XXXIII.

SULLA REGOLARIZZAZIONE DEL PROBLEMA PIANO DEI TRE CORPI [1].

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. $XXIV_2$ (1915_2), pp. 61-75.

Le equazioni del problema dei tre corpi (per fissar le idee, sotto forma canonica, in cui sieno assunte come funzioni incognite del tempo t le coordinate e le componenti delle quantità di moto) costituiscono notoriamente un sistema differenziale regolare finchè le posizioni dei tre corpi sono distinte.

Il comportamento del moto in prossimità di un urto fu in questi ultimi tempi oggetto di importanti ricerche, le quali culminano, si può dire, nella scoperta, dovuta al sig. SUNDMAN [2], che (nel caso generale, in cui il momento risultante delle quantità di moto è diverso da zero) il moto è prolungabile analiticamente anche al di là di un urto, non ostante la singolarità delle equazioni differenziali. Questo risultato rivela il carattere inessenziale (dal punto di vista matematico) della detta singolarità, e induce a domandarsi se non sia possibile di farla scomparire con mezzi diretti: intendo rimanendo nell'ambito dei sistemi dinamici, con opportuni cambiamenti di variabile indipendente e di funzioni incognite.

Nel caso particolare del problema ristretto, mostrai, alcuni anni or sono [3], come l'intorno d'uno dei due corpi di massa finita si possa regolarizzare con una trasformazione affatto elementare (e atta a conservare la forma canonica).

Qualche ulteriore accorgimento — di cui la presente Nota — consente addirittura la regolarizzazione completa per il problema piano dei

---

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1915.

(2) *Mémoire sur le problème des trois corps*, « Acta Mathematica », tomo 36, 1912, pp. 105-179.

(3) *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*, « Acta Mathematica », tomo 30, 1906, pp. 306-327 [in queste « Opere »: vol. secondo, XXIII, pp. 419-439].

tre corpi. In modo preciso si constaterà che si possono scegliere i parametri determinativi dello stato di moto e la variabile indipendente, per guisa che le equazioni differenziali del problema offrano comportamnto regolare anche per posizioni coincidenti di due dei tre corpi (rimanendo esclusa l'eventualità di una collisione generale, tostochè si supponga che non si annulli la costante delle aree): beninteso, senza perdere la forma canonica, nè la regolarità per ogni altro stato di moto.

La restrizione che si tratti di moto piano sembra concettualmente irrilevante, e si è tratti a presumere che analoga regolarizzazione possa raggiungersi anche per il problema generale. Ho incontrato finora qualche difficoltà nella costruzione delle trasformazioni regolarizzanti; ma non dispero di superarla con studio ulteriore.

1. - Formule di Lagrange e di R. Ball.

Siano P_ν $(\nu = 0, 1, 2)$ i tre corpi, m_ν le loro masse, O il baricentro. Introduciamo i tre vettori

$$\boldsymbol{R}_\nu = P_\nu - O \qquad (\nu = 0, 1, 2)$$

e le loro differenze (corrispondenti ai tre lati del triangolo $P_0P_1P_2$)

$$(1) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{r}_0 = P_2 - P_1 = \boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1\,, \\ \boldsymbol{r}_1 = P_0 - P_2 = \boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{R}_2\,, \\ \boldsymbol{r}_2 = P_1 - P_0 = \boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_0\,, \end{cases}$$

convenendo di designarne le lunghezze con R_0, R_1, R_2, o rispettivamente r_0, r_1, r_2.

Sia poi P un punto generico, e si ponga

$$\boldsymbol{d}_\nu = P_\nu - P\,, \qquad \boldsymbol{d} = O - P\,,$$

intendendo altresì che d_ν e d rappresentino le lunghezze di questi vettori (distanze di P da P_ν e dal baricentro O).

Si ha ovviamente

$$\boldsymbol{d}_\nu = P_\nu - P = (P_\nu - O) + (O - P) = \boldsymbol{R}_\nu + \boldsymbol{d}\,,$$

da cui, formando $\sum_{0}^{2}{}_\nu\, m_\nu \boldsymbol{d}_\nu \times \boldsymbol{d}_\nu$, e tenendo conto che, per essere O il baricentro,

$$\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \boldsymbol{R}_\nu = 0\,, \tag{2}$$

si ricava la formula di LAGRANGE

$$\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu d_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu R_\nu^2 + md^2$$

(m designa la massa complessiva $m_0 + m_1 + m_2$ dei tre punti P_ν).

Facciamo coincidere P, successivamente, con P_0, P_1, P_2, scrivendo per brevità J in luogo di $\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu R_\nu^2$ (momento d'inerzia polare rispetto al baricentro). Avremo

$$\begin{cases} m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2 = J + mR_0^2\,, \\ m_2 r_0^2 + m_0 r_2^2 = J + mR_1^2\,, \\ m_0 r_1^2 + m_1 r_0^2 = J + mR_2^2\,. \end{cases}$$

Moltiplichiamo queste equazioni ordinatamente per m_0/m, m_1/m, m_2/m, e sommiamo, ponendo

$$m_0^* = \frac{m_1 m_2}{m}\,, \qquad m_1^* = \frac{m_2 m_0}{m}\,, \qquad m_2^* = \frac{m_0 m_1}{m}\,. \tag{3}$$

Ne scende la relazione notevole

$$J = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu R_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^* r_\nu^2\,. \tag{4}$$

In modo sostanzialmente identico si stabilisce una espressione, dovuta a R. BALL ([4]), della forza viva dei tre corpi.

Si consideri infatti il loro moto riferito al baricentro O, o, più esattamente, ad un sistema di assi di direzione invariabile coll'origine in O. I vettori $\boldsymbol{R}_\nu$ sono in tal caso funzioni del tempo t; e la velocità di P_ν rimarrà definita da $\dot{\boldsymbol{R}}_\nu$, il punto sovrapposto designando derivazione rispetto a t.

Dalla derivazione delle (1), (2) segue che i vettori $\dot{\boldsymbol{R}}_\nu$ (velocità *asso-*

([4]) Cfr. E. J. ROUTH, *Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies* (elementary part), 6ª ediz. [London, Macmillan, 1897], § 424.

lute dei punti P_ν) e $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ (velocità *relative*: specificamente, $\dot{\boldsymbol{r}}_0$ velocità di P_2 rispetto a P_1, ecc.) sono legati dalle stesse relazioni (lineari) intercedenti fra $\boldsymbol{R}_\nu$ e $\boldsymbol{r}_\nu$. Ciò basta ad assicurare che la forza viva del sistema dei tre corpi

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu V_\nu^2 \qquad (V_\nu \text{ lunghezza del vettore } \dot{\boldsymbol{R}}_\nu), \tag{5}$$

alla quale, nelle considerazioni precedenti, fa riscontro $\frac{1}{2}J$, può anche esprimersi sotto la forma

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^* v_\nu^2 \qquad (v_\nu \text{ lunghezza del vettore } \dot{\boldsymbol{r}}_\nu). \tag{6}$$

2. - Funzione lagrangiana in coordinate assolute. Legame baricentrale. Trasformazione in coordinate relative a legame geometrico.

Ritenuto che i tre corpi si attraggano secondo la legge di NEWTON, si ha la funzione delle forze

$$U = f\left(\frac{m_1 m_2}{r_0} + \frac{m_2 m_0}{r_1} + \frac{m_0 m_1}{r_2}\right) = fm \sum_0^2{}_\nu \frac{m_\nu^*}{r_\nu}, \tag{7}$$

f designando la costante d'attrazione universale.

Parametri atti a fissare la posizione dei tre corpi sono per es. le loro coordinate assolute (baricentrali) X_ν, Y_ν, Z_ν (componenti dei vettori $\boldsymbol{R}_\nu$). A mezzo loro e delle loro derivate $\dot{X}_\nu$, $\dot{Y}_\nu$, $\dot{Z}_\nu$, si possono ovviamente esprimere U e T, e quindi

$$L = T + U. \tag{8}$$

In questa accezione L costituisce la funzione lagrangiana del problema, e dà luogo, quando si voglia, alle equazioni esplicite del moto, di secondo ordine nelle nove coordinate assolute X_ν, Y_ν, Z_ν, *trattate a priori come indipendenti*. In realtà esse sono legate dalla (2), ossia dalle tre equazioni che se ne ottengono proiettando sugli assi, ed è anche perfettamente legittimo il tenerne conto preventivamente, riducendo la L mediante la (2), con che essa viene a dipendere da sei (anzichè da nove) parametri e loro derivate prime. Tali sei parametri possono, ben si intende, essere scelti a piacere, sotto l'unica condizione che le espressioni risultanti per le X_ν, Y_ν, Z_ν (o, se si vuole, per i vettori $\boldsymbol{R}_\nu$) verifichino la (2).

Per lo scopo che ci proponiamo, è essenziale l'osservazione seguente:

Ai tre vettori $\boldsymbol{R}_\nu$, legati dalla (2), corrispondono *biunivocamente* i tre vettori $\boldsymbol{r}_\nu$ definiti dalle (1) e in conformità sottoposti al vincolo

$$\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = 0 . \tag{9}$$

Per constatarlo [dacchè già le (1) dànno le $\boldsymbol{r}$ in funzione lineare delle $\boldsymbol{R}$], basta mostrare che le (1) e (2) sono risolubili rapporto alle $\boldsymbol{R}$. All'uopo, fissiamone una, per es. $\boldsymbol{R}_0$, e mettiamo in evidenza nella (2) il termine $m\boldsymbol{R}_0$ $(m = m_0 + m_1 + m_2)$. Avremo

$$m\boldsymbol{R}_0 + m_1(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_0) + m_2\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_0 = 0 .$$

Questa, in base alle (1), fornisce senz'altro la voluta espressione di $\boldsymbol{R}_0$. Complessivamente si ha

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{R}_0 &= \frac{m_2}{m}\boldsymbol{r}_1 - \frac{m_1}{m}\boldsymbol{r}_2 , \\ \boldsymbol{R}_1 &= \frac{m_0}{m}\boldsymbol{r}_2 - \frac{m_2}{m}\boldsymbol{r}_0 , \\ \boldsymbol{R}_2 &= \frac{m_1}{m}\boldsymbol{r}_0 - \frac{m_0}{m}\boldsymbol{r}_1 , \end{aligned}\right. \tag{10}$$

c. d. d.

Ciò posto, è chiaro che l'espressione di L, ridotta a sei gradi di libertà, si può raggiungere indifferentemente:

sia, nel modo poc'anzi accennato, partendo dalla L stessa in coordinate assolute (le componenti X_ν, Y_ν, Z_ν delle $\boldsymbol{R}_\nu$) e loro derivate, e introducendo sei parametri indipendenti in modo che rimanga identicamente verificato il legame baricentrale (2);

sia anche, trasformando dapprima L in coordinate relative (le componenti x_ν, y_ν, z_ν dei vettori $\boldsymbol{r}_\nu$) e loro derivate, e riducendo poi a sei parametri in base alla (9).

Ci atterremo, da ora innanzi, a quest'ultimo criterio.

3. - Cambiamento della variabile indipendente. Trasformazione di Darboux.

Un sistema lagrangiano a vincoli indipendenti dal tempo, proveniente da una funzione del tipo

$$L = T + U ,$$

ammette notoriamente l'integrale delle forze vive

$$T - U = E \qquad (E \text{ costante}), \tag{11}$$

e, in quanto si risguardi attribuito un valore fisso all'energia totale E, può essere compendiato nel principio della minima azione. Esso equivale cioè alla stazionarietà (surbodinata ai vincoli) di un integrale A (azione) indipendente dalla variabile t. Si sa che

$$A = \int \sqrt{2(U + E)}\, ds ,$$

dove

$$ds^2 = 2T\, dt^2 , \tag{12}$$

ossia, in base alla (6),

$$ds^2 = \sum_{0}^{2}{}_{\nu}\, m_\nu^* (dx_\nu^2 + dy_\nu^2 + dz_\nu^2) . \tag{13}$$

In luogo del tempo t, si immagini di assumere come variabile indipendente un'ausiliaria τ, legata a t dalla formula

$$d\tau = U\, dt . \tag{14}$$

Finchè si considerano posizioni dei tre corpi distinte (e a distanza finita), U rimane sempre finita e positiva. La sostituzione è quindi legittima; ed è concettualmente indifferente risguardare t o τ come variabile indipendente. Viceversa, per riconoscere il comportamento del sistema nell'immediata prossimità dei detti stati eccezionali, la variabile τ è più opportuna di t.

Poniamo ancora

$$d\sigma^2 = U\,ds^2\,, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{T} = \frac{T}{U}\,, \tag{16}$$

con che, in base alle (14) e (12), $2\boldsymbol{T}\,d\tau^2$ non è altro che

$$2\,\frac{T}{U}\,U^2\,dt^2 = U\,ds^2\,.$$

Ne consegue, in base alle (15) e (13),

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\,\frac{d\sigma^2}{d\tau^2} = \frac{U}{2}\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^*(x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2)\,, \tag{17}$$

designandosi con apici le derivazioni rispetto a τ.

L'integrale A può in conformità essere scritto

$$A = \int\sqrt{2\left(1+\frac{E}{U}\right)}\cdot\sqrt{U}\,ds = \int\sqrt{2\left(1+\frac{E}{U}\right)}\,d\sigma\,, \tag{18}$$

e la (11)

$$\boldsymbol{T} - \frac{E}{U} = 1\,. \tag{19}$$

La stazionarietà di A sotto i vincoli (9) e (11) equivale, come s'è detto, alle equazioni differenziali del problema dei tre corpi. Attese le (17), (18), (19), *le cose vanno manifestamente come se, τ fungendo da tempo, si trattasse di un sistema dinamico sottoposto agli stessi vincoli* (9), *avente per forza viva $\boldsymbol{T}$, per potenziale E/U e per costante delle forze vive l'unità.* Si riconosce in questo enunciato una *trasformazione di Darboux* ([5]), aggiuntavi la specificazione del tempo.

La funzione lagrangiana del problema così trasformato è

$$\Lambda = \boldsymbol{T} + \frac{E}{U}\,, \tag{20}$$

con $\boldsymbol{T}$ dato dalla (17), e U, come sempre, dalla (7).

([5]) Cfr. per es. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, t. II, 2ª ediz. [Paris, Gauthier-Villars, 1911], p. 479.

4. - Problema piano. Trasformazione anticritica.

Quanto precede vale naturalmente anche nell'ipotesi che il moto segua sempre in un medesimo piano. Soltanto, ove si assuma tale piano per piano coordinato $z = 0$, si possono in più ritenere nulle le tre z_ν, e il problema si presenta con quattro gradi di libertà, avendosi sei coordinate, le x_ν, y_ν (componenti dei vettori $\boldsymbol{r}_\nu$), legate dalla solita (9), che equivale alle

$$\sum_0^2{}_\nu\, x_\nu = 0\,, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, y_\nu = 0\,. \tag{21}$$

Rispetto a queste coordinate, le mutue distanze r_ν (e, di riverbero, U e $\boldsymbol{T}$) sono affette da singolarità *critiche* in corrispondenza alle coppie di valori

$$x_0 = y_0 = 0\,; \quad x_1 = y_1 = 0\,; \quad x_2 = y_2 = 0\,.$$

Questo comportamento critico si fa scomparire mediante le trasformazioni quadratiche compendiate nella formula

$$x_\nu + iy_\nu = (\xi_\nu + i\eta_\nu)^2\,, \qquad (\nu = 0, 1, 2\,;\ i = \sqrt{-1})\,, \tag{22}$$

che equivale alle

$$x_\nu = \xi_\nu^2 - \eta_\nu^2\,, \qquad y_\nu = 2\xi_\nu\eta_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2). \tag{22'}$$

Infatti, detto ϱ_ν il modulo di $\xi_\nu + i\eta_\nu$, si ha, dalla (22),

$$r_\nu = \varrho_\nu^2 = \xi_\nu^2 + \eta_\nu^2\,.$$

L'espressione (7) di U diviene, in conformità,

$$U = fm \sum_0^2{}_\nu \frac{m_\nu^*}{\varrho_\nu^2}\,, \tag{23}$$

che è, come si vede, razionale nelle nuove variabili, ξ_ν, η_ν.

Le equazioni (21) dei vincoli assumono l'aspetto

$$\sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu^2 - \sum_0^2{}_\nu\, \eta_\nu^2 = 0\,, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu\eta_\nu = 0\,. \tag{24}$$

Deriviamo la (22) rispetto a τ, e prendiamo i moduli. Avremo

$$x_\nu'^2 + y_\nu'^2 = 4\varrho_\nu^2(\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2),$$

con che la (17), fattovi $z_\nu = 0$, porge

$$T = 2U \sum_0^2{}_\nu \, m_\nu^* \varrho_\nu^2(\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2) . \tag{25}$$

5. - Introduzione di parametri indipendenti. Complementi qualitativi.

Siano q_h $(h = 0, 1, 2, 3)$ coordinate lagrangiane rispetto ai legami (24) per il sistema dinamico di cui stiamo occupandoci [avente la (25) per forza viva e la (23) per funzione delle forze]. Ciò significa che si può porre

$$\xi_\nu = \xi_\nu(q_0, q_1, q_2, q_3), \qquad \eta_\nu = \eta_\nu(q_0, q_1, q_2, q_3) \qquad (\nu = 0, 1, 2), \tag{26}$$

rimanendo identicamente soddisfatte le (24).

Specifichiamo il comportamento qualitativo delle risolventi parametriche (26), mostrando che, mediante scelta opportuna delle q, è lecito risguardare le ξ_ν, η_ν quali funzioni regolari delle q stesse, in corrispondenza a tutte le possibili configurazioni del sistema (reali, a distanza finita), fatta solo eccezione per la sestupla $\xi_\nu = \eta_\nu = 0$ $(\nu = 0, 1, 2)$, caratteristica di una coincidenza di tutti e tre i corpi.

