XXIX.

DEDUZIONE RIGOROSA DI UNA RELAZIONE FONDAMENTALE NELLA TEORIA DEL CALORE RAGGIANTE

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XXIII_1$ (1914_1), pp. 12-21.

Alludo alla relazione

$$\varepsilon = K\alpha \,, \tag{I}$$

valida in ogni punto M di un generico mezzo isotropo in equilibrio di irraggiamento: ε vi rappresenta il coefficiente di emissione in M (riferito all'unità di volume irraggiante, talchè $4\pi\varepsilon$ è la quantità di energia irraggiata tutt'intorno nell'unità di tempo); α il coefficiente di assorbimento, pure in M (per unità di lunghezza); K l'intensità specifica, e quindi πK il potere emissivo (riferito all'unità di superficie) spettante ad uno qualunque degli ∞^2 elementi superficiali uscenti da M. Si intende che ε, α, K vanno presi tutti e tre per radiazioni di una stessa frequenza; ovvero tutti e tre per l'intero spettro; più generalmente, del resto, va ritenuto che ci atteniamo al PLANCK (¹) per definizioni e postulati (²).

Il procedimento (³), attraente per geometrica semplicità, di cui si è valso l'illustre Autore per stabilire la (I), si appoggia sopra un'ipotesi addizionale, intuitivamente plausibile, ma concettualmente complessa ed esuberante. Ecco di che si tratta. Si fissa in primo luogo un generico elemento di volume S circostante a M, e una superficie sferica Σ col centro in S, di raggio abbastanza grande perchè, rispetto ad esso, si possano trattare come infinitesime le dimensioni di S. Si valuta poi l'energia

(¹) *Theorie der Wärmestrahlung*, cap. I, 2ª ediz., Leipzig, Barth, 1913.

(²) Il PLANCK considera soltanto mezzi omogenei. Anche la nostra deduzione della (I) sarà svolta in questa ipotesi. Ma ciò non lede la generalità, perchè l'estensione a mezzi eterogenei (isotropi) apparisce poi ovvia. Cfr. il n. 8 del presente scritto.

(³) Op. cit., §§ 24-26.

assorbita da S nell'unità di tempo, risguardandola irraggiata da Σ, *ed ammettendo inoltre che essa giunga in S senza attenuazione, nè rinforzo.* Ciò si giustifica in base all'ipotesi addizionale suaccennata, che può enunciarsi così: in condizioni di equilibrio termodinamico, ogni pennello elementare di raggi, nel passaggio da Σ ad S, tanto perde per assorbimento (ed eventuale dispersione) quanto acquista per emissione (e dispersione). Debbo tale schiarimento alla personale cortesia del prof. PLANCK e gliene attesto il mio grato animo, venendo ormai allo scopo della presente Nota. Esso è di ricavare la relazicne (1) [4], mediante una dimostrazione *matematica* [5] che eviti la ipotesi speciale di PLANCK, sfruttando unicamente (accanto alle premesse generali) la stazionarietà dell'irraggiamento globale di una (qualsiasi) porzione S del mezzo. Vi si perviene nel modo più naturale, esprimendo, a mezzo degli integrali, che direttamente traducono i postulati fisici, la eguaglianza fra l'energia emessa e quella assorbita da S nell'unità di tempo. La (I) ne discende per materiale trasformazione di integrali.

Di questa trasformazione mi occuperò in primo luogo (nn. 1-5), stabilendo anzi una formula alquanto più generale, che mi sembra specifica per la teoria matematica dell'irraggiamento.

1. - Notazioni.

Sia S un campo a tre dimensioni, σ il relativo contorno. Rappresentino: P e P' due punti qualisivogliano di S, o, in particolare, di σ; x, y, z e x', y', z' le rispettive coordinate; $r = |\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}|$ la distanza $\overline{PP'}$; dS e dS' due elementi di campo contenenti P o, rispettivamente, P'. Qualora in particolare P e P' cadano sul contorno, designeranno: $d\sigma$, $d\sigma'$ due elementi di superficie ad essi circostanti; n, n' le relative normali vòlte verso l'interno del campo; (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ i loro coseni direttori; $\widehat{nr}$ l'angolo in P, formato da n con r, o, più pre-

---

[4] A dir vero, l'intervento di K non è indispensabile per arrivare alla legge di KIRCHHOFF. Ciò risulta dalle belle ricerche di HILBERT (cfr. *Begrundüng der elementaren Strahlungstheorie*, « Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen », 1912, Heft 7). Ma non scompare per questo l'importanza fisica della nozione di potere emissivo, e l'interesse di fissarne l'espressione in termini di ε e di α.

