XXVIII.

SFORZO DI REGIME E SFORZO D'AVVIAMENTO PER VEICOLI TRAINATI

« Atti Ist. Veneto di Sc., lett. ed arti », t. LXXIII (1914),
pp. 931-946.

La resistenza offerta da un veicolo al traino su strada pianeggiante viene di solito valutata [1] come somma di due contributi indipendenti: uno dovuto all'attrito volvente, che si oppone al rotolamento delle ruote sul suolo; l'altro dovuto all'attrito radente, che incontrano i mozzi, girando attorno ai rispettivi assi (rigidamente connessi col telaio del veicolo).

In realtà i due attriti sono concomitanti, e non è a priori lecito prenderli in considerazione separatamente, sommando poi le corrispondenti resistenze passive, ma non c'è alcuna difficoltà a tener debito conto delle due circostanze ad un tempo, sì da fissarne le mutue perturbazioni, e l'ambito in cui queste sono trascurabili. Basta (adottando, ben si intende, le schematizzazioni abituali) una discussione elementare di forze complanari in equilibrio: relativo od assoluto, secondochè si tratta di caratterizzare lo sforzo di regime o quello d'avviamento.

Il risultato della discussione qui appresso istituita è di confermare, come ben prevedibile, le note conclusioni qualitative circa il vantaggio degli assi sottili e delle grandi ruote; e di giustificare altresì, nei riguardi quantitativi, il criterio semplicista della sovrapposizione, anche per strade in pendenza, constatando che, quanto al valore dello sforzo, il divario è, pei bisogni della pratica, effettivamente trascurabile.

Non del pari prevedibili col semplice buon senso sono le due circostanze seguenti, che pur emergeranno dalla nostra discussione:

---

[1] Cfr. per es. CAVALLI, *Elementi di meccanica applicata alle macchine*, Napoli, Trani, 1908, pp. 91-93; od anche KECK, *Vorträge über Mechanik*, Erster Teil, IV edizione curata da L. HOTOPP, Hannover, Helwing, 1913, pp. 299-300.

1) Quando la ruota gira uniformemente, l'appoggio dell'asse sul mozzo è spostato dalla posizione più bassa *non sempre* all'indietro, come la trattazione ordinaria lascia supporre (²), ma talora anche in avanti, e ciò secondo lo stato della strada. Per strade buone (conformemente al caso limite di un attrito volvente addirittura trascurabile) si ha spostamento indietro; ma, su strade cattive, pur nell'ambito dei casi concreti, può l'attrito volvente divenire così forte da provocare uno spostamento dell'appoggio in avanti. In modo preciso, detti r e ϱ i raggi della ruota e del suo mozzo, φ l'angolo d'attrito radente (dinamico) fra mozzo e asse, h il parametro d'attrito volvente della ruota sul piano stradale, si ha spostamento posteriore o anteriore secondochè

$$(r - \varrho)\,\mathrm{tg}\,\varphi \gtrless h\,.$$

2) Sulle strade buone, cioè per $(r - \varrho)\,\mathrm{tg}\,\varphi > h$, lo sforzo d'avviamento è superiore (per lo più notevolmente superiore) allo sforzo di regime; sulle strade cattive $[(r - \varrho)\,\mathrm{tg}\,\varphi < h]$ coincide sensibilmente con esso.

1. - Preliminari.

Sia $r = \overline{OA}$ il raggio di una ruota di vettura, $\varrho = \overline{OB}$ quello del suo mozzo, supponendosi che nel mozzo sia inserito l'asse cilindrico comune anche alla ruota gemella, rigidamente collegato col telaio della vettura.

Sia φ l'angolo di attrito *dinamico* fra asse e mozzo (il vano essendo, come di consueto, ben lubrificato).

Suppongasi che il moto della vettura sia traslatorio uniforme su strada orizzontale, e che sulla ruota graviti una determinata porzione p del peso della vettura, trasmesso al mozzo dall'asse che vi si appoggia.

