XXIII.

SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES, A DEUX INCONNUES, ADMETTANT UNE INTÉGRALE QUADRATIQUE

« Annaes da Acad. Polytechnica do Porto », t. VII (1912), pp. 193-206.

1. - Indications préliminaires. Résumé du mémoire.

Soit à intégrer le système différentiel

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y\,, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y\,, \end{cases}$$

où les coefficients a désignent des fonctions quelconques de la variable indépendante t (finies et continues pour toutes les valeurs de t qu'il y a lieu d'envisager).

Supposons qu'on en connaisse une intégrale quadratique

$$(2) \qquad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \text{const.}\,,$$

A, B, C étant également des fonctions de t (qui se comportent comme les a).

Il est bien clair qu'on pourrait profiter de l'intégrale pour éliminer une des inconnues: ceci baisse l'ordre d'une unité, et il reste une équation unique du premier ordre (non plus linéaire, en général). On constate toutefois que la réduction est plus profonde, puisque le problème se ramène aux quadratures [1]. Voilà le résultat que je vais établir. En

[1] Cette remarque se rattache évidemment aux recherches de M. M. E. Picard et E. Vessiot. La déduction directe réussit toutefois immédiate, tandis que, pour s'en tenir aux théories ra-

considérant plus de près le champ réel, j'en tirerai un corollaire se rapportant à la stabilité de la solution particulière $x = 0$, $y = 0$ [du système donné (1)]. Il est bien connu que, si la forme f est définie, la dite solution est stable [2]. Le cas d'une forme indéfinie ne se laisse pas trancher, d'après les théories générales, par la simple inspection des données. Ainsi par exemple, si les coefficients a sont périodiques, l'application des méthodes (désormais) usuelles exigerait le calcul préalable des exposants caractéristiques, lesquels — on le sait bien — dépendent des coefficients d'une manière fonctionnelle très compliquée.

Ici toutefois — voici le corollaire — le critère de stabilité est fourni par une certaine valeur moyenne se déduisant directement des données de la question (les coefficients a de (1) et A, B, C de l'intégrale quadratique). C'est une conséquence immédiate de l'intégrabilité par quadratures. Quoi qu'il en soit le critère dont il s'agit peut rendre des services dans l'étude des mouvements stationnaire. M.lle C. SILVESTRI vient d'en donner un exemple intéressant [3] se rapportant au cas de M.me KOWALEWSKY.

2. - Carré parfait.

Si le discriminant

$$D = AC - B^2 \tag{3}$$

de la forme f s'annule quelque soit t, la forme f elle même est un carré parfait. On connaît par conséquent une intégrale *linéaire*, $\sqrt{f} =$ const., du système (1) et son intégration s'achève par quadratures. En effet, dès qu'on remplace une des inconnues, soit y, par sa valeur tirée de $\sqrt{f} =$ const., dx/dt devient égale à une fonction linéaire de x.

---

tionnelles d'intégration, il faudrait des passages, simples en concept, mais ne conduisant pas rapidement au calcul effectif. On raisonnerait comme il suit: Pisu'il existe une intégrale quadratique, le groupe des transformations du système (1) sera à deux paramètres *au plus*. C'est assez pour que le système (1) — de même qu'une équation unique du second ordre — puisse s'intégrer par quadratures. Voir notamment E. PICARD, *Traité d'analyse*, t. III (seconde édition), chap. XVII, nn. 28-29, pp. 576-581.

On reconnaîtra également que les considérations complémentaires des nn. 7-9 se rattachent à la transformation des équations différentielles linéaires et à leurs invariants, mais sortent du cadre spécialement envisagé par L. BRIOSCHI, G. H. HALPHEN, etc., et, tout récemment, par M. WILCZYNSKI.