[5] Tale non può ritenersi la considerazione che si legge nell'articolo del WIEN, *Theorie der Strahlung* (« Enc. der Math. Wiss. », V, 3, 2, p. 288). Essa contempla infatti un semispazio indefinito. E, per passare alla (I), nella sua accezione generale, bisogna ancora ammettere che, in un punto qualunque di un mezzo isotropo in equilibrio di irraggiamento, le cose vanno come nel caso tipico di un semispazio limitato da un piano indefinito. Ora ciò non mi sembra, nemmeno fisicamente, evidente, dato che il risultato relativo al caso tipico non scende da comportamento locale, ma è desunto per essenziale contributo di tutto il semispazio.

cisamente col vettore $P'-P$ (che va da P a P'); $\widehat{n'r}$ l'angolo in P' di n' con $P-P'$.

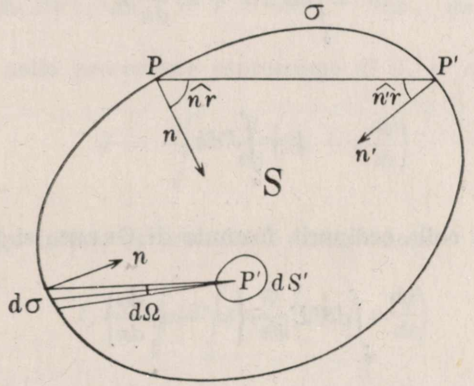

Fig. 1.

Sarà manifestamente (il simbolo Σ rappresentando la somma dei termini che si ottengono da quello scritto per sostituzione circolare delle terne di lettere x, y, z; x', y', z'; α, β, γ; α', β', γ')

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dn} = \Sigma \dfrac{\partial r}{\partial x}\,\alpha = \Sigma \dfrac{x-x'}{r}\,\alpha = -\cos\widehat{nr}\,, \\[2ex] \dfrac{dr}{dn'} = \Sigma \dfrac{\partial r}{\partial x'}\,\alpha' = \Sigma \dfrac{x'-x}{r}\,\alpha' = -\cos\widehat{n'r}\,. \end{cases}$$

2. - Una trasformazione di integrali.

Si consideri un integrale (quadruplo) del tipo

$$(2)\qquad I = \int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}\cdot r\,\frac{d\varphi}{dr}\,,$$

in cui φ designa una funzione del solo argomento r, uniforme e continua insieme con le due prime derivate.

In virtù delle (1), la funzione integranda può essere scritta

$$\frac{d\varphi}{dn}\,\Sigma(x'-x)\alpha'\,,$$

talchè, posto, per brevità,

$$J = \int_\sigma d\sigma' \Sigma (x' - x) \frac{d\varphi}{dn} \alpha' ,$$

la (2) equivale a

$$(2') \qquad I = \int_\sigma J \, d\sigma .$$

L'integrale J, colla ordinaria formula di GREEN, si trasforma in

$$-\int_S dS' \Sigma \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ (x' - x) \frac{d\varphi}{dn} \right\} .$$

Eseguendo la derivazione e badando all'indipendenza dei due operatori $\partial/\partial x'$ e $d/dn = \Sigma \alpha (\partial/\partial x)$, si ha

$$J = -3 \int_S \frac{d\varphi}{dn} dS' - \int_S dS' \Sigma (x' - x) \frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} .$$

Notiamo ora che, per essere

$$\frac{d}{dn} (x' - x) = -\alpha ,$$

sussiste l'identità

$$\Sigma (x' - x) \frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{d}{dn} \Sigma (x' - x) \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + \Sigma \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x'} ,$$

e teniamo d'altra parte presente che, dipendendo φ dalle coordinate esclusivamente pel tramite di r, si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x'} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{x' - x}{r} ,$$

nonchè

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} .$$

Con ciò, l'identità diviene

$$\Sigma(x'-x)\frac{d}{dn}\frac{\partial\varphi}{\partial x'}=\frac{d}{dn}\Sigma\frac{(x'-x)^2}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\Sigma\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{d}{dn}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)-\frac{d\varphi}{dn};$$

e, sostituendo nella precedente espressione di J, si ricava

$$J=-\int_s dS'\frac{d}{dn}\left(2\varphi+r\frac{d\varphi}{dr}\right).$$

La $(2')$ porge infine, invertendo le integrazioni,

$$(2'') \qquad I=-\int_s dS'\int_\sigma d\sigma\frac{d}{dn}\left(2\varphi+r\frac{d\varphi}{dr}\right).$$