La ruota si può risguardare come un solido in moto roto-traslatorio uniforme, così che dovranno trovarsi in equilibrio *relativo* le varie forze ad essa applicate, inclusavi, ben si intende, la forza centrifuga.

Semprechè il peso proprio della ruota sia piccolo di fronte a p, sarà lecito prescinderne; e non ci sarà bisogno di considerare le forze centrifughe dei singoli elementi materiali della ruota, perchè (ammesso, ben si intende, che la ruota sia centrata) queste sono due a due eguali e direttamente opposte.

(²) Veggasi ad es. (per citare soltanto un recente trattato di autorevole cultore di meccanica teorica) LAMB: *Statics*, Cambridge, University Press, 1912, p. 65.

In definitiva, si fanno, almeno sensibilmente, equilibrio le sollecitazioni che la ruota subisce da parte del suolo e da parte dell'asse della vettura. Queste sollecitazioni comprendono forza e momento (attrito volvente). Potremo tuttavia trascurare, per l'appoggio dell'asse sul mozzo, l'attrito volvente di fronte al radente.

2. - Specificazione della sollecitazione.

Le azioni da considerare sono quindi:

a) La reazione $\boldsymbol{R}_1$ del suolo, applicata nel punto di contatto A, non necessariamente normale al suolo (verticale), ma comunque contenuta nel piano della ruota.

b) L'attrito di rotolamento fra ruota e suolo, rappresentato da un momento perpendicolare al piano della ruota. Esso si esplica in senso opposto al rotolamento con intensità hp, h essendo il relativo parametro.

c) Lo sforzo $\boldsymbol{R}_2$ trasmesso dall'asse al mozzo della ruota, contenuto esso pure nel piano della ruota. La componente verticale di $\boldsymbol{R}_2$ si riduce, per ipotesi, al peso p. La componente orizzontale, che indicheremo con τ, rappresenta lo *sforzo di trazione*, sotto cui la ruota, nelle condizioni supposte, gira uniformemente, vincendo le resistenze passive. Per rendersene conto, basta pensare che, in virtù del principio di reazione, $-\boldsymbol{R}_2$ è la forza cui sottostà l'asse, solidale colla vettura. D'altra parte tutta la resistenza al moto progressivo della vettura proviene dagli appoggi degli assi sulle ruote. Perciò la componente orizzontale di $-\boldsymbol{R}_2$ è il contributo di resistenza spettante alla nostra ruota (su cui gravita il peso p). Tale componente è quindi opposta al moto, e la sua intensità, che è poi τ, misura lo sforzo di trazione.

Va in pari tempo fissata la circostanza che, avendo $\boldsymbol{R}_2$ componente orizzontale nel senso del moto, la sua *linea d'azione* si trova necessariamente *spostata dalla verticale* pure *nel senso del moto*.

Quale è il punto d'applicazione di $\boldsymbol{R}_2$? In generale non sarà B, punto più basso del mozzo, come accadrebbe se la ruota non girasse.

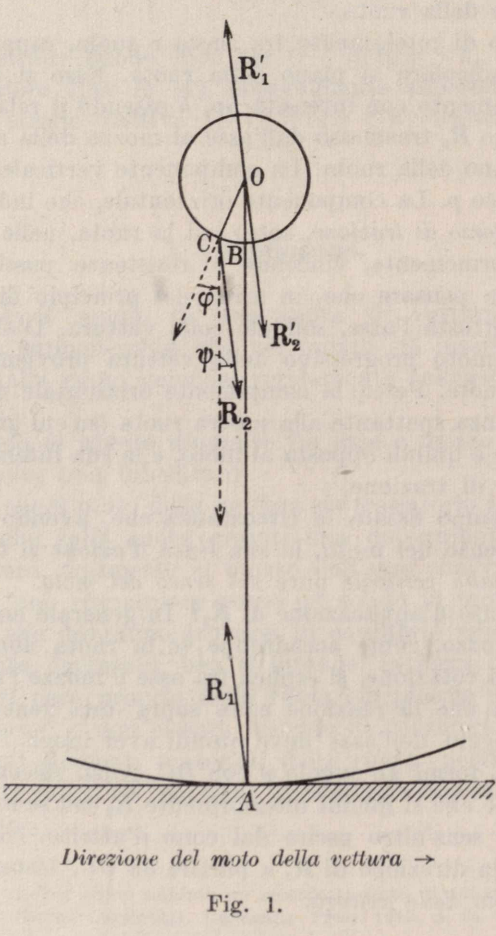
In causa della rotazione, si esplica fra asse e mozzo l'attrito *dinamico*, e questo implica che la reazione cada sopra una generatrice del cono d'attrito. L'appoggio dell'asse deve quindi aver luogo in tale punto C del mozzo che $\boldsymbol{R}_2$ formi un angolo φ con OC. Anzi, siccome per poco che si aumenti τ (cioè che si inclini ulteriormente $\boldsymbol{R}_2$ nel senso del moto della vettura) si deve senz'altro uscire dal cono d'attrito, così è chiaro che, per raggiungere la direzione di $\boldsymbol{R}_2$ a partire da OC, bisogna ruotare di φ, *nel senso del moto della vettura*.