(2) Voir par exemple: A. LIAPOUNOFF, *Problème genéral de la stabilité du mouvement*, « Annales de la Faculté des sciences de Toulouse », 2e série, t. IX, 1907, p. 259. Il suffit d'ailleurs, ainsi que le fait remarquer cet auteur, d'appliquer à l'intégrale $f =$ const. le raisonnement classique de DIRICHLET pour démontrer le théorème de LAGRANGE sur la stabilité de l'équilibre.

(3) Dans sa thèse, dont un extrait vient de paraître dans les « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » (vol. XXI, 1912 et XXII, 1913).

3. - Cas général d'une intégrale irréductible.

Supposons maintenant que D ne soit pas identiquement nul, et plaçons-nous dans un domaine (de la variable indépendente t), où $D \neq 0$. On peut poser

$$f = u \cdot v \, ,$$

les deux facteurs u et v étant linéaires en x, y, réels ou imaginaires suivant les cas, mais certainement distincts (à cause de l'inégalité $D \neq 0$). Nous indiquerons bientôt comment il convient de préciser la définition des u, v. En attendant il nous suffit de remarquer que ce sont deux combinaisons linéaires distinctes de x, y, et qu'il y a lieu de les prendre comme fonctions inconnues dans le système (1), à la place de x, y.

Le système transformé en u, v reste évidemment linéaire, et s'écrira

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= b_{11}u + b_{12}v \, , \\ \frac{dv}{dt} &= b_{21}u + b_{22}v \, , \end{aligned}\right. \tag{4}$$

les b étant des fonctions de t, qui dépendent à la fois des a et des coefficients de la substitution linéaire reliant u, v à x, y.

Ceci posé, tout se réduit à exprimer que le système (4) admet l'intégrale bilinéaire [transformée de (2)]

$$uv = \text{const.}$$

La condition nécessaire et suffisante est que $d(uv)/dt$ soit nulle pour toute solution de (4), ce qui exige qu'on ait (identiquement en u, v)

$$u(b_{21}u + b_{22}v) + v(b_{11}u + b_{12}v) = 0 \, ,$$

d'où

$$b_{21} = 0 \, , \quad b_{12} = 0 \, , \quad b_{11} + b_{22} = 0 \, .$$

Le système transformé en u, v acquiert donc nécessairement la forme réduite

$$\frac{du}{dt} = \tau u \, , \qquad \frac{dv}{dt} = -\tau v \, , \tag{5}$$

en désignant par τ la valeur commune de b_{11}, $-b_{22}$.

Il en résulte tout de suite que l'intégration s'achève par une quadrature. On a en effet

$$(5') \qquad u = u_0 e^{\int \tau dt}, \qquad v = v_0 e^{\int \tau dt},$$

u_0, v_0 étant des constantes.

4. - Critère élémentaire pour expliciter le changement des inconnues: il y a lieu de s'en servir dès que *A* (ou *C*) ne s'annule pas.

Pour décomposer f en deux facteurs linéaires, on peut employer la méthode élémentaire suivante.

Si A et C ne s'annulent à la fois, soit par exemple $A \neq 0$. On considère alors l'équation du second degré

$$(6) \qquad z^2 + 2\frac{B}{A}z + \frac{C}{A} = 0,$$

D on en appelle z_1, z_2 les deux racines (nécessairement distinctes, d'après et $\neq 0$). L'identité

$$f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A(x - z_1 y)(x - z_2 y)$$

montre qu'en posant

$$(7) \qquad \begin{cases} u = \sqrt{A}\,(x - z_1 y), \\ v = \sqrt{A}\,(x - z_2 y), \end{cases}$$

on a justement

$$f = u \cdot v .$$

Dérivons logarithmiquement les (7) en désignant, pour abréger l'écriture, d/dt par un point superposé.