La formula di trasformazione, che volevamo stabilire, risulta dall'eguagliare i secondi membri di (2) e $(2'')$. Essa è quindi:

$$(3) \qquad \int_\sigma d\sigma\int_\sigma d\sigma'\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}\cdot r\frac{d\varphi}{dr}=-\int_s dS'\int_\sigma d\sigma\frac{d}{dn}\left(2\varphi+r\frac{d\varphi}{dr}\right).$$

3. - Corollarii.

Nel primo membro della (3) la funzione integranda dipende, in modo simmetrico, da due punti P e P' del contorno. Si può facilmente attribuire anche al secondo membro una forma simmetrica, rispetto alle coppie P, P' del campo. Basta applicare all'integrale esteso a σ la formula classica di GREEN che lo trasforma in integrale di spazio. E si ha (invertendo ancora le integrazioni, per uniformità col primo membro):

$$(4) \qquad \int_\sigma d\sigma\int_\sigma d\sigma'\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}\cdot r\frac{d\varphi}{dr}=\int_s dS\int_s dS'\Delta_2\left(2\varphi+r\frac{d\varphi}{dr}\right),$$

dove Δ_2 designa l'operatore di LAPLACE rispetto alle coordinate x, y, z del punto P. Si avverta, però, che, trattandosi di una funzione del solo argomento r, l'operatore Δ_2 si riduce notoriamente a

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right).$$

Per lo scopo che abbiamo in vista, giova riprendere la (3) e presentarla sotto aspetto lievemente modificato, ponendo

$$r\frac{d\varphi}{dr} = f\,,$$

ed eseguendo, nel secondo membro, la derivazione rispetto ad n.

Dacchè, per una funzione della sola r, è

$$\frac{d}{dn} = \frac{dr}{dn}\frac{d}{dr} = -\cos\widehat{nr}\,\frac{d}{dr}\,,$$

si ha

$$-\frac{d}{dn}\left(2\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}\right) = \cos\widehat{nr}\left\{2\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)\right\},$$

ossia, sostituendo f a φ,

$$-\frac{d}{dn}\left(2\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}\right) = \cos\widehat{nr}\left(\frac{2}{r}f + \frac{df}{dr}\right).$$

La (3) equivale pertanto a

$$\int_\sigma d\sigma\int_\sigma d\sigma'\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}\cdot f(r) = \int_S dS'\int_\sigma d\sigma\cos\widehat{nr}\cdot\left(\frac{2}{r}f + \frac{df}{dr}\right), \tag{5}$$

dove f può ritenersi funzione arbitraria di r, continua insieme con la sua derivata prima: ciò in virtù di $f = r(d\varphi/dr)$, e delle ipotesi fatte su φ [n. 2].

Veramente, con tali ipotesi, la $f = r(d\varphi/dr)$ imporrebbe ulteriormente a f la condizione di annullarsi (di prim'ordine almeno) per $r = 0$. Ma si vede subito che ciò è inessenziale, appoggiandosi sulla seguente:

4. - Osservazione.

La formula (3) seguita a sussistere, anche se φ diviene infinita d'ordine non superiore al primo, per $r = 0$. Rimane infatti legittimo tutto ciò che si è detto, quando φ si intendeva finita.

Seguita quindi a sussistere anche la (5), con una f, sia semplicemente finita per $r = 0$ (il che corrisponde ad un infinito logaritmico della φ), sia infinita di prim'ordine (il che corrisponde ad analoga singolarità di φ).

Quanto alla (4), se l'ordine di infinito di φ, per $r = 0$, è inferiore ad 1, essa è ancora legittima. Ma se φ diviene infinita di prim'ordine, la trasformazione di

$$\int_\sigma d\sigma \frac{d}{dn}\left(2\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}\right),$$

in integrale di volume richiede che si consideri a parte il termine polare C/r (C costante). Ciò reca in definitiva al secondo membro della (4) un termine addizionale $4\pi CS$ (S volume del campo designato colla stessa lettera).