Ben si intende poi che C, pur potendo essere spostato da B, nell'uno o nell'altro senso, secondo i casi (cfr. le fig. 1 e 2), *deve necessariamente cadere al disotto di O*: altrimenti $\boldsymbol{R}_2$ (che ha, per ipotesi, componente verticale discendente eguale a p) non sarebbe rivolta verso l'*interno* del mozzo (come si conviene ad una reazione d'appoggio).

3. - Prima condizione statica. L'obliquità ψ.

Tutto ciò premesso, siamo in grado di esprimere che la sollecitazione piana *a*), *b*), *c*), testè specificata, ottempera alle condizioni di equilibrio.

CASO ORDINARIO



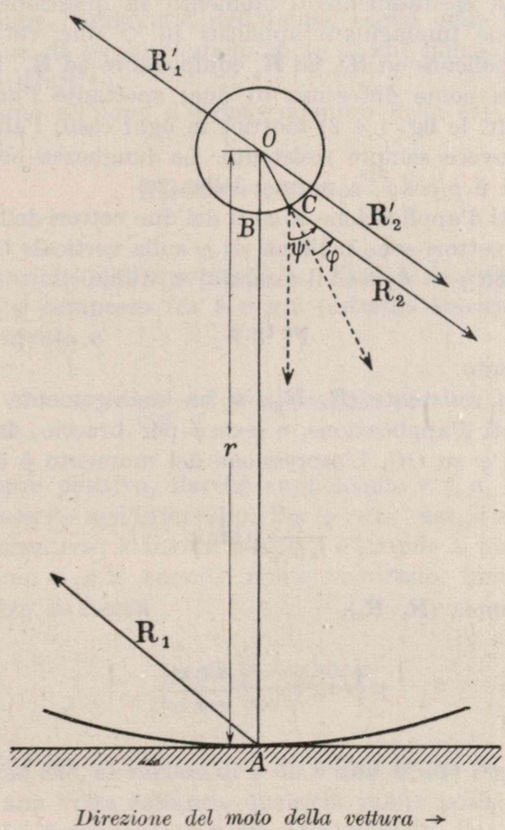
Direzione del moto della vettura →

Fig. 1.

Badiamo in primo luogo all'annullarsi della risultante. Dacchè, oltre alla coppia d'attrito di rotolamento, le sole forze agenti sono $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, queste devono a lor volta costituire una coppia. Per l'equilibrio, tutto si ridurrà ad esprimere che i momenti delle due coppie sono eguali ed opposti. Quella d'attrito è, per sua natura, resistente, di momento hp; dovrà pertanto l'altra essere motrice collo stesso valore assoluto del momento.

Il momento della coppia $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$ dipende in modo semplice dai dati costruttivi e dalla inclinazione sulla verticale (dei due vettori costituenti la coppia). In modo preciso, introdurremo l'obliquità ψ come l'angolo, di cui si deve ruotare attorno a C (fig. 1 e 2) nel verso del moto della vettura, per passare dalla verticale discendente ad $\boldsymbol{R}_2$. *Quest'angolo ψ sarà*

CASO DI FORTISSIMO ATTRITO VOLVENTE



Direzione del moto della vettura →

Fig. 2.

in ogni caso compreso fra 0 *e* $\pi/2$, essendo positive le due componenti di $\boldsymbol{R}_2$: p secondo la verticale discendente, e τ orizzontale nel verso del moto [n. 2, c]. Naturalmente si ha

$$\tau = p \operatorname{tg} \psi , \tag{1}$$

$$R_2 = \frac{p}{\cos \psi} , \tag{2}$$

R_2 designando la lunghezza del vettore $\boldsymbol{R}_2$.

4. - Seconda condizione statica.

Per procurarsi speditamente il momento in questione [della coppia $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$], conviene immaginare applicati in O due vettori eguali ed opposti: $\boldsymbol{R}'_1$ equipollente ad $\boldsymbol{R}_1$, ed $\boldsymbol{R}'_2$ equipollente ad $\boldsymbol{R}_2$. Esso momento si presenta allora come differenza di due: spettante l'uno alla coppia $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}'_2)$ che è (cfr. le fig. 1 e 2) motrice in ogni caso; l'altro alla coppia $(\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}'_1)$ che è invece sempre resistente. La lunghezza comune di tutti i quattro vettori è $p/\cos\varphi$, a norma della (2).

Dacchè i punti d'applicazione A ed O dei due vettori della prima coppia distano di r, e i vettori sono inclinati di ψ sulla verticale OA, sarà manifestamente $\overline{OA} \sin \psi = r \sin \psi$ il braccio, e quindi

$$pr \operatorname{tg} \psi$$

il relativo momento.

Per la coppia resistente $(\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}'_1)$, si ha analogamente $\overline{OC} = \varrho$ come distanza dei punti d'applicazione, e $\varrho \sin \varphi$ per braccio, dacchè [n. 2, c)] $\boldsymbol{R}_2$ è inclinato di φ su OC. L'espressione del momento è dunque

$$-\frac{p}{\cos \psi} \varrho \sin \varphi ,$$

donde, per la coppia $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$,

$$p \left\{ r \operatorname{tg} \psi - \varrho \frac{\sin \varphi}{\cos \psi} \right\} .$$

Eguagliando ad hp, si ha

$$r \operatorname{tg} \psi - \varrho \frac{\sin \varphi}{\cos \psi} = h , \tag{3}$$

e tutto si trova ricondotto a discutere questa equazione che contiene la sola incognita ψ (obliquità delle reazioni) e serve a determinarla. Lo sforzo di trazione ne discende poi subito a norma della (1).

5. - Studio qualitativo della equazione in ψ.

La (3) si trasforma ovviamente in una equazione di secondo grado rispetto a $\operatorname{tg}\psi$. Giova tuttavia premettere una discussione qualitativa della (3) stessa. Ritenuto, come è in pratica, r (molto) maggiore di ϱ, risulterà in primo luogo l'esistenza di una, e una sola, radice ψ, compresa (come si sa che deve accadere [n. 3]) nell'intervallo $0, \pi/2$; e appariranno [n. 8] le proprietà di questa radice praticamente importanti, atte altresì a togliere l'ambiguità del doppio segno nella formula risolutiva della equazione di secondo grado in $\operatorname{tg}\psi$, cui infine ricorreremo [n. 9] per il calcolo effettivo.

Consideriamo all'uopo il primo membro della (3)

$$\Psi(\psi) = r \operatorname{tg}\psi - \varrho \frac{\sin\varphi}{\cos\psi},$$

come una funzione dell'argomento ψ. Essa è manifestamente finita e continua per ψ compreso fra 0 e $\pi/2$ (estremo superiore escluso).

La sua derivata è

$$\frac{1}{\cos^2\psi}\{r - \varrho \sin\varphi \sin\psi\},$$

quantità sempre positiva, dacchè supponiamo $r > \varrho$. La funzione $\Psi(\psi)$ è dunque crescente nell'intervallo. Per $\psi = 0$, essa si riduce a $-\varrho\sin\varphi$, ed è quindi negativa; è invece positiva e grande a piacere per ψ abbastanza prossimo a $\pi/2$, come si rende manifesto, immaginando di scrivere $\Psi(\psi)$ sotto la forma

$$\frac{r\sin\psi - \varrho\sin\varphi}{\cos\psi}.$$

Ne consegue che, al variare di ψ da 0 fino a $\pi/2$, $\Psi(\psi)$ attraversa certo una volta, e una volta soltanto, qualsiasi valore positivo: in particolare il valore h, che figura nel secondo membro della (3). Questa equazione ammette pertanto una ed una sola radice ψ, compresa fra 0 e $\pi/2$.

6. - Spostamento dell'appoggio.

Vale la pena di rilevare che tale radice è più piccola o più grande di φ, secondochè

$$\Psi(\varphi) = (r - \varrho)\operatorname{tg}\varphi$$

supera o no h. Questa circostanza corrisponde al fatto geometrico che il punto d'appoggio C dell'asse sul mozzo si trovi spostato all'indietro oppure in avanti. Per rendersene conto, basta ricordare [nn. 3 e 2, c] che ψ e φ rappresentano rispettivamente l'inclinazione di $\boldsymbol{R}_2$ sulla verticale discendente e su OC, l'una e l'altra contate positivamente quando si ruota verso $\boldsymbol{R}_2$ nel senso del moto. Ne consegue che $\psi - \varphi$ rappresenta l'inclinazione di OC sulla verticale discendente, in senso algebrico, risultando negativa quando OC è spostato, rispetto alla verticale stessa, cioè rispetto ad OB, in senso contrario al moto [fig. 1), positiva, quando OC è spostato in avanti [fig. 2].

7. - Alcuni dati numerici.

Nei casi concreti, che si presentano in pratica, è possibile tanto una disuguaglianza, quanto l'opposta.

Si può infatti ritenere: il raggio r della ruota compreso fra 50 cm e 1 m; $\varrho \leqslant 5$ cm; $\operatorname{tg}\varphi$ compreso fra 0,07 e 0,15, essendo ben lubrificata la camera del mozzo, in cui è inserito l'asse; finalmente h compreso fra mm 10 e mm 70, secondo lo stato della strada, coll'avvertenza però che, per andare al di là dei 30 mm, bisogna che si tratti di strada molto deperita, oppure senza massicciata e fangosa (ovvero inghiaiata).

Il minimo valore di $(r - \varrho)\operatorname{tg}\varphi$ è in conformità

$$(50 - 5) \times 0{,}07 = 3{,}15 \text{ cm},$$

ossia 31,5 mm, quindi superiore al parametro h d'attrito volvente per una strada in buono stato. Ma, per forti valori di h (da 50 a 70 mm), si ha $(r - \varrho) \times 0{,}07 < h$, anche se le ruote sono di dimensioni considerevoli (per es. $r = 70$ cm).

8. - Modo di variare dello sforzo di trazione τ.

Dividiamo i due membri della (3) per r, e poniamo per brevità

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varrho \sin \varphi}{r} = \varepsilon , \\ \\ \dfrac{h}{r} = k , \end{cases}$$

con che *tanto ε, quanto k riescono dei numeri puri*, (parecchio) *inferiori all'unità.* L'equazione definiente ψ assume così l'aspetto

$$(3') \qquad f(\psi, \varepsilon, k) = \operatorname{tg} \psi - \frac{\varepsilon}{\cos \psi} - k = 0 .$$

Consideriamovi ψ come funzione dei due parametri ε e k. Le sue derivate rapporto a questi parametri rimangono definite da

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon}}{\dfrac{\partial f}{\partial \psi}} , \qquad \frac{\partial \psi}{\partial k} = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial k}}{\dfrac{\partial f}{\partial \psi}} .$$

