  $\delta_1\Omega$  compare la derivata rapporto all'arco  $s$  dell'andamento dei *valori medi* del prodotto  $v^2k$ . Con questa avvertenza, potremo del resto riprendere per  $\delta_1\Omega$  la sua espressione generale (14).

Quanto a  $\delta_2\Omega$ , potremo addirittura sostituirvi [colla stessa approssimazione entro cui vale la (19)] l'originario integrale (15)

$$\int_c v^2 \delta k \, ds,$$

tornando ad interpretare  $v$  e  $k$  come *valori locali* (\*).

Ciò premesso, specifichiamo (come è nella natura delle cose e come, coll'adottata dicitura, ne abbiamo già mostrato l'intendimento) la direttrice  $C$  in modo che attraversi ciascun corpuscolo della filza:  $v$  e  $k$  avranno così i valori che competono alle sezioni di questi corpuscoli negli archetti di  $C$  che si trovano nel loro interno; il valore zero negli archi che vanno da un corpuscolo ad un altro.

Importa rilevare che, attesa la supposta rigidità dei corpuscoli, si rispetta certamente il criterio di invariabilità della massa d'ogni singola fetta (n. 4), attenendosi alla convenzione seguente: Quando il sistema subisce una generica deformazione (infinitesima), gli si attribuirà come nuova direttrice una curva passante per gli stessi punti materiali, avente quindi, rispetto a ciascun corpuscolo, situazione identica prima e dopo dello spostamento.

È perfettamente legittimo — si noti bene — il rappresentarsi in questo o in quel modo gli spostamenti virtuali, purchè non si pregiudichi la piena indipendenza e mobilità di ciascun corpuscolo. La nostra particolare convenzione si presenta pertanto come una semplice ipotesi insensuale, che giova a semplificare la discussione. Essa implica infatti che, in ogni spostamento virtuale del sistema, rimangano invariate (internamente a ciascun corpuscolo, cioè dovunque sia  $v$  diversa da zero) le singole sezioni trasversali. Ne consegue

$$v^2 \delta k = 0,$$

da cui

$$\delta_2\Omega = 0.$$

In definitiva *le cose vanno come se ciascuna fetta costituisse un sistema indeformabile, i valori di  $v$  e di  $k$ , che compariscono in  $\delta_1\Omega$  dovendosi ritenere medie, relative a tratti di tubo comprendenti molti corpuscoli.*

(\*) Ciò non sarebbe egualmente lecito nella espressione del  $\delta_1\Omega$ , perchè c'è di mezzo la derivazione rispetto all'arco  $s$ .

### 8. - Equilibrio di un tubo sollecitato da assegnate forze esterne (conservative).

Supposto il tubo abbastanza sottile perchè sieno applicabili le considerazioni istituite finora, potremo pur trattare il campo esterno come uniforme entro ogni sezione trasversale.

Perciò, ove si indichi con  $\mathbf{F}$  la forza del campo in un generico punto  $P$  della direttrice (riferita, giusta le consuetudini, all'unità di massa), ogni fetta si troverà sollecitata dalla forza

$$v\mathbf{F}ds.$$

In un generico spostamento virtuale del tubo si avrà, accanto al lavoro  $\delta\Omega$  dell'attrazione, il lavoro

$$(20) \quad \delta L = \int_c \{v\mathbf{F} \times \delta P\} ds,$$

delle forze esterne.

Questa formula esige un breve commento. Se ogni fetta subisse uno spostamento  $\delta P$  conservando la sua individualità materiale, il lavoro elementare sarebbe manifestamente

$$v\mathbf{F}ds \times \delta P,$$

donde la (20). In realtà, per il modo con cui abbiamo convenuto a n. 4 di stabilire la corrispondenza fra le due configurazioni del tubo prima e dopo lo spostamento, un generico  $\delta P$  non può in generale identificarsi collo spostamento della particella che si trovava inizialmente in  $P$ . Con tutto ciò la (20) seguita a valere, ma è d'uopo giustificarla facendo il calcolo del lavoro globale  $\delta L$  per altra via. E precisamente sfruttando l'ipotesi che il campo esterno sia conservativo. In base a tale ipotesi, ove sia  $f$  la funzione delle forze del campo, con che

$$\mathbf{F} = \text{grad } f,$$

il lavoro in questione rimane espresso da

$$\delta \int_c v f ds,$$

il simbolo di variazione  $\delta$  riferendosi appunto alla deformazione del tubo.



Ora si ha, passando da  $P$  a  $P + \delta P$ ,

$$\delta f = \text{grad } f \times \delta P = \mathbf{F} \times \delta P,$$

nonchè (n. 4)

$$\delta(v ds) = 0.$$

Risulta quindi

$$\delta \int_c v f ds = \int_c \{v \mathbf{F} \times \delta P\} ds, \quad \text{c. d. d.}$$

Per impostare la questione statica (pur nell'ambito strettamente meccanico) con tutta generalità, conviene ancora tener conto dell'eventualità che il tubo possenga una qualche altra forma (per es. elastica) di energia posizionale. Indicando con  $\Pi$  il relativo potenziale (l'energia suddetta cambiata di segno), avremo, dal principio dei lavori virtuali, la condizione di equilibrio

$$(21) \quad \delta\Omega + \delta L + \delta\Pi = 0,$$

per ogni spostamento consentito dai vincoli.

Per ricavarne le equazioni esplicite, è d'uopo aver riguardo all'intima costituzione del sistema. Considereremo successivamente tre strutture tipiche: corpuscolare, liquida, gasosa.

### 9. - Condizioni esplicite rispondenti ai vari stati di aggregazione di un anello (tubo chiuso).

*Anello corpuscolare.* — Per quanto abbiamo visto al n. 7,  $\delta\Omega$  si riduce al termine  $\delta_1\Omega$ ;  $\varepsilon$  va a zero perchè si tratta di tubo chiuso. Non c'è da tener conto di variazioni di energia interna, dato che si considerano corpuscoli *rigidi*. Rimane pertanto

$$\delta_1\Omega + \delta L = 0,$$

la quale deve sussistere per ogni spostamento virtuale.

Siccome i  $\delta P$  sono completamente arbitrari, ne risulta, in base alle (14) e (20),

$$(I) \quad \frac{d(v^2 k t)}{ds} + v \mathbf{F} = 0,$$

dove [cfr. n. 7],  $\nu$ ,  $k$  e  $t$  rappresentano (nè potrebbe essere altrimenti data la struttura corpuscolare) elementi di media relativi a tratti di anello, brevi rispetto alla lunghezza totale, ma pur comprendenti un gran numero di corpuscoli.

Intesi sul preciso significato delle lettere, basta fissare la conclusione che la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è in questo caso rappresentata dall'unica equazione vettoriale (I).

*Anello liquido.* — Neppur qui c'è da tener conto di energia interna, supposto naturalmente che liquido stia a significare fluido incompressibile.  $\delta\Omega$  conterrà però tutti e due i termini  $\delta_1\Omega$ ,  $\delta_2\Omega$ , e si dovrà esprimere che è

$$(21') \quad \delta_1\Omega + \delta_2\Omega + \delta L = 0$$

per ogni spostamento consentito dai vincoli.

Quali restrizioni derivano agli spostamenti (e per essi alle caratteristiche  $\delta P$ ,  $\delta n$ ) dall'incompressibilità della materia costitutiva del tubo? Assai poche in verità. Ricordiamo infatti, riportandoci alle considerazioni cinematiche del n. 4, che ogni fetta è bensì delimitata in modo da possedere un'eguale massa  $dm$  prima e dopo lo spostamento, ma non si pretende affatto che le particelle materiali incluse nella fetta rimangano le stesse: la deformazione è stata definita senza preoccuparsi delle migrazioni individuali delle singole particelle. Ne consegue che, malgrado la loro incompressibilità, rimangono arbitrari i  $\delta P$  e i  $\delta n$  d'ogni sezione individualmente considerata. C'è soltanto il vincolo globale che sia nulla la variazione complessiva di volume, che sia cioè

$$(22) \quad \int_{\sigma} \delta\tau ds = - \int_{\sigma} ds \int_{\sigma} \delta n d\sigma = 0.$$

La (21') deve dunque sussistere per tutti e soli gli spostamenti che rispettano la (22).

Col solito metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE, si passa all'incondizionato annullarsi di

$$(23) \quad \delta_1\Omega + \delta_2\Omega + \delta L - p_0 \int_{\sigma} ds \int_{\sigma} \delta n d\sigma = 0,$$

designando  $p_0$  una costante a priori indeterminata.

Avuto riguardo alle (14), (15') e (20), si trova immediatamente

$$(I) \quad \frac{d(\nu^2 kt)}{ds} + \nu F = 0, \quad (\text{per ogni fetta}),$$

$$(II) \quad p = p_0 \quad (\text{per ogni elemento di contorno}).$$



La (I) è identica a quella che abbiamo trovato or ora per l'anello corpuscolare (salvo che bisognava in quel caso riferirla ad elementi di media). Qui c'è in più la condizione (II).

Attesa l'espressione (17) di  $p$ , in cui intervengono i valori al contorno del potenziale logaritmico  $\lambda$  (di una sezione generica  $\tau$ ), la (II) ha manifesto carattere funzionale. Comunque, il problema statico rimane decomposto in due altri: uno *longitudinale*, concernente cioè l'andamento della direttrice, caratterizzato dall'equazione vettoriale (I); l'altro *trasversale*, che involge la forma delle sezioni  $\tau$  e la densità lineare  $\nu$ , e trova la sua formulazione analitica nella (II). Quest'ultima può essere considerata a sè, indipendentemente dalla (I), ma non viceversa [comparando nella (I) le  $\nu$  e  $k$ , che debbono pensarsi legate dalla (II)].

Convieni perciò far precedere lo studio del problema trasversale, onde tenerne debito conto quando si discute la (I) per ricavarne le possibili forme di anelli liquidi.

*Anello gasoso.* — Il criterio, in base al quale vanno fissate le condizioni di equilibrio, è alquanto diverso da quello valido nell'ipotesi dell'incompressibilità. Le equazioni cui in definitiva si perviene sono però le stesse. Per rendersene conto, basta pensare che una massa gasosa (a differenza di una massa liquida) non è sottoposta ad alcun vincolo cinematico, ma viceversa possiede un'energia interna  $-II$ , che dipende dal suo volume. Il  $\delta II$  si può manifestamente rappresentare sotto la forma

$$- p_0 \times \text{variazione di volume,}$$

indicando  $p_0$  un coefficiente che dipende dallo stato di equilibrio del sistema (ed è quindi una costante rispetto ad  $s$  e a  $\sigma$ ).

Ritenuto questo, avremo dalla (21)

$$\delta\Omega + \delta L - p_0 \int_c \int_\sigma ds \int \delta n d\sigma = 0,$$

dove  $\delta\Omega = \delta_1\Omega + \delta_2\Omega$  come già per l'anello liquido.

Questa equazione è identica alla (23); e identica è l'accezione in cui deve rendersi esplicita. Essa deve infatti sussistere (non essendovi nel caso presente vincoli cinematici) per qualsiasi determinazione degli spostamenti  $\delta P$ ,  $\delta n$ .

Nessuna differenza vi è dunque, dal punto di vista analitico, fra le condizioni statiche concernenti un anello liquido e quelle che si riferiscono ad un anello gasoso,

c. d. d.

### 10. - Il problema trasversale nel caso di anelli fluidi.

In base alla (II),  $p$  deve: sia essere costante sul contorno  $\sigma$  di una sezione generica, sia conservare il medesimo valore quando si passa da una sezione all'altra, il che è quanto dire essere indipendente da  $s$ .

Se si pensa che  $\nu$ ,  $\tau$  e  $k$  sono costanti per una data sezione, e quindi, se pur possono in tesi generale dipendere da  $s$ , non variano sopra il contorno  $\sigma$  della sezione, il primo fatto, a norma della (17), si traduce nella *costanza del potenziale logaritmico  $\lambda$  di una sezione generica sopra il relativo contorno*. Questa condizione è caratteristica per l'equilibrio di un velo liquido omogeneo, le cui particelle si attraggono in ragione inversa della semplice distanza.

Il problema trasversale è dunque dello stesso tipo di quello originariamente proposto (equilibrio di una massa fluida); ma si trova ridotto da tre a due dimensioni, e presenta (nell'ambito della nostra approssimazione) la duplice semplificazione che non vi hanno influenza le forze esterne e che il velo va trattato senz'altro come omogeneo. Fra le possibili configurazioni di equilibrio vi ha il cerchio, come è ben noto e come del resto già verificammo al n. 4.

La questione se esistono altre forme, e, in caso affermativo, quali, attende ancora una risposta <sup>(10)</sup>.

### 11. - Il problema longitudinale.

Fissata per la sezione generica  $\tau$  una delle forme possibili (la circolare almeno lo è), le tre quantità  $\tau$ ,  $k$ ,  $\lambda$  sono a ritenersi funzioni ben determinate una dell'altra. Per il cerchio si ha ad es. [formule (11) e (12)]

$$k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log \frac{\pi l^2}{\tau}, \quad k\tau - \lambda = \frac{1}{4} \tau.$$

Pure funzione di  $s$ , ma a priori indipendente da queste, è la densità lineare  $\nu$ .

Quel che ci resta da sfruttare della equazione (II), cioè la costanza di  $p$  lungo la direttrice, si esplicita, badando alla (17), in

$$(II') \quad 2 \frac{\nu^2}{\tau^2} (k\tau - \lambda) = p_0,$$

<sup>(10)</sup> Cfr. la nota (\*).



e può in definitiva considerarsi come una relazione in termini finiti fra  $\nu$  e  $k$

$$(II'') \quad F(\nu, k) = 0.$$

Il problema longitudinale è così ricondotto al sistema (I), (II'').

La (I), proiettando sui tre assi di un triedro cartesiano  $Oxyz$ , dà luogo a tre equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, che involgono le 5 funzioni (incognite)  $x, y, z, \nu, k$  di  $s$ . Queste sono altresì legate dall'equazione (II'') (in termini finiti) e dall'identità geometrica

$$(24) \quad t^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

Il problema longitudinale è dunque nettamente determinato e ricondotto alle equazioni differenziali ordinarie. Il tipo è del tutto analogo a quello che si presenta nella statica dei fili flessibili ed inestendibili.

## 12. - Fluidi omogenei e gas perfetti. Condizione di compatibilità.

### Sua trasformazione in base a noti criteri di geometria differenziale.

Per i fluidi omogenei, la densità (cubica)  $\rho = \nu/\tau$  è costante. Per i gas che seguono la legge di BOYLE, essa è a ritenersi proporzionale alla pressione  $p$ ; siccome questa, in virtù della (II), è costante al contorno, lo stesso segue di  $\nu/\tau$ .

Riconosciamo così che, in entrambi i casi,  $\nu/\tau$  non dipende da  $s$ , talchè la (II') si riduce a

$$k\tau - \lambda = \text{cost.}$$

Abbiamo già osservato che (per una data configurazione delle sezioni trasversali)  $k$  e  $\lambda$  sono funzioni di  $\tau$ ; d'altra parte si vede subito che, facendo variare le dimensioni di  $\tau$  (senza alterarne la forma)  $k\tau - \lambda$  non può rimanere invariato. La precedente relazione non può dunque essere in nessun caso una identità. Ne consegue che (le quante volte siasi fissata una tra le possibili forme per le sezioni trasversali)  $\tau, k$  e  $\lambda$  sono tutte e tre costanti (cioè indipendenti da  $s$ ). Necessariamente lo è allora anche  $\nu$ , e il problema si riduce a soddisfare alle (I) e (24) con  $k$  e  $\nu$  costanti.

Le funzioni incognite essendo soltanto tre (le coordinate  $x, y, z$ ) e quattro le equazioni, dovranno verificarsi certe condizioni di compati-



bilità. Non sempre esistono pertanto curve  $C$ , che possano essere direttrici di un anello fluido omogeneo sottoposto a sollecitazione prefissata.

Esaminiamo la questione un po' più da vicino. Designando [come già al n. 8] con  $f$  il potenziale della forza esterna, la (I) si scrive (dacchè  $k$  e  $\nu$  sono costanti)

$$(25) \quad \frac{dt}{ds} = \text{grad} \frac{f}{k\nu}.$$

È questa l'equazione vettoriale dell'equilibrio di un filo flessibile e inestendibile, sollecitato da una forza di potenziale  $-f/k\nu$ , per il quale si presenti la circostanza particolare che la tensione ha il valore 1.

Da questa interpretazione [o, ciò che è lo stesso, dall'equazione (25), moltiplicandone scalarmente i due membri per  $\boldsymbol{\tau}$ ] segue che ogni soluzione della (25), cioè ogni possibile  $C$ , deve svolgersi interamente sopra una superficie equipotenziale

$$f = \text{cost}.$$

E deve essere geodetica di questa superficie. Ciò risulta subito dal fatto che la normale alla superficie (in quanto linea d'azione della forza  $\mathbf{F} = \text{grad} (f/k\nu)$ ) è contenuta nel piano osculatore.

Se si proietta la (25) sulla normale (verso la concavità di  $C$ ), e si indica con  $c$  la curvatura della  $C$ , si ha

$$(26) \quad c = \frac{1}{k\nu} |\sqrt{\Delta f}|,$$

essendo

$$\Delta f = (\text{grad} f)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

La questione è ricondotta a trovare (se esistono) quelle geodetiche delle superficie  $f = \text{cost.}$ , la cui curvatura verifica la (26).

Siamo nell'ambito della teoria degli integrali (o relazioni invarianti) delle linee geodetiche, e sarebbe necessario riportarsi a questa teoria, ove si volesse istituire una discussione approfondita.

Mi limiterò a segnalare alcune soluzioni particolari di immediata evidenza.

In primo luogo, ove le superficie equipotenziali siano parallele ( $\Delta f$  costante sopra ogni superficie della famiglia), la (26) sta a dire semplicemente che le curve cercate devono essere cerchi (oltrechè, ben si intende, geodetiche): ogni geodetica circolare può dunque essere una  $C$ .



Ancora, se le superficie equipotenziali sono rotonde, la (26) è senz'altro soddisfatta sopra ogni parallelo (disponendo opportunamente della costante  $kv$ ). Basta pertanto che questo sia una geodetica (cioè che ha luogo per l'equatore e, in generale, per ogni massimo o minimo del raggio) perchè costituisca una direttrice possibile.

### 13. - Applicazione all'anello di Saturno.

Si suppone notoriamente che l'anello si trovi soggetto all'attrazione di Saturno (oltre che alla propria), e sia animato da rotazione uniforme attorno ad un asse  $Sz$  passante per il centro di gravità  $S$  di Saturno.

Si tratta pertanto di equilibrio relativo rispetto ad assi  $Sxyz$  ruotanti colla stessa velocità angolare dell'anello. Rispetto a questi assi, tutto va come se si trattasse di equilibrio assoluto, purchè si tenga conto della forza centrifuga. L'espressione di  $f$  è quindi, immaginando scelte le unità in modo conveniente <sup>(11)</sup>, e designando con  $r$  la distanza di un generico punto  $(xyz)$  dall'origine  $S$ ,

$$(27) \quad f = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (x^2 + y^2).$$

*Ipotesi corpuscolare.* - Per caratterizzare le curve  $C$ , che potrebbero fungere da direttrici di un anello posto, quanto a sollecitazione dinamica, nelle condizioni dell'anello di Saturno, c'è in questo caso [n. 9] da tener conto della sola (I) [associata all'identità geometrica (24)].

Le equazioni essendo complessivamente quattro fra le cinque funzioni  $x, y, z, v, k$  della  $s$ , è ancora lecito aggiungere una condizione a piacere: per es. fissare preventivamente la funzione  $k(s)$ . Si può in particolare supporre l'anello di spessore uniforme, cioè  $k$  costante. È questo il punto di vista adottato nella mia precedente ricerca sulla forma dell'anello di Saturno <sup>(12)</sup>. Ho ivi tra altro rilevata l'esistenza di  $\infty^2$  direttrici equatoriali, determinabili mediante quadrature, e ho fatto uno studio più approfondito di quelle prossime alla forma circolare <sup>(13)</sup>.

*Massa fluida omogenea (ovvero costituita da gas perfetto).* - Dall'osservazione finale del n. prec. scende tosto che tutte le circonferenze di

<sup>(11)</sup> Cfr. loco cit. (\*), p. 566.

<sup>(12)</sup> Rinvio come sopra.

<sup>(13)</sup> Veggasi altresì: A. VITERBI, *Su una classe speciale di forme dell'anello di Saturno*, « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », tomo LXIX (1909-1910), parte II, pp. 1129-1149; *Sulle direttrici piane dell'anello di Saturno* [Ibid., tomo LXX (1910-1911), parte II, pp. 1311-1333].

centro  $S$ , situate nel piano equatoriale  $Sxy$ , sono direttrici possibili. Ciò era evidente a priori dal momento che le ricerche classiche di LAPLACE, di POINCARÉ e della KOWALEWSKI avevano accertata l'esistenza di soluzioni a direttrice circolare anche prescindendo dall'ipotesi semplificativa di una sezione piccolissima.

Sono possibili (per un anello *fluidico, omogeneo, ovvero costituito da gas perfetto*) altre forme di direttrici?

La risposta è negativa. Si riconosce infatti per via diretta (con qualche sviluppo di calcolo, che non sto a riportare per disteso, perchè si tratta di una materiale constatazione di incompatibilità) che, per le superficie equipotenziali definite dalla (27), l'equazione (26) non può venire soddisfatta altro che da paralleli geodetici. Di questi, su ogni superficie (27), ve n'è uno soltanto: il relativo equatore (14).

---

(14) Si noti che le superficie in questione ammettono effettivamente un equatore (intersezione col piano  $z = 0$ ) soltanto per valori abbastanza grandi di  $f$  ( $> \frac{1}{2}$ ). Sulle altre superficie della famiglia non esistono paralleli geodetici.