5. - Casi particolari notevoli.

Per quanto abbiamo ora osservato, si può prendere, nella (3), $\varphi = -1/r$. Il primo membro, allora, è

$$\int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r},$$

e il secondo

$$\int_S dS' \int_\sigma d\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn}.$$

Dacchè r vi rappresenta la distanza fra un punto P di σ e un generico punto P' interno alla superficie, l'integrale

$$\int_\sigma d\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn},$$

vale 4π. Si ricava, pertanto,

$$\frac{1}{4\pi}\int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r},$$

come *espressione del volume limitato da una generica superficie chiusa* σ.

Pongasi, nella (5),

$$f = \frac{1 - e^{-\alpha r}}{r^2},$$

con α costante. Ciò è ancora legittimo, dacchè f ha un infinito di primo ordine per $r = 0$, rimanendo, del resto, ovunque regolare.

Avremo l'identità

$$(6) \qquad \int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r^2} (1 - e^{-\alpha r}) = \alpha \int_S dS' \int_\sigma d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r},$$

che tra un momento ci renderà segnalato servigio.

6. - Applicazione al regime stazionario del calore raggiante in un mezzo omogeneo isotropo.

Sia S una porzione di tale mezzo, limitata da un contorno *convesso* σ; ε il coefficiente di emissione, che sarà da ritenersi costante, trattandosi di mezzo omogeneo in regime stazionario.

Riportandoci, per le notazioni, al n. 1, fissiamo un qualsiasi punto P' di S e un circostante elemento dS' [cfr. la fig. 1]. Sia poi $d\Omega$ l'ampiezza (angolo solido misurato sulla sfera di raggio 1) di un generico cono elementare spiccato da P'; $d\sigma$ l'elemento del contorno σ (unico, dacchè il contorno si suppone convesso) segato da detto cono elementare. Manifestamente,

$$d\Omega = d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2};$$

e la quantità di energia, inviata nell'unità di tempo da dS', entro il cono elementare $d\Omega$, vale

$$\varepsilon \, dS' \, d\Omega .$$

Questa energia esce dal campo attraverso $d\sigma$: ma non integralmente, in causa dell'assorbimento. Se α è il relativo coefficiente per unità di lunghezza, dato che il cammino percorso è rappresentato da r, $e^{-\alpha r}$ sarà la frazione di $\varepsilon \, dS' \, d\Omega$ che va fuori del campo.

Di tutta l'energia emanata da dS' secondo le varie direzioni (nell'unità di tempo), ne esce da S (pure nell'unità di tempo)

$$\varepsilon\, dS' \int\limits_{\text{esteso alla sup. sferica di raggio 1}} e^{-\alpha r}\, d\Omega = \varepsilon\, dS' \int\limits_{\sigma} d\sigma\, \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2}\, e^{-\alpha r}\,.$$

In totale, sommando cioè i contributi di tutti i dS', la perdita di energia, subìta S nell'unità di tempo, ammonterà a

$$E = \varepsilon \int\limits_S dS' \int\limits_\sigma d\sigma\, \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2}\, e^{-\alpha r}\,. \tag{7}$$

In condizioni di regime (equilibrio termodinamico), a questa perdita deve far riscontro un'eguale somministrazione dall'esterno, per flusso attraverso gli elementi di contorno.

Se K rappresenta l'intensità specifica, ogni $d\sigma$ irradia verso $d\sigma'$, nell'unità di tempo, la quantità di energia

$$K\, d\sigma\, d\sigma'\, \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r^2} \;\text{(6)}\,.$$

Di questa, però, soltanto la frazione $1 - e^{-\alpha r}$ rimane entro il campo.

Complessivamente, per effetto dei mutui scambî, si ha come espressione — da eguagliarsi ad E — dell'acquisto di energia:

$$E = K \int\limits_\sigma d\sigma \int\limits_\sigma d\sigma'\, \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r^2}\, (1 - e^{-\alpha r})\,. \tag{8}$$

In virtù della (6), si può invece scrivere

$$E = K\alpha \int\limits_S dS' \int\limits_\sigma d\sigma\, \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2}\, e^{-\alpha r}\,, \tag{8'}$$

e il materiale confronto di (7) e (8') porge

$$\varepsilon = K\alpha\,, \qquad \text{c. d. d.} \tag{I}$$

(6) Planck, loc. cit., § 20.