Siccome i numeratori

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = - \frac{1}{\cos \psi} , \qquad \frac{\partial f}{\partial k} = - 1 ,$$

sono negativi per tutti i possibili valori di ψ (compreso fra 0 e $\pi/2$), mentre il denominatore

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{1}{\cos^2 \psi} (1 - \varepsilon \sin \psi) ,$$

è positivo, così si ha sempre

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} > 0 , \qquad \frac{\partial \psi}{\partial k} > 0 .$$

Rimane pertanto provato che la ψ definita dalla (3), e con essa $\operatorname{tg} \psi$, *è funzione crescente dei due argomenti*

$$\varepsilon = \frac{\varrho \sin \varphi}{r}, \qquad k = \frac{h}{r}.$$

Se si ricorda [formula (1)] che lo sforzo di trazione τ è espresso da $p \operatorname{tg} \psi$, si riconosce senz'altro il senso in cui varia l'entità dello sforzo al variare dei dati costruttivi e dell'attrito volvente h. E si è condotti alle conclusioni seguenti, ben note, se pur non rigorosamente acquisite, in base alla trattazione ordinaria:

Lo sforzo di trazione è tanto più piccolo quanto più sono piccoli il parametro h (che figura a fattore in k) e il raggio del mozzo ϱ (che figura in ε); quanto migliore è la lubrificazione, cioè piccolo φ (ε essendo proporzionale a $\sin \varphi$); infine (dacchè sia ε che k sono inversamente proporzionali ad r) quanto più grande è il raggio r della ruota.

9. - Espressione esplicita di τ.

Veniamo finalmente alla determinazione quantitativa di $\operatorname{tg} \psi$. Si ha dalla (3′)

$$\operatorname{tg} \psi - k = \frac{\varepsilon}{\cos \psi},$$

donde, elevando a quadrato,

$$(1 - \varepsilon^2) \operatorname{tg}^2 \psi - 2k \operatorname{tg} \psi - (\varepsilon^2 - k^2) = 0 ;$$

e, risolvendo,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k \pm \varepsilon \sqrt{1 + k^2 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon^2}.$$

Di queste due radici, quella che compete anche alla (3′), e quindi all'originaria (3), deve, come s'è visto al n. precedente, crescere con ε. Ciò esige che si attribuisca al radicale il segno $+$, e dà in definitiva

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k + \varepsilon \sqrt{1 + k^2 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon^2}, \tag{5}$$

dove — ricordiamolo — ε e k hanno i valori (4).

10. - Approssimazione adottata ordinariamente.

Già si è rilevato che ε e k riescono in pratica piuttosto piccoli: pochi centesimi coi dati del n. 7. Se ne possono quindi, con approssimazione largamente sufficiente, trascurare i quadrati. La (5) diviene in conformità

$$\operatorname{tg} \psi = k + \varepsilon \; ; \tag{5'}$$

e lo sforzo di trazione

$$\tau = p \operatorname{tg} \psi = pk + p\varepsilon \, . \tag{1'}$$

Esso si presenta quindi come somma di due addendi: il primo pk è quello stesso che si avrebbe, se intervenisse da sola la resistenza dell'attrito volvente; il secondo $p\varepsilon$ quello che si avrebbe, se intervenisse da solo l'attrito radente fra mozzo e asse.

Per lo più si ammette a priori che i due effetti si sommino, e si stabilisce la (1'), valutando separatamente:

1) $pk = p(h/r)$, in base alla legge fondamentale dell'attrito di rotolamento, ammettendo che lo sforzo di trazione sia sensibilmente applicato all'altezza dell'asse.

2) $p\varepsilon = p\varrho \sin\varphi/r$ colla considerazione seguente:

Suppongasi la nostra ruota sottoposta unicamente alle due reazioni $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ [di cui al n. 2, *a*) e *c*)], ritenendosi nullo l'attrito volvente del suolo. Per l'equilibrio, esse dovranno essere eguali e direttamente opposte, avendo per comune linea d'azione la congiungente dei rispettivi punti d'applicazione A e C.