Il vient

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{1}{2}\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{x} - z_1\dot{y} - \dot{z}_1 y}{x - z_1 y},$$

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{1}{2}\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{x} - z_2\dot{y} - \dot{z}_2 y}{x - z_2 y},$$

d'où, d'après (1),

$$\frac{\dot u}{u} = \frac{1}{2}\frac{\dot A}{A} + \frac{(a_{11} - z_1 a_{21})x - (-a_{12} + z_1 a_{22} + \dot z_1)y}{x - z_1 y},$$

$$\frac{\dot v}{v} = \frac{1}{2}\frac{\dot A}{A} + \frac{(a_{11} - z_1 a_{21})x - (-a_{12} + z_2 a_{22} + \dot z_2)y}{x - z_2 y}.$$

Comme u, v doivent satisfaire à (5), les premiers membres se réduisent à τ, $-\tau$ respectivement, et après cela (toute dérivée étant disparue) on a affaire à des identités par rapport à x, y. On en tire les relations

$$(8) \quad \begin{cases} \tau = \dfrac{1}{2}\dfrac{\dot A}{A} + a_{11} - z_1 a_{21}, \\ z_1(a_{11} - z_1 a_{21}) = -a_{12} + z_1 a_{22} + \dot z_1, \\ -\tau = \dfrac{1}{2}\dfrac{\dot A}{A} + a_{11} - z_2 a_{21}, \\ z_2(a_{11} - z_2 a_{21}) = -a_{12} + z_2 a_{22} + \dot z_2. \end{cases}$$

En retranchant la troisième de la première, il vient

$$2\tau = (z_2 - z_1)a_{21},$$

et par suite, en se rappelant que z_1, z_2 sont les racines de (6),

$$(9) \quad \tau = \frac{\sqrt{-D}}{A} a_{21}:$$

le radical n'est déterminé — cela va sans dire — qu'au signe près; il doit bien en être ainsi, puisque rien ne distingue en concept u de v. On remarquera d'ailleurs qu'il existe, à côté de (9), une infinité d'autres déterminations possible de τ. Cela tient à ce que le couple u, v n'est pas univoquement défini par la condition $f = uv$. Tout couple qui la remplit peut être remplacé par λu, v/λ étant une fonction quelconque de t, assujettie à la seule condition de ne pas s'annuler. La valeur (9) de τ devient en conformité

$$\frac{\sqrt{-D}}{A} a_{21} + \frac{\dot\lambda}{\lambda}.$$

Il faut se souvenir en tout cas qu'on a supposé dès le début $A \neq 0$, ce qui est loisible — avons nous dit — chaque fois qu'un au moins des carrés des inconnues figure effectivement dans f. Il serait aisé d'assigner une expression de τ, tenant lieu de (9), pour le cas exceptionnel où A et C s'annuleraient à la fois. Mais cela n'a pas d'intérêt pour notre but. Nous devrons compléter la discussion dans une autre direction. En attendant il suffit de retenir: *Pour $A \neq 0$, on peut bien attribuer à τ la valeur* (9).

5. - Spécifications se rapportant au champ réel. Cas des coefficients périodiques. Condition de stabilité.

Tout ce qui précède ne tient pas compte de conditions de réalité, et s'applique également dans le domaine complexe.

Je supposerai désormais que les coefficients de (1) et de son intégrale f soient des fonctions réelles pour t réel; et je ferai varier t seulement dans ce champ (de $-\infty$ à $+\infty$) ayant en vue l'étude qualitative des solutions $x(t)$, $y(t)$ de (1).

Laissons de côté, ainsi que nous l'avons déjà convenu [n. 3], le cas, où le discriminant D de f pourrait s'annuler parfois pour t réel. On aura alors partout, ou bien $D > 0$ (forme définie), ou bien $D < 0$ (forme indéfinie) [4].

Quoi qu'il en soit, dès que $A \neq 0$, les considérations du n. précédent s'appliquent.

Supposons en particulier que les données ($a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$; A, B, C) soient des fonctions périodiques de t, et qu'on ait $A \neq 0$ (pendant une période entière et par suite) pour toute valeur réelle de t. Les racines z_1, z_2 de (6) résultent alors elle-mêmes des fonctions périodiques, *toujours distinctes et finies*.

Comme la résolution des (7) donne

$$(7') \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{z_2 u - z_1 v}{\sqrt{A}(z_2 - z_1)}, \\ y &= \frac{u - v}{\sqrt{A}(z_2 - z_1)}, \end{aligned} \right.$$

([4]) Dans les applications il arrive presque toujours que les intégrales quadratiques gardent le caractère de forme définie, ou bien indéfinie, quel que soit t. L'éventualité excluse que D puisse s'annuler a donc moins d'intérêt.

on voit que x, y sont des combinaisons de u, v à coefficients périodiques finis. D'ailleurs (7') fournit l'expression de l'intégrale générale des (1), les deux constantes d'intégration étant incluses dans u, v, d'après (5').

On en tire de suite que, pour la stabilité de la solution particulière $x=0$, $y=0$, il faut et il suffit que

$$u = u_0 e^{\int \tau dt}, \qquad v = v_0 e^{-\int \tau dt}$$

restent comprises entre des limites finies, même pour t grandissant indéfiniment, ce qui équivaut à la condition: partie réelle de $\int \tau dt$ finie, quel que soit l'intervalle d'intégration (t_1, t_2). Or τ est une fonction périodique [définie par (9)]. Si T désigne la période

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \tau \, dt ,$$

est une constante (valeur moyenne de τ). La condition ci-dessus revient partant à ce que la valeur moyenne de la partie réelle de τ soit nulle ([5]) (absence de terme séculaire dans le développement en série de FOURIER).

On a de la sorte le théorème suivant: *Condition nécessaire et suffisante pour la stabilité* (*lorsque le coefficients sont périodiques et l'on a toujours* $D \neq 0$, $A \neq 0$) *c'est que s'annule la valeur moyenne de la partie réelle de*

$$\frac{\sqrt{-D}}{A} a_{21} .$$

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, si le coefficient C ne traverse jamais la valeur zéro, on pourrait envisager d'une manière analogue la valeur moyenne de la partie réelle de

$$\frac{\sqrt{-D}}{C} a_{12} .$$

6. - Circonstances où il reste à compléter la discussion. La forme f n'y peut être qu'indéfinie.

Les considérations qui précèdent épuisent le cas où la forme f serait définie ($D > 0$). En effet ni A, ni C peuvent s'annuler dès que $D = AC - B^2$

([5]) C'est classique. D'ailleurs on s'en rend compte immédiatement en partageant l'intervalle d'intégration (t_1, t_2) en portions de longueur T, plus un résidu de longueur moindre que T.

doit rester toujours positif. Pour la même raison

$$\frac{\sqrt{-D}}{A}\,a_{21}\,,$$

est une quantité imaginaire pure. Sa partie réelle est donc nulle, et la condition de stabilité en reste nécessairement satisfaite. On devait bien s'y attendre, d'après une remarque générale remontant à DIRICHLET (comparez n. 1, en note), qui s'applique à tout système différentiel possédant une intégrale définie.

Ceci posé, il nous reste à discuter l'éventualité (se rapportant nécessairement à une forme f indéfinie) que soit A, soit C s'annulent pour quelque valeur de t.

Il va nous convenir de traiter en général, par un procédé différent, le cas d'une forme indéfinie, en développant des formules qui sont valables sous cette hypothèse, sans reserves ultérieures. Comme toutefois ces formules seront un peu moins simples que celles du n. 4, il y aura peut-être avantage à profiter de celles-là autant que possible, ayant recours à celles-ci seulement lorsqu'il arrive que A et C traversent tous les deux quelque zéro.

Je m'appuyerai, dans le but indiqué, sur une réduction intermédiaire de f à la forme canonique.

On sait que, si ϱ_1, ϱ_2 désignent les racines (toujours réelles) de l'équation

$$\begin{vmatrix} A-\varrho & B \\ B & C-\varrho \end{vmatrix} = 0\,, \tag{10}$$

il existe une (et en général une seule) substitution orthogonale

$$\begin{cases} \xi = \quad x\cos\delta + y\sin\delta\,, \\ \eta = -\,x\sin\delta + y\cos\delta\,, \end{cases} \tag{11}$$

moyennant laquelle on a

$$f = \varrho_1\xi^2 + \varrho_2\eta^2\,.$$

Le produit des racines, $\varrho_1\varrho_2 = D$, reste toujours < 0. Il est par tant permis de poser $\varrho_1 = \mu^2$, $\varrho_2 = -\nu^2$, μ et ν étant positives. La forme canonique de f est donc

$$f = \mu^2\xi^2 - \nu^2\eta^2\,, \tag{12}$$

dont la décomposition en deux facteurs,

$$\left\{\begin{array}{l} u = \mu\xi + \nu\eta\,, \\ v = \mu\xi - \nu\eta\,, \end{array}\right. \tag{13}$$

ne soulève plus de difficultés. Il importe de remarquer que μ, ν et δ sont, en même temps que les données, des fonctions continues et périodiques de t.

Ceci posé, fixons pour un instant notre attention sur quelques propriétés des transformations orthogonales, telles que (11), appliquées aux systèmes différentiels (1). Il nous sera ensuite bien aisé de former l'expression explicite de τ (dérivée logarithmique de u) en fonction des coefficients $a_{11}, \ldots, C$.

7. - Propriétés invariantes des systèmes (1) vis-à-vis des transformations orthogonales.

Toute substitution orthogonale (11) transforme naturellement le système différentiel (1) dans un système du même type en ξ, η:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\xi}{dt} = \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta\,, \\[2ex] \dfrac{d\eta}{dt} = \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta\,. \end{array}\right. \tag{14}$$

On pourrait former directement [en dérivant les (11), en remplaçant, dans les seconds membres, dx/dt, dy/dt par les valeurs (1), et substituant enfin, d'après (11), $\xi \cos\delta - \eta \sin\delta$ au lieu de x, $\xi \sin\delta + \eta \cos\delta$ au lieu de y] les expressions des α en fonction des a, de δ et de $\dot{\delta} = d\delta/dt$. Mais il vaut mieux d'éviter tout développement formel par les remarques suivantes:

Puisque la transformation (11) est orthogonale, x^2+y^2 en est un invariant. Il en est de même par conséquent de

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = x\dot{x} + y\dot{y} = a_{11}x^2 + (a_{12}+a_{21})xy + a_{22}y^2 = F(x,y)\,.$$

On a donc l'identité

$$F = a_{11}x^2 + (a_{12}+a_{21})xy + a_{22}y^2 = \alpha_{11}\xi^2 + (\alpha_{12}+\alpha_{21})\xi\eta + \alpha_{22}\eta^2\,,$$

ce qui revient à dire que

$$a_{11}\,, \qquad \frac{a_{12}+a_{21}}{2}\,, \qquad a_{22}\,,$$

se transforment, à la suite de (11), comme les coefficients d'une même forme quadratique F.

Il en résulte en particulier — soit dit en passant — que les expressions

$$a_{11}+a_{22}\,,$$
$$a_{11}a_{22}-\tfrac{1}{4}(a_{12}+a_{21})^2$$

(invariant linéaire et discriminant de la forme susdite) ne changent pas, par effet d'une substitution orthogonale (11), tout en y supposant δ fonction quelconque de t.

Pour compléter la loi de transformation des quatre coefficients du système différentiel [les a de (1), qui se changent dans les α de (14)], il faut se procurer une quatrième relation entre les a et les α (distincte de celles qui proviennent de l'invariance de F). On y parvient très commodement en réfléchissant que la transformation (11) équivaut à une rotation de δ autour de l'origine (dans le sens positif $Ox \to Oy$), amenant le point (ξ, η) en (x, y). Si donc on désigne par r, φ les coordonnées polaires (rayon vecteur et anomalie) du point (ξ, η), celles de (x, y) seront $r, \varphi+\delta$.

Or, des formules

$$\xi = r\cos\varphi\,, \qquad \eta = r\sin\varphi$$

on tire l'identité bien connue

$$\dot{\xi}\eta-\eta\dot{\xi}=r^2\dot{\varphi}\,.$$

On a de même

$$x\dot{y}-y\dot{x}=r^2(\dot{\varphi}+\dot{\delta})\,,$$

d'où

$$x\dot{y}-y\dot{x}=\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}+r^2\dot{\delta}=\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}+\dot{\delta}(\xi^2+\eta^2)\,.$$

En y remplaçant $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ par leurs valeurs (1) et (14), il vient

$$(15)\quad a_{21}x^2+(a_{22}-a_{11})xy-a_{12}y^2=(\alpha_{21}+\dot{\delta})\xi^2+(\alpha_{22}-\alpha_{11})\xi\eta-(\alpha_{12}-\dot{\delta})\eta^2\,.$$

Ce doit être une identité d'après (11). Comme la somme des coefficients des carrés est un invariant, on en déduit

$$a_{21} - a_{12} = \alpha_{21} - \alpha_{12} + 2\dot{\delta} ,$$

qui est justement la quatrième relation explicitée. Pour notre but il suffit d'associer à (15) la forme intégrale f. Si l'on designe par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ses coefficients après la transformation (11), on a l'identité

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \mathcal{A}\xi^2 + 2\mathcal{B}\xi\eta + \mathcal{C}\eta^2 , \tag{16}$$

d'où l'invariant linéaire

$$l = A + C = \mathcal{A} + \mathcal{C} ; \tag{17}$$

l'invariant quadratique (discriminant)

$$D = AC - B^2 = \mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2 ; \tag{18}$$

et l'invariant bilinéaire simultané du système (15), (16) [6]

$$\begin{aligned} j &= a_{21}C - a_{12}A - (a_{22} - a_{11})B = \\ &= (\alpha_{21} + \dot{\delta})\mathcal{C} - (\alpha_{12} - \dot{\delta})\mathcal{A} - (\alpha_{22} - \alpha_{11})\mathcal{B} . \end{aligned} \tag{19}$$

S'il s'agit en particulier de la transformation réduisant f à sa forme canonique (12), on aura

$$l = \mu^2 - \nu^2 , \tag{17'}$$

$$D = - \mu^2\nu^2 , \tag{18'}$$

$$j = - (\alpha_{21} + \dot{\delta})\nu^2 - (\alpha_{12} - \dot{\delta})\mu^2 . \tag{19'}$$

8. - Expression de $\dot{\delta}$ pour la transformation qui réalise la réduction de f à la forme canonique.

L'angle δ est soumis à la condition

$$- (A - C) \sin 2\delta + 2B \cos 2\delta = 0 ,$$

(6) Voir par exemple Clebsch-Lindemann, *Leçons sur la géométrie* (traduction française par Benoist), Paris, Gauthier-Villars, 1879, t. I, p. 267.

comme il résulte immédiatement de ce que, en introduisant dans

$$f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

les valeurs des x, y tirés des (11), le terme rectangle en $\xi\eta$ doit disparaître.

En dérivant par rapport à t, on tire

$$-\{\dot{A} - \dot{C} + 4B\dot{\delta}\} \sin 2\delta + 2\{\dot{B} - (A - C)\dot{\delta}\} \cos 2\delta = 0 .$$

Comme $\sin 2\delta$, $\cos 2\delta$ ne peuvent pas s'annuler à la fois, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A - C & B \\ \dot{A} - \dot{C} + 4B\dot{\delta} & \dot{B} - (A - C\dot{\delta}) \end{vmatrix}$$

doit être nul. Il s'en suit

$$\varDelta\dot{\delta} = (A - C)\dot{B} - (\dot{A} - \dot{C})B ,$$

ayant posé pour abréger

$$\varDelta = (A - C)^2 + 4B^2 . \tag{20}$$

Puisqu'on a affaire à une forme indéfinie ($AC - B^2 < 0$), $\varDelta$ ne saurait s'annuler. On peut donc diviser sans réserves par $\varDelta$, et conclure

$$\dot{\delta} = \frac{(A - C)\dot{B} - (\dot{A} - \dot{C})B}{\varDelta} . \tag{21}$$

9. - Calcul de τ.

La dérivation des (13), en tenant compte des (14), donne

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{\mu}\xi + \dot{\nu}\eta + \mu(\alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta) + \nu(\alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta) , \\ \dot{v} &= \dot{\mu}\xi - \dot{\nu}\eta + \mu(\alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta) - \nu(\alpha_{21} + \xi\alpha_{22}\eta) . \end{aligned}$$

Si on y remplace ξ, η par leurs valeurs $(u+v)/2\mu$, $(u-v)/2\nu$, tirés des (13), il vient

$$\dot{u} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot{\mu}}{\mu} + \frac{\dot{\nu}}{\nu} + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} + \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} u + \\ + \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot{\mu}}{\mu} - \frac{\dot{\nu}}{\nu} + \alpha_{11} - \alpha_{22} - \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} + \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} v ,$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot{\mu}}{\mu} - \frac{\dot{\nu}}{\nu} + \alpha_{11} - \alpha_{22} + \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} - \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} u + \\ + \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot{\mu}}{\mu} + \frac{\dot{\nu}}{\nu} + \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} - \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} v .$$

Mais on sait d'autre part (n. 3) que les second membres doivent se réduire à τu, $-\tau u$ respectivement. On a donc

$$\left\{\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot{\mu}}{\mu} + \frac{\dot{\nu}}{\nu} + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} + \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} , \\ 0 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot{\mu}}{\mu} - \frac{\dot{\nu}}{\nu} + \alpha_{11} - \alpha_{22} - \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} + \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} , \\ 0 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot{\mu}}{\mu} - \frac{\dot{\nu}}{\nu} + \alpha_{11} - \alpha_{22} + \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} - \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} , \\ -\tau &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot{\mu}}{\mu} + \frac{\dot{\nu}}{\nu} + \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} - \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} . \end{aligned}\right.$$

En retranchant de la première de ces identités la quatrième, on tire

$$2\tau = \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} + \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu} ,$$

d'où

$$\tau = \frac{1}{2\mu\nu}\{\alpha_{12}\mu^2 + \alpha_{21}\nu^2\} ,$$

ou bien encore

$$\tau = \frac{1}{2\mu\nu}\{[(\alpha_{12} - \dot{\delta})\mu^2 + (\alpha_{21} + \dot{\delta})\nu^2] + \dot{\delta}(\mu^2 - \nu^2)\} .$$

Le dénominateur peut s'écrire $2\sqrt{-D}$, d'après (18'); la quantité entre les crochets s'identifie avec $-j$, d'après (19'); enfin le coefficient de $\dot{\delta}$ n'est que l, d'après (17'). On a par conséquent

$$\tau = \frac{-j + l\dot{\delta}}{2\sqrt{-D}}. \tag{23}$$

C'est la formule cherchée exprimant τ en fonction explicite des données. On n'a qu'à y remplacer D, j, l, $\dot{\delta}$ par leus valeurs (3) [ou (18)], (19), (17), (21), c'est-à-dire:

$$-D = B^2 - AC,$$

$$-j = a_{12}A - a_{21}C + (a_{22} - a_{11})B,$$

$$l = A + C,$$

$$\dot{\delta} = \frac{(A - C)\dot{B} - (\dot{A} - \dot{C})B}{\varDelta},$$

le dénominateur $\varDelta$ désignant $(A - C)^2 + 4B^2$, d'après (20). J'ai transcrit pour qu'on ait sous les yeux le résultat définitif. Il consent bien d'épuiser sans trop de peine les discussions de stabilité, quoique il soit encore plus simple de s'en tenir à l'expression (9) de τ, si tant est que A ou C ne traversent jamais la valeur zéro.