7. - Validità delle formule (7) ed (8) anche per campi non convessi.

Le espressioni (7) ed (8) dell'energia sottratta, o rispettivamente comunicata ad S, nell'unità di tempo, sono state dedotte nell'ipotesi che il campo sia limitato da un contorno convesso. Tale limitazione è però inessenziale. Per rendersene conto, basta seguire passo passo il procedimento del n°. precedente, tenendo debito conto delle modificazioni richieste dalla maggiore generalità del contorno.

Riferiamoci, per fissare le idee, al calcolo dell'energia sottratta, cominciando coll'osservare che un cono elementare di vertice P' può incontrare il contorno σ più volte, sempre però un numero *dispari*, per es. (cfr. la fig. 2) nelle areole 1, 2, 3.

I relativi $(d\sigma \cos \widehat{nr})/r^2$ sono eguali in valore assoluto, ma alternativamente positivi e negativi (positivi nelle areole di egresso, come 1 e 3; negativi in quelle di ingresso, come 2). La misura dell'angolo solido $d\Omega$ è espressa, in ogni caso, da

$$\frac{d\sigma \, |\cos \widehat{nr}|}{r^2} \; ;$$

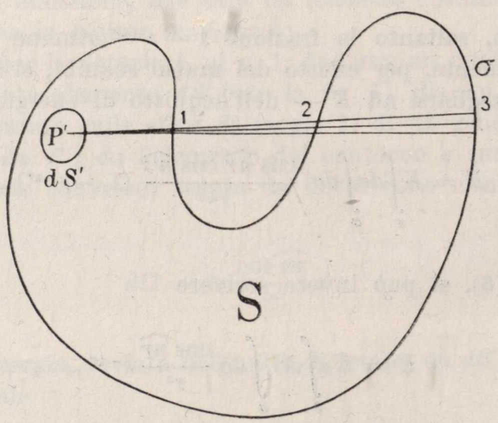

Fig. 2.

si può quindi attribuirle anche la forma

$$d\Omega = \mathbf{S} \frac{d\sigma \cos \widehat{nr}}{r^2} \, ,$$

la somma essendo estesa a tutte le areole superficiali incontrate dal cono elementare. Ed è facile riconoscere, sommando i contributi (alternativamente positivi e negativi) provenienti dalle singole areole, che l'energia sfuggente da S nell'unità di tempo, attraverso il detto cono, vale

$$\varepsilon\, dS' \int \frac{d\sigma \cos \widehat{nr}}{r^2}\, e^{-\alpha r}\,.$$

L'integrazione, estesa ai varî coni elementari e ai varî dS', riporta poi subito alla (7); ecc.

8. - Mezzi eterogenei (isotropi).

Il carattere puramente locale della (I) ne lascia presumere la validità anche per mezzi eterogenei a comportamento isotropo. Lo si constata agevolmente, supponendo ε, α, K funzioni continue del posto; e così pure la velocità c con cui si propaga l'energia; tale di più la c che i raggi, che ne rimangono definiti in base al principio di FERMAT, ammettano tangenti variabili con continuità.

Con ciò, infatti, fissato un generico punto M del mezzo, è lecito di delimitare attorno ad M un campo S così piccolo che l'emissione, la propagazione e l'assorbimento dell'energia differiscano tanto poco quanto si vuole da quello che avverrebbe in un ipotetico mezzo omogeneo nel quale ε, α, K, c avessero dovunque le determinazioni ε_M, α_M, K_M, c_M, che ad esse spettano in M. Più precisamente si può dimostrare che l'energia perduta, per emissione, da S nell'unità di tempo, si presenta in definitiva sotto la forma

$$S(\varepsilon_M + \delta)\,,$$

δ convergendo a zero con S (si intenda colla massima dimensione di S); quella acquistata, per assorbimento, sotto la forma,

$$S(K_M \alpha_M + \delta^*)\,,$$

δ^* convergendo pure a zero colla massima dimensione di S. Eguagliando, dividendo per S, e passando poi al limite, si conclude giusta l'asserto.