Badiamo in particolare alla $\boldsymbol{R}_2$. Dacchè essa [n. 2, *c*)] deve possedere componente positiva nel senso del moto, ed è diretta secondo CA, bisognerà che C sia (rispetto alla direzione del moto) più indietro di A. Siamo quindi, come è naturale (essendo nullo l'attrito volvente), nel primo dei due casi indicati al n. 6.

Se poi si ricorda il significato di ψ [n. 3], si vede subito [cfr. la fig. 3] che ψ è pure l'angolo in A della AC (linea d'azione di $\boldsymbol{R}_1$) colla verticale ascendente AO.

D'altra parte (per il fatto che $\boldsymbol{R}_2$ appartiene ad una generatrice del cono d'attrito in C) l'angolo esterno del triangolo OAC, in C, è φ. Si ha quindi dal triangolo suddetto

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{\varrho}{r} \, .$$

Di qua apparisce che ψ è sempre (molto) più piccolo di φ. Supposto φ già tale che si possa trascurare φ^2, assimilando $\cos\varphi$ all'unità, lo stesso

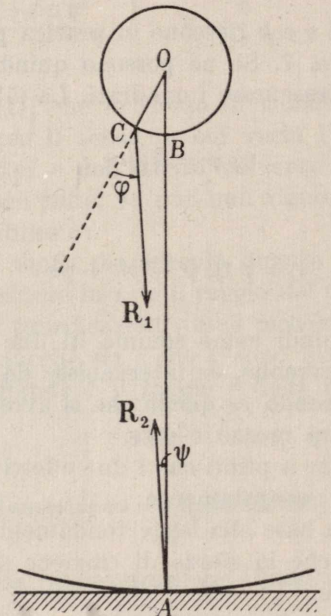


Fig. 3.

varrà *a fortiori* per ψ, e si potrà quindi nella precedente relazione, sostituire $\operatorname{tg}\psi$ a $\sin\psi$, donde

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\varrho \sin\varphi}{r}\,.$$

Ne consegue lo sforzo di trazione $p \operatorname{tg}\psi$ sotto la forma $p\varrho \sin\varphi / r$, c. d. d.

11. - Sforzo d'avviamento. Raffronto collo sforzo di regime.

Se, in luogo del moto rototraslatorio di regime, si considera la fase incipiente, si vede subito che il minimo sforzo di trazione τ_0, capace di determinare il movimento, è, sulle strade buone, assai maggiore di τ. Valutiamo all'uopo τ_0, identificando per semplicità l'attrito di primo distacco fra ruota e mozzo a quello dinamico. Dacchè si parte dalla quiete, l'appoggio ha luogo in B; d'altra parte, affinchè possa cominciare lo scorrimento del mozzo rispetto all'asse, è d'uopo che la reazione d'appoggio $\boldsymbol{R}_2$ abbia una componente tangenziale eguale almeno a $p \operatorname{tg} \varphi$. Ne consegue $\tau_0 \geqslant p \operatorname{tg} \varphi$. Il momento di $\boldsymbol{R}_2$ (o, ciò che è lo stesso, della sua componente tangenziale) rispetto ad A vale

$$\tau_0(r - \varrho) .$$

Se $(r - \varrho) \operatorname{tg} \varphi$ supera h (*strade buone*, cfr. n. 7), basta una trazione appena appena superiore a $p \operatorname{tg} \varphi$ per rendere possibile il rotolamento. Si può pertanto ritenere lo sforzo d'avviamento misurato da $p \operatorname{tg} \varphi$, che è [n. 6] superiore a $p \operatorname{tg} \psi$, sforzo di regime.

Nell'altro caso, cioè per $h > (r - \varrho) \operatorname{tg} \varphi$, una trazione di intensità leggermente superiore a $p \operatorname{tg} \varphi$ (facendo uscire $\boldsymbol{R}_2$ dal cono d'attrito in B) rende bensì impossibile l'equilibrio, ma la perturbazione si esplica soltanto in un piccolo scorrimento dell'asse entro il mozzo, per cui l'appoggio si sposta in avanti, diciamo da B in C [cfr. la fig. 2], senza che si inizi ancora il rotolamento.

Affinchè la ruota cominci effettivamente a girare, bisogna che sia superato il momento hp d'attrito volvente. Si riconosce ovviamente che la trazione limite all'uopo necessaria viene a coincidere con quella di regime (in questo caso maggiore di $p \operatorname{tg} \varphi$). Si tratta infatti di esprimere che l'equilibrio *assoluto* è sul punto di essere turbato, l'appoggio essendo in C, $\boldsymbol{R}_2$ sul relativo cono d'attrito, ecc.; in questa condizione di cose rimangono applicabili le considerazioni dei nn. precedenti, non essendovi divario dall'assoluto al relativo, dacchè [n. 1] non ha influenza la forza centrifuga, e si risguarda sensibilmente lo stesso nei due casi il valore numerico del coefficiente d'attrito.

12. - Strade in pendenza.

È assai facile riconoscere come si modificano i risultati per strade inclinate sull'orizzonte di un angolo i, nell'ipotesi che seguiti ad essere verticale il piano della ruota (la sua traccia segnando la linea di massima pendenza sul piano stradale).

Basta pensare che le condizioni di equilibrio, di cui ai nn. precedenti, sussistono inalterate purchè si attribuisca a p e a τ il significato di componenti *normale* (verso il basso) e *parallela* alla strada, componenti che divengono rispettivamente verticale e orizzontale, per $i = 0$.

D'altra parte, detta p^* la porzione di peso della vettura che si scarica sulla ruota considerata (con che p^* rappresenta ora ciò che era p nei nn. precedenti), dovremo ovviamente identificare p^* colla componente verticale di $\boldsymbol{R}_2$, la quale è

$$p \cos i \mp \tau \sin i ,$$

come si vede subito, sommando il contributo della componente p (normale alla strada verso il basso) con quello della componente τ parallela alla strada nel senso del moto). Il segno superiore vale per il moto ascendente, il segno inferiore per il moto discendente.

Sostituendo a τ il suo valore (1), avremo

$$p^* = p(\cos i \mp \operatorname{tg} \psi \sin i) ,$$

che consente di esprimere p per p^* sotto la forma

$$(6) \qquad p = \frac{p^*}{\cos i \mp \operatorname{tg} \psi \sin i} .$$

Quanto allo sforzo di regime, esso non è senz'altro τ, come sulla strada pianeggiante, ma τ diminuito della componente del peso p^* nella direzione del moto. Designando con τ^* tale sforzo, sarà manifestamente

$$\tau^* = \tau \pm p^* \sin i ,$$

dovendosi prendere qui ancora il segno superiore nel moto ascendente, il segno inferiore in quello discendente.

In virtù delle (1), (6), l'espressione di τ^* si scrive

$$(7) \qquad \tau^* = p^* \left\{ \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos i \mp \operatorname{tg} \psi \sin i} \pm \sin i \right\} ,$$

che è la cercata espressione dello sforzo di trazione, in funzione del peso p^* sopportato dalla ruota e degli altri dati della questione (l'inclinazione i, e quelli inclusi in ψ).

L'inclinazione i è quasi sempre abbastanza piccola da poterla trattare come quantità di primo ordine. Ma anche $\operatorname{tg} \psi$ [n. 10] si può considerare di prim'ordine. Così stando le cose, il denominatore nel primo termine della (7) si identifica coll'unità, e lo sforzo di regime si presenta come somma di due termini: $p^* \operatorname{tg} \psi$ e $\pm p^* \sin i$. Il primo è quello stesso che si avrebbe su strada pianeggiante; il secondo è eguale in valore assoluto alla componente del peso secondo la strada, e si aggiunge al primo nelle salite, mentre lo attenua nelle discese.

Ciò si enuncia di solito senza alcuna preventiva discussione, risguardando senz'altro applicabile il criterio di sovrapposizione degli effetti. Quanto s'è detto or ora serve insieme a giustificarlo razionalmente e a fissarne i limiti di validità.