All'uopo, basta assicurarsi che le (24) sono effettivamente risolubili rispetto a due delle sei variabili che vi compariscono, nell'intorno di ogni sistema di valori (finiti, e non tutti nulli) che le verifichino. Questo, a sua volta, risulta dalla considerazione della matrice jacobiana dei loro primi membri

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - \eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2, \qquad \xi_0\eta_0 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$$

rispetto ai sei argomenti ξ_0, ξ_1, ξ_2, η_0, η_1, η_2. Tale matrice è

$$\left\| \begin{matrix} 2\xi_0 & 2\xi_1 & 2\xi_2 & -2\eta_0 & -2\eta_1 & -2\eta_2 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \end{matrix} \right\| .$$

Il suo quadrato vale

$$\left| \begin{matrix} 4(\varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2) & 0 \\ 0 & \varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 \end{matrix} \right| = 4(\varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)^2 ,$$

e può quindi annullarsi (nel campo reale) solo a patto che si annullino tutte le ϱ, ossia tutte le ξ e tutte le η, c. d. d.

Alla stessa conclusione si perviene combinando le due osservazioni seguenti:

1) In coordinate relative x_ν, y_ν, i vincoli avevano la forma lineare (21)

$$\sum_0^2{}_\nu x_\nu = 0\,, \qquad \sum_0^2{}_\nu y_\nu = 0\,,$$

ed erano quindi risolubili, univocamente e senza eccezione, rispetto a due delle sei variabili: una x_ν ed una y_ν (in funzione delle altre quattro).

2) Dacchè escludiamo che tutte le sei variabili ξ, η si annullino, una almeno delle tre equazioni (22) è risolubile (senza introduzione di singolarità critiche) rapporto a $\xi_\nu + i\eta_\nu$. Due delle ξ_ν, η_ν sono pertanto esprimibili regolarmente mediante le corrispondenti x_ν, y_ν; quindi, per la osservazione precedente, mediante le rimanenti quattro x, y; ossia infine, attese le (22), mediante le rimanenti quattro ξ, η: e ciò dimostra l'asserto.

Se ne inferisce in particolare che, se una delle ϱ, diciamo ϱ_0, si annulla, possono fungere da parametri q: ξ_0, η_0, ξ_1, η_1 (ovvero ξ_0, η_0, ξ_2, η_2). Infatti le altre due ϱ sono allora diverse da zero ([6]), e le (24), il cui determinante funzionale rispetto a ξ_ν, η_ν vale $2\varrho_\nu^2$, si possono pensare risolute rispetto a ξ_2, η_2, rimanendo indipendenti ξ_0, η_0, ξ_1, η_1 (come anche rispetto a ξ_1, η_1, rimanendo allora indipendenti le altre quattro).

Giova aggiungere che *la funzione delle forze* $1/U$, *anzi addirittura i tre rapporti* $1/(\varrho_0^2 U)$ $(\nu = 0, 1, 2)$ *si mantengono regolari*, non soltanto quando tutte le mutue distanze sono finite e diverse da zero, ma, *anche nell'intorno di un generico urto binario* (una delle ϱ nulla e le altre due diverse da zero). Sia infatti, come sopra, ϱ_0^2 quella delle distanze che si vuol considerare nell'intorno del valore zero; ϱ_1^2 e ϱ_2^2 hanno allora limite inferiore > 0. Dalle (23) si ha

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{fm\left\{\dfrac{m_0^*}{\varrho_0^2} + \dfrac{m_1^*}{\varrho_1^2} + \dfrac{m_2^*}{\varrho_2^2}\right\}} = \frac{\varrho_0^2}{fm\left\{m_0^* + m_1^*\dfrac{\varrho_0^2}{\varrho_1^2} + m_2^*\dfrac{\varrho_0^2}{\varrho_2^2}\right\}}\,,$$

donde apparisce che $1/(\varrho_0^2 U)$, e *a fortiori* $1/U$, si comporta regolarmente anche per $\xi_0 = \eta_0 = 0$.

([6]) In quanto, qualora due ϱ (ossia due lati del triangolo dei tre corpi) si annullassero, dovrebbe di necessità annullarsi anche la terza, il che abbiamo escluso.

6. - Forma canonica. Funzione caratteristica.

Introdotte (colle specificazioni qualitative di cui al precedente §) le coordinate lagrangiane q_h $(h = 0, 1, 2, 3)$, le equazioni del moto si potrebbero senz'altro desumere dalla funzione lagrangiana Λ, avendo cura di esprimerla mediante le q_h e le $q'_h = dq_h/d\tau$, a norma delle (26).

Per lo scopo che ci proponiamo, non è indicata la forma lagrangiana (che risulterebbe ancora affètta da singolarità, quando le posizioni dei tre corpi non sono tutte distinte). Ma conviene ricorrere alla forma canonica, associando alle q_h le ausiliarie (coniugate)

$$p_h = \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_h} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial q'_h}.$$

Detta

$$2\Theta = \sum_{hk\,0}^{3} a^{(hk)} p_h p_k \tag{27}$$

la forma quadratica (degli argomenti p) reciproca alla $2\boldsymbol{T}$ (degli argomenti q'), la funzione caratteristica del sistema canonico proveniente dalla $\Lambda = \boldsymbol{T} + E/U$ è, classicamente,

$$H = \Theta - \frac{E}{U}, \tag{28}$$

l'integrale delle forze vive (19) assumendo la forma

$$H = 1. \tag{29}$$

Tutto ciò vale in particolare ove si assumano quali parametri q quattro delle coordinate relative x_ν, y_ν, per es. x_0, y_0, x_1, y_1. Una tale scelta, che si presenta spontanea ed è infatti conforme all'uso comune, ha però l'inconveniente già rilevato, di lasciar sussistere singolarità critiche nella U. Non sarà tuttavia inutile di esplicitare intanto la Θ in coordinate x_0, y_0, x_1, y_1 e relative coniugate p_{x_0}, p_{y_0}, p_{x_1}, p_{y_1}: ce ne varremo tra poco per rendere più spedito il passaggio alla forma definitiva.

Dacchè, a norma dei vincoli (21),

$$x_2 = -(x_0 + x_1), \qquad y_2 = -(y_0 + y_1),$$

la T rimane definita da

$$2T = U\{(m_0^* + m_2^*)(x_0'^2 + y_0'^2) + (m_2^* + m_1^*)(x_1'^2 + y_1'^2) + 2m_2^*(x_0'x_1' + y_0'y_1')\},$$

se ne desume agevolmente, ricordando le (3), la forma reciproca

$$(30) \qquad 2\Theta = \frac{1}{U}\{a(p_{x_0}^2 + p_{y_0}^2) + b(p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2) - 2c(p_{x_0}p_{x_1} + p_{y_0}p_{y_1})\},$$

in cui si è posto, per brevità,

$$(31) \qquad a = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \qquad b = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_2}, \qquad c = \frac{1}{m_2}.$$

7. - Osservazioni intese a facilitare la trasformazione della Θ.

Quando si eseguisce una generica trasformazione sui parametri indipendenti q, passando a nuove variabili χ, le coniugate p si trasformano notoriamente come le derivate di una medesima funzione φ. Di qui una regola per ottenere comprensivamente i coefficienti — diciamo $\alpha^{(jl)}$ — della espressione trasformata di Θ. Si parte dal parametro differenziale

$$\Delta\varphi = \sum_{0}^{3}{}_{hk}\, a^{(hk)} \frac{\partial\varphi}{\partial q_h}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k},$$

relativo alle variabili q, e, in esso, si sostituiscono materialmente, al posto delle $\partial\varphi/\partial q_h$, i loro valori

$$\sum_{0}^{3}{}_{j} \frac{\partial\varphi}{\partial\chi_j}\frac{\partial\chi_j}{\partial q_h},$$

in termini delle nuove derivate; e così per le $\partial\varphi/\partial q_k$. Nella espressione risultante del parametro si leggono senz'altro i coefficienti ricercati.

Stabiliamo ancora un paio di identità, che ci saranno utili tra un momento.

Una trasformazione binaria del tipo (22) compendiata in

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2,$$

ove si sostituiscano provvisoriamente alle x, y; ξ, η le combinazioni complesse

$$\left\{\begin{array}{ll} z = x + iy, & \bar{z} = x - iy\,, \\ \zeta = \xi + i\eta, & \bar{\zeta} = \xi - i\eta\,, \end{array}\right. \tag{32}$$

equivale a

$$z = \zeta^2, \qquad \bar{z} = \bar{\zeta}^2,$$

e si presenta così a variabili separate.

Ne segue

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{2\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2\bar{\zeta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}}.$$

D'altra parte, in virtù delle (32),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right),$$

e quindi

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + i\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\,, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - i\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\,, \end{array}\right. \tag{33}$$

colle analoghe relative alle lettere ξ, η, ζ, $\bar{\zeta}$.

Ne ricaviamo, in primo luogo,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 4\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\zeta\bar{\zeta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{1}{4\zeta\bar{\zeta}}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right\},$$

donde, attribuendo alle varie lettere un indice ν ($\nu = 0, 1$) e ponendo mente alla identità $\zeta_\nu\bar{\zeta}_\nu = \varrho_\nu^2$,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}\right)^2 = \frac{1}{4\varrho_\nu^2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_\nu}\right)^2\right\}. \tag{34}$$

Prendiamo poi le due formule

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_0} = \frac{1}{2\zeta_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_0}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_1} = \frac{1}{2\bar{\zeta}_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}_1},$$

e moltiplichiamole membro a membro. Avremo

$$4\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial \bar z_1}=\frac{1}{\zeta_0\bar\zeta_1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta_1},$$

che, per le (33) ed analoghe, può essere scritta

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}-i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)=\frac{1}{4\zeta_0\bar\zeta_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0}-i\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_0}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}+i\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}\right).$$

Ove, nel secondo membro, si moltiplichi sopra e sotto per $\bar\zeta_0\zeta_1$ e si tenga conto una volta ancora delle identità $\zeta_\nu\bar\zeta_\nu=\varrho_\nu^2$, si ha, eguagliando le parti reali,

$$\begin{aligned}(35)\qquad &\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=\\ &=\frac{1}{4\varrho_0^2\varrho_1^2}\left\{(\xi_0\xi_1+\eta_0\eta_1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}\right)-\right.\\ &\qquad\left.-(\xi_0\eta_1-\eta_0\xi_1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\right)\right\}.\end{aligned}$$

8. - Espressione esplicita di Θ in coordinate $\xi_0,\ \eta_0,\ \xi_1,\ \eta_1$.

Immaginiamo ormai di assumere quali parametri indipendenti ξ_0, η_0, ξ_1, η_1.

Per formare l'espressione di Θ relativa a tali parametri, la via più spiccia è di prendere le mosse dalla (30), e di trasformarla, secondo i criterii esposti nel precedente §, a norma delle (22) (corrispondenti ai valori 0 ed 1 dell'indice ν). Alla (30) fa riscontro

$$\Delta\varphi=\frac{1}{U}\left\{a\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)^2\right]+b\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2\right]-2c\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right]\right\},$$

la cui trasformazione è immediata in base alle (34) e (35).

Sostituendo addirittura nel $\Delta\varphi$ così trasformato, al posto delle derivate, i simboli p_{ξ_0}, p_{η_0}, p_{ξ_1}, p_{η_1} delle variabili coniugate, si ha la cercata espressione di Θ:

$$\begin{aligned}(36)\qquad 2\Theta=\frac{1}{4U}&\left\{\frac{a}{\varrho_0^2}\,(p_{\xi_0}^2+p_{\eta_0}^2)+\frac{b}{\varrho_1^2}\,(p_{\xi_1}^2+p_{\eta_1}^2)\right.\\ &\left.-\frac{2c}{\varrho_0^2\varrho_1^2}\left[(\xi_0\xi_1+\eta_0\eta_1)(p_{\xi_0}p_{\xi_1}+p_{\eta_0}p_{\eta_1})-(\xi_0\eta_1-\eta_0\xi_1)(p_{\xi_0}p_{\eta_1}-p_{\eta_0}p_{\xi_1})\right]\right\}.\end{aligned}$$

9. - Regolarità.

Già abbiamo rilevato, alla fine del § 5, che $1/U$ e $1/(\varrho_\nu^2 U)$ sono olomorfe anche nell'intorno di un generico urto binario.

La (36) mostra che lo stesso avviene di Θ.

Ne consegue che *il sistema canonico di funzione caratteristica*

$$H = \Theta - \frac{E}{U}\,, \quad [\Theta \text{ essendo data dalla } (36)],$$

nelle quattro coppie di argomenti coniugati

$$\begin{array}{cccc} \xi_0 & \eta_0 & \xi_1 & \eta_1 \\ p_{\xi_0} & p_{\eta_0} & p_{\xi_1} & p_{\eta_0} \end{array}$$

ha comportamento perfettamente regolare dovunque le ξ_0, η_0, ξ_1, η_1 *possono fungere da coordinate lagrangiane*: in particolare per es. (cfr. § 5) nell'intorno di un urto fra P_2 e P_1 ($\varrho_0 = 0$), ovvero fra P_2 e P_0 ($\varrho_1 = 0$). Più generalmente, del resto, si può dire: fatta solo eccezione per $\varrho_2 = 0$ (urti P_0, P_1).

Ben si intende che un tale comportamento ha carattere invariantivo di fronte alle trasformazioni biunivoche e regolari dei quattro parametri lagrangiani. In modo preciso, qualora alle suddette ξ_0, η_0, ξ_1, η_1 si sostituisca una quaderna qualsiasi q_0, q_1, q_2, q_3, legata ad esse da formule di trasformazione biunivoche e regolari in un certo campo, la funzione H, e con essa il sistema canonico trasformato, rimane regolare in quel campo.

È chiaro, d'altra parte, che, come i parametri ξ_0, η_0, ξ_1, η_1 sono legittimi e regolarizzanti dovunque tranne che per $\varrho_2 = 0$, così lo sarebbero i parametri ξ_0, η_0, ξ_2, η_2, colla sola esclusione di $\varrho_1 = 0$ (urti P_0, P_2).

10. - Considerazioni riassuntive.

Ammesso che il momento risultante delle quantità di moto sia diverso da zero, è esclusa — teorema di SUNDMAN [7], conosciuto già da WEIERSTRASS [8] — l'eventualità di una collisione generale.

---

[7] *Recherches sur le problème des trois corps*, « Acta Societatis Fennicae », vol. XXXIV, 1907, § 12.

[8] Veggasi in proposito, G. MITTAG-LEFFLER, *Zur Biographie von Weierstrass*, « Acta Mathematica », tomo 35, 1911, p. 30.

Così stando le cose, ricordiamo, dal § precedente, che $\dot{H}$ è regolarizzabile nell'intorno di ogni urto binario, assumendo quali parametri indipendenti $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1$, ovvero $\xi_0, \eta_0, \xi_2, \eta_2$. Combiniamo tale risultato col carattere invariantivo della regolarità (di fronte a cambiamenti qualsivogliano, purchè anch'essi regolari, dei parametri); e appoggiamoci sulla circostanza, già rilevata al § 5, che, rispetto ai vincoli (24), è possibile l'introduzione di parametri lagrangiani più simmetrici delle quaderne $(\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1)$, $(\xi_0, \eta_0, \xi_2, \eta_2)$ [nonchè dell'analoga $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$] ed esenti dalla eccezione che ciascuna di queste presenta, atti quindi a conferire alle risolventi (25) carattere regolare proprio incondizionato (rimanendo nel caso presente fuor di questione l'annullarsi di tutte le ϱ).

Fatta pertanto una scelta concreta di parametri q_0, q_1, q_2, q_3, *aventi il requisito suddetto, il sistema differenziale da cui dipende il problema piano dei tre corpi rimane regolarizzato completamente* (cioè nell'intorno di qualsiasi tratto — *urti binari compresi* — effettivamente raggiungibile durante il corso del moto), *nella forma canonica di cui a* § 6.

In questo sistema: la variabile indipendente è τ, legata al tempo t dalla posizione (14)

$$d\tau = U\,dt\;;$$

le funzioni incognite sono le q e le p. Le prime, q_0, q_1, q_2, q_3, rappresentano coordinate lagrangiane rispetto ai vincoli (24)

$$\sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu\, \eta_\nu^2\,, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu \eta_\nu = 0\,,$$

le ξ_ν, η_ν essendo a lor volta coordinate anticritiche del sistema dei tre corpi, definite, in funzione delle componenti x_ν, y_ν delle tre mutue distanze, dalle posizioni (22)

$$x_\nu + iy_\nu = (\xi_\nu + i\eta_\nu)^2\,.$$

Le coniugate p sono funzioni lineari delle $dq/d\tau$, le quali concettualmente non hanno interesse, una volta riconosciuto il comportamento regolare delle q, e quindi delle loro derivate, in termini di τ.

Per la stessa definizione delle q, le ξ, η ne sono funzioni regolari. Attese le (22), siamo senz'altro condotti a concludere che, come le q, così anche le coordinate relative x_ν, y_ν sono funzioni ovunque regolari (anche nell'eventualità di urti) del parametro τ: si ritrova così (per il problema piano, e con inessenziale diversità di variabile indipendente) il risultato di SUNDMAN.

Dalla relazione $d\tau = U\,dt$ scende ovviamente, in base alla (23), che τ, nell'intorno di un urto verificantesi all'istante t_1, è sviluppabile per potenze di $(t - t_1)^{\frac{1}{3}}$, ecc.

Riservo ad una prossima comunicazione la introduzione effettiva di convenienti q e la deduzione delle corrispondenti equazioni del moto, sotto una forma simmetrica, in tutto analoga, dal punto di vista analitico, a quella che si presenta nei problemi classici della dinamica dei solidi.