A PROPOSITO DEL MASSIMO DI OFELIMITÀ DATO DALLA LIBERA CONCORRENZA

In una mia breve recensione su una memoria del dottor CASSEL stampata in questo Giornale nel fascicolo dell'agosto dell'anno scorso, avevo scritto:

« È noto, come dal fatto, che, dato un certo sistema di prezzi, ogni individuo partecipante allo scambio cerchi di regolare la sua domanda e la sua offerta in modo da trarre dallo scambio la massima ofelimità, molti scrittori, a cominciare dal WALRAS e dal PARETO, abbiano dedotta la conclusione, che nel regime di libera concorrenza ogni persona intervenuta al mercato raggiunge il massimo di ofelimità. Ora, osserva acutamente il CASSEL, in quel fatto nulla vi è di essenzialmente caratteristico per la libera concorrenza e quindi il ragionamento pel quale dalla presenza delle equazioni di soddisfazione massima nel sistema, che determina l'equilibrio, si trae quella conseguenza, non è altro che un grossolano sofisma. »

e il Prof. PARETO nel successivo fascicolo di novembre, prima di procedere ad ulteriori considerazioni « oggettive » sul problema dello scambio, ha commentato:

« Anche al buon Don Chisciotte accadde di volere combattere terribili giganti .... e poi non erano altri che gualchiere! I sofismi denunziati sono verissimi, ma se li sono creati coloro che dicono di volerli combattere.

« Per prima cosa avverta il lettore che discorro delle cose mie e non di quelle del WALRAS o di altri; e se il Sig. CASSEL e il Sig. SCORZA non si sono ancora accorti, non ostante l'acutezza loro, che se in alcune cose consento col WALRAS, in altre molte ne dissento interamente, vuol dire che non hanno letto o non hanno inteso quanto l'uno e l'altro scrivemmo. In ogni modo, checchè ne sia di tale faccenda, spero che ognuno vorrà concedere che un autore si deve giudicare da ciò che egli scrisse e non da ciò che scrissero altri.

« Piacerebbemi di sapere in quale mio scritto quei signori hanno trovato i ragionamenti di cui mi fanno generosamente dono. Io ci trovo tutto l'opposto.

« Essi hanno scoperto che il fatto che ogni individuo partecipante allo scambio cerca di ottenere il massimo di ofelimità non è essenzialmente caratteristico della libera concorrenza. E chi ha mai detto il contrario? Ecco quanto scrivevo, un poco prima del Sig. Cassel, nel 1896 : il y a lieu de faire ici une distinction fondamentale. (α) L'échangeur subit les prix du marché sans essayer de les modifier de propos délibéré. Ces prix sont modifiés effectivement par son offre et sa demande, mais c'est à son insu. C'est ce qui caractérise l'état que nous appelons **de libre concurrence** (*Cours*, I, § 46). Giudichi ogni lettore di buona fede se un autore, che scrive tali parole si può ragionevolmente accusare di vedere l'essenziale caratteristica della libera concorrenza nel fatto che ogni individuo partecipante allo scambio procura di ottenere il massimo di ofelimità ! ».

Ora io spero, che non stancherò la pazienza del lettore se, prima di esaminare il valore dei teoremi stabiliti dal prof. Pareto sulla posizione di equilibrio, « per la quale si verificano le condizioni del massimo di ofelimità », mi fermerò un poco sul commento qui riportato.

*
* *

1. Il prof. Pareto ammette che « i sofismi denunziati sono verissimi », ma soggiunge che « se li sono creati coloro che dicono di volerli combattere » e dopo aver affermato, che la sua persona deve essere chiamata in causa solo quando si tratta di cose scritte da lui, conclude, che egli non ha mai posto la caratteristicad ella libera concorrenza in ciò che è soltanto (si vede subito) la caratteristica della libertà degli scambi. Ora delle due l'una : o, con le parole « i sofismi denunziati sono verissimi », il prof. Pareto intende alludere all'errore, che si commetterebbe confondendo la libera concorrenza con la libertà degli scambi, e ciò sembrerebbe consigliare la frase « giudichi ogni lettore di buona fede etc. », o, con le parole medesime egli intende riferirsi a quello, che veramente è denunziato dal Cassel e da me come un ragionamento sofistico, vale a dire il ragionamento pel quale dalla presenza delle equazioni di soddisfa-

zione massima [1] nel sistema che determina i prezzi di equilibrio nell'ipotesi di un regime di libera concorrenza, si conclude che nell'ipotesi stessa ogni individuo partecipante agli scambi raggiunge il massimo di ofelimità.

Ebbene, nel 1° caso io non so come possa sostenersi, che egli sia stato accusato di aver posto la caratteristica della libera concorrenza nella circostanza, che ogni individuo partecipante ad uno scambio procura di ottenere il massimo di ofelimità, quando dal CASSEL e da me si osservava che tale circostanza non è caratteristica per la libera concorrenza per dedurne che un cert'*altro ragionamento* (attribuito al WALRAS ed al PARETO) era errato; e nel 2°, non so con quanta opportunità possa domandarsi «piacerebbemi di sapere in quale mio scritto quei signori hanno trovato i ragionamenti di cui mi fanno generosamente dono», quando al § 64 del I volume del *Cours* è scritto: «... parmi les conditions (équations) de l'échange, se trouvent celles qui assurent le maximum d'ophélimité. On en déduit que, *sous le régime de la libre concurrence, les prix s'établissent de manière à procurer à chaque échangeur le maximum d'ophélimité* », e con quanta opportunità possa chiedersi di esser giudicati sugli scritti proprii, quando è notorio, che quest'ultimo teorema egli l'ha riportato dai classici *Éléments* del Prof WALRAS.

Comunque sia di ciò, sta il fatto che nell'argomentazione ora citata del § 64 è contenuto, per dirla con parole dello stesso professor PARETO, un sofisma « de ceux qui expriment comme vraie, d'une manière absolue, une proposition qui n'est vraie que conditionnellement » [2].

Infatti, lasciando da parte l'osservazione del dott. CASSEL, la presenza delle cosiddette equazioni di soddisfazione massima, nel sistema che determina i prezzi d'equilibrio, significa non che i prezzi son tali da procurare a ogni scambista il massimo di ofelimità, ma soltanto che, effettuato lo scambio ai prezzi d'equilibrio, ogni scambista raggiunge il massimo di ofelimità *compatibile con quei prezzi.*

E badisi che, per non trovare sofistico il ragionamento in discorso, non basterebbe dire che forse appunto questa clausola era nel pensiero del prof. PARETO, quando scriveva il § 64 del *Cours,*

[1] A scanso di equivoci si osservi che queste equazioni non sono altro se non l'espressione analitica del fatto, che, per ogni sistema di prezzi delle merci, ogni scambista regola la sua domanda e la sua offerta in modo da ottenere dallo scambio il massimo di ofelimità.

[2] *Les Systémes socialistes,* tom. II, pag. 275.

poichè, se in questo paragrafo egli non fa alcuna considerazione che sia in aperto contrasto con essa, ben vi contrastano i commenti fatti nel § 143 relativamente ai massimi raggiunti in regime di monopolio.

Nel § 143 si dice infatti: « Ceux-ci (gli individui intervenuti allo scambio) obtiennent bien toujours le maximum compatible avec les nouvelles conditions, mais ces nouveaux maxima sont moins élevés que le maximum obtenu par la libre concurrence, lequel est le maximum *maximorum* » [1]; quindi per il maximum raggiunto da ogni scambista in caso di monopolio si pone la clausola « compatible avec les nouvelles conditions », mentre al maximum raggiunto da ogni scambista in caso di libera concorrenza si dà esplicitamente la qualifica di maximum *maximorum*, o massimo assoluto.

E qualche cosa di analogo può dirsi per ciò che è scritto alla pag. 409 del suo ultimo articolo.

Indicando con $1, 2, 3, \ldots \vartheta$ gli individui partecipanti allo scambio, con $p_a = 1, p_b, p_c \ldots$ i prezzi delle varie merci $A, B, C, \ldots$ in una di esse A, con $q_{ia}, q_{ib}, q_{ic}, \ldots$ le quantità di merci delle varie specie scambiate dall'individuo i con $\varphi_{ia}, \varphi_{ib}, \varphi_{ic}, \ldots$ le ofelimità elementari dell'individuo stesso corrispondenti alle quantità di merci, che egli possiede dopo aver scambiate le quantità $q_{ia}, q_{ib}, q_{ic}, \ldots$; le equazioni che danno i prezzi d'equilibrio nel caso della libera concorrenza sono:

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_{1a} = \dfrac{1}{p_b}\varphi_{1b} = \dfrac{1}{p_c}\varphi_{1c} = \ldots \\[2ex] \varphi_{2a} = \dfrac{1}{p_b}\varphi_{2b} = \dfrac{1}{p_c}\varphi_{2c} = \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} q_{1a} + p_b q_{1b} + p_c q_{1c} + \ldots = 0 \\ q_{2a} + p_b q_{2b} + p_c q_{2c} + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} q_{1a} + q_{2a} + q_{3a} + \ldots = 0 \\ q_{1b} + q_{2b} + q_{3b} + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

[1] Questa parola è scritta in *corsivo* anche nel *Cours*.

mentre nel caso che l'individuo 1 possegga in monopolio la merce B, le equazioni che dànno i prezzi d'equilibrio sono [1], insieme con le (2) e (3) precedenti, le altre:

$$(4)\qquad \begin{cases} \varphi_{1a} = \dfrac{1}{p_c}\varphi_{1c} = \dots \\ \varphi_{2b} = \dfrac{1}{p_b}\varphi_{2b} = \dfrac{1}{p_c}\varphi_{2c} = \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(5)\qquad \frac{d\,(q_{1b}\,p_b)}{d\,p_b} = 0\,.$$

Ne segue, che se si tien conto dell'osservazione ora fatta, dalla presenza delle equazioni (4) nel sistema che determina i prezzi di equilibrio nel caso del monopolio può dedursi, che gli individui 2, 3,... raggiungono, dopo effettuato lo scambio ai prezzi di equilibrio, il massimo di ofelimità compatibile con questi prezzi, proprio come dalla presenza delle (1) nel sistema determinante i prezzi d'equilibrio in regime di libera concorrenza si deduce, che gli individui 1, 2, 3,... raggiungono, dopo effettuato lo scambio ai prezzi di equilibrio, il massimo di ofelimità compatibile con questi prezzi; nè, almeno immediatamente, è possibile dire altro, in generale.

Ma se ciò è, confesso, che non riesco a rendermi ragione di quanto è affermato dal prof. PARETO nelle sue seguenti parole:

« Supponiamo essere a noi ignoto che il sistema di equazioni (α') [cioè, con le nostre notazioni, il sistema delle (1), (2), (3)] si riferisce alla libera concorrenza, e il sistema (α'') [cioè, con le nostre notazioni, il sistema delle (2), (3), (4), (5)] al monopolio. Qualcuno scrive quei due sistemi e ce li pone sotto occhio. Li esaminiamo e vediamo che nel sistema (α'') non è compreso il sistema (1) mentre è compreso nel sistema (α'). Basta tale osservazione per potere dire che il massimo di ofelimità non è raggiunto per tutti gli individui. *Badiamo bene che non possiamo, da ciò solo, dedurre se è 1 che è sa-*

[1] Va da sè, che io qui riassumo il pensiero del prof. PARETO senza accettarne in alcun modo le conclusioni. Credo d'aver già dimostrato nell'articolo « *Osservazioni su alcune teorie di Economia pura* », pubblicato recentemente in questo Giornale, che in materia di scambio non vi è alcuna possibilità di distinzione fra il caso del monopolio e il caso della libera concorrenza.

crificato, o se sono i 2, 3, ... Sarebbe fallace il criterio di ricercare quali delle equazioni (1) *sussistono nel sistema* (α'') *e concludere che quegli individui non sono sacrificati. Nel caso presente sono proprio essi che patiscono* [1]. In altro caso analogo potrebbero invece godere a spese di colui pel quale manca una delle equazioni (1) ».

2. Or qui taluno potrebbe osservare, che è inutile porsi alla ricerca del pensiero del prof. PARETO a proposito di questo famoso massimo di ofelimità dato dalla libera concorrenza, quando, probabilmente, da ciò che è scritto a pagina 415 dell'articolo di novembre :

« Concludiamo che quando da una posizione (I), per la quale si verificano le condizioni del massimo di ofelimità, cioè le equazioni (1), passiamo ad altra posizione (II), ove parte di tali equazioni o tutte non si verificano, la posizione (II) essendo tale che dista dalla (I) di quantità finite, tutte le ofelimità totali non possono crescere, ma parte almeno debbono scemare. Così è giustificata anche nel linguaggio volgare, la denominazione di massimo di ofelimità data a tale posizione » ;

scaturisce chiaramente in qual senso suol dirsi, che la libera concorrenza dà il massimo di ofelimità.

Ebbene, se tale era il pensiero del prof. PARETO esso era sempre poco preciso, poichè il teorema in discorso della pag. 415 non può dirsi dimostrato ed è senz'altro falso, se non si esclude la possibilità di certe contingenze di cui non si vede come liberarsi con un ragionamento immediato.

Abbia il lettore la compiacenza di prestarmi ancora un poco della sua benevola attenzione e vedrà che forse non è errato quanto adesso ho asserito.

3. Consideriamo col prof. PARETO una soluzione

$$p_b, p_c, \ldots ; \; q_{ia}, q_{ib}, q_{ic}, \ldots \qquad (i = 1 \ldots \vartheta)$$

delle equazioni (1), (2), (3), che diremo corrispondente alla posizione (I), e sia :

$$p_b + dp_b, p_c + dp_c, \ldots ; \; q_{ia} + dq_{ia}, q_{ib} + dq_{ib}, \ldots \qquad (i = 1 \ldots \vartheta)$$

[1] Mi son permesso di porre in corsivo queste parole, perchè appunto su di esse voglio richiamare l'attenzione del lettore.

una soluzione delle equazioni (2) e (3) che non soddisfi a tutte le equazioni (1) e che diremo corrispondente alla posizione (II).

Non è difficile dimostrare che agli incrementi

$$dp_b\,, dp_c\,, \ldots\,;\; dq_{ia}\,, dq_{ib}\,, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

delle variabili

$$p_b\,, p_c\,, \ldots\,;\; q_{ia}\,, q_{ib}\,, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

corrispondono per le ofelimità totali $\Phi_1, \Phi_2 \ldots . \Phi_\vartheta$ degli individui $1, 2, \ldots \vartheta$ differenziali totali, che non possono essere tutti positivi o tutti negativi, e la dimostrazione, che il prof. PARETO dà di questo fatto è certamente corretta: ma, se alle

$$dp_b\,, dp_c\,, \ldots\,;\; dq_{ia}\,, dq_{ib}\,, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

non si impone la restrizione di essere sufficientemente piccole in valore assoluto, non sembra facile dimostrare, che parte almeno degli incrementi [1] corrispondenti $\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2, \ldots$ delle ofelimità totali degli individui $1, 2, \ldots \vartheta$ debbono essere necessariamente negativi; anzi, come abbiamo già detto tale proprietà in generale non si verifica se non si esclude la possibilità economica di certe congiunture analiticamente possibili.

Intanto sta di fatto che la dimostrazione del professor PARETO è errata.

Egli dice a pag. 413:

« Quando esistono le ofelimità totali, è indifferente seguire una strada o un'altra per passare da una posizione ad un'altra; qualunque via si segua si giungerà sempre ad avere gli stessi valori per le ofelimità nella nuova posizione. Possiamo adunque scegliere la

(1) Credo utile avvertire che, data una funzione $f(x, y, z \ldots)$ di più variabili indipendenti $x, y, z, \ldots$, i differenziali delle variabili coincidono con i relativi incrementi, cosicchè possono indicarsi ad arbitrio con $dx, dy, dz, \ldots$ o $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$; non così per la funzione. Per essa il differenziale (totale) è del tutto distinto dall'incremento: precisamente si ha:

$$\Delta f = df + P$$

dove Δf indica l'incremento di f, df il suo differenziale totale e P un certo insieme di termini ulteriori.

strada per andare da (I) a (II). Sia t una nuova variabile e poniamo:

$$\Delta q_{1a} = a_1\, t',\ \Delta q_{2a} = a_2\, t', \ldots\ \Delta q_{1b} = b_1\, t', \ldots\ \Delta p_b = s_b\, t', \ldots$$

Per andare da (I) a (II) seguiteremo la strada che si ottiene facendo crescere t da zero a t' ».

Or qui, prima di proseguire, osservisi che per l'ipotesi fatta le

$$p_b + \Delta p_b, \ldots . ;\ q_{ia} + \Delta q_{ia}, q_{ib} + \Delta q_{ib}, \ldots . \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

al pari delle

$$p_a, p_b, \ldots ;\ q_{ia}, q_{ib}, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

soddisfano alle equazioni (2) e (3), dunque si ha:

$$\begin{gathered}
\Delta q_{1a} + \Delta q_{2a} + \ldots . . = 0 \\
\Delta q_{1b} + \Delta q_{2b} + \ldots . . = 0 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\Delta q_{1a} + p_b\, \Delta q_{1b} + \ldots . + q_{1b}\, \Delta p_b + \ldots . . + \Delta p_b\, \Delta q_{1b} + \ldots . = 0 \\
\Delta q_{2a} + p_b\, \Delta q_{2b} + \ldots . + q_{2b}\, \Delta p_b + \ldots . . + \Delta p_b\, \Delta q_{2b} + \ldots . = 0 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{gathered}$$

ossia, sostituendo e osservando che t' non è zero:

$$\begin{gathered}
a_1 + a_2 + \ldots . = 0 \\
b_1 + b_2 + \ldots . = 0 \\
\ldots \ldots \ldots
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
(a_1 + b_1\, p_b + \ldots . + s_b\, q_{1b} + \ldots .) + (s_b\, b_1 + \ldots .)\, t' = 0 \\
(a_2 + b_2\, p_b + \ldots . + s_b\, q_{2b} + \ldots .) + (s_b\, b_2 + \ldots .)\, t' = 0 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{gathered}$$

dove le $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots . s_b, \ldots$ sono *costanti* assegnate, essendo dati il valore di t' e i valori delle

$$\Delta p_b, \Delta p_c, \ldots ;\ \Delta q_{ia}, \Delta q_{ib}, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

Premesso ciò seguiamo il ragionamento del prof. PARETO, e facciamo crescere t di un infinitesimo dt partendo da zero. Corrispondentemente le

$$p_b, p_c, \ldots; \; q_{ia}, q_{ib}, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

subiranno degli incrementi infinitesimi

$$dp_b, dp_c, \ldots; \; dq_{ia}, dq_{ib}, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

dati dalle equazioni:

$$dq_{1a} = a_1\, dt, \; dq_{2a} = a_2\, dt, \ldots dq_{1b} = b_1\, dt, \ldots dp_b = s_b\, dt, \ldots$$

e *il sistema di valori*

$$p_b + dp_b, \ldots; \; q_{ia} + dq_{ia}, q_{ib} + dq_{ib} \ldots \qquad (i = 1, \ldots \vartheta)$$

sarà sempre una soluzione delle equazioni (2) *ma non sarà più una soluzione delle equazioni* (3). Perchè ciò fosse bisognerebbe che sussistessero le uguaglianze:

$$(a_1 + b_1 p_b + \ldots s_b q_{1b} + \ldots) + (s_b b_1 + \ldots)\, dt = 0$$

$$(a_2 + b_2 p_b + \ldots s_b q_{2b} + \ldots) + (s_b b_2 + \ldots)\, dt = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e quindi si avrebbe l'assurdo $dt = t'$.

Ne segue, che non si può applicare alle

$$p_b + dp_b, \ldots; \; q_{ia} + dq_{ia}, q_{ib} + dq_{ib} \ldots \qquad (i = 1, \ldots \vartheta)$$

il teorema di cui si è parlato al principio di questo numero e quindi non si può concludere, che i differenziali $d\Phi_1, d\Phi_2, \ldots$ delle ofelimità totali corrispondenti all'incremento dt della variabile t debbono essere necessariamente in parte negativi e in parte positivi.

D'altra parte è proprio questa la deduzione che al Prof. Pareto serve, per fondarvi su tutto il seguito della dimostrazione, dunque non ci sembra d'aver sbagliato dicendo, che essa non regge.

4. Prima di passare ad esporre le ragioni per le quali non solo ci sembra errato il ragionamento in discorso, ma anche ci pare impossibile arrivare a stabilirne la conclusione per altra via, finchè non si dimostrino assurde alcune eventualità, torniamo sul teorema riguardante le posizioni (I) e (II) abbastanza prossime e

dimostriamolo in modo diverso da quello del prof. PARETO; così risulterà che in fondo esso non è se non una generalizzazione di una proprietà già nota in un caso particolare.

Dette $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_\vartheta$ le ofelimità totali dei ϑ individui $1, 2, 3, \ldots \vartheta$, poniamo:

$$\Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_\vartheta$$

senza attribuire alla Ψ alcun significato economico.

Se si volesse, si potrebbe convenire di chiamare Ψ la ofelimità totale del gruppo sociale composto dagli individui $1, 2, 3, \ldots \vartheta$, ma, data la natura delle quantità di cui $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\vartheta$ rappresentano le misure, sarebbe un grave errore attribuire alla frase «ofelimità totale di un gruppo sociale» un senso, che non fosse quello puramente convenzionale ora stabilito.

Ciò posto, indicando pel momento con $p_b, p_c \ldots$ delle costanti date (da interpretarsi naturalmente in appresso come prezzi delle merci $B, C, \ldots$ in A), cerchiamo quali sono i valori delle q_{ia}, $q_{ib}, \ldots (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$ per i quali la funzione Ψ risulta massima e nel tempo stesso rimangono soddisfatte le equazioni:

$$(2) \qquad \begin{cases} q_{1a} + q_{2c} + \ldots = 0 \\ q_{1b} + q_{2b} + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} q_{1a} + p_b\, q_{1b} + p_c\, q_{1c} + \ldots = 0 \\ q_{2a} + p_b\, q_{2b} + p_c\, q_{2c} + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Se m è il numero delle merci $A, B, C, \ldots$ queste equazioni sono in tutto $\vartheta + m$, ma di esse soltanto $\vartheta + m - 1$ sono indipendenti. Ebbene, supponiamo che l'equazione:

$$q_{\vartheta a} + p_b q_{\vartheta b} + p_c q_{\vartheta c} + \ldots = 0$$

sia conseguenza delle precedenti ed immaginiamola esclusa dal sistema delle (2) e (3).

Differenziando Ψ, le (2) e le (3) e notando che le $q_{ia}, q_{ib}, \ldots$ compajono solo nel termine Φ_i della somma che dà Ψ, per modo che

$$\frac{d\Psi}{dq_{ia}} = \frac{d\Phi_i}{dq_{ia}} = \varphi_{ia}$$

$$\frac{d\Psi}{dq_{ib}} = \frac{d\Phi_i}{dq_{ib}} = \varphi_{ib} \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

si ha:

$$(6) \qquad d\Psi = \sum_{i=1}^{i=\vartheta} (\varphi_{ia}\, dq_{ia} + \varphi_{ib}\, dq_{ib} + \ldots$$

e

$$(7) \qquad \begin{cases} dq_{1a} + dq_{2a} + \ldots = 0 \\ dq_{1b} + dq_{2b} + \ldots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} dq_{1a} + p_b\, dq_{1b} + p_c\, dq_{1c} + \ldots = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dq_{\vartheta-1,a} + p_b\, dq_{\vartheta-1,b} + p_c\, dq_{\vartheta-1,c} + \ldots = 0. \end{cases}$$

Moltiplicando ordinatamente le (7) e le (8) per le indeterminate $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{\vartheta+m-1}$ che poi determineremo in modo opportuno, e aggiungendo la somma dei loro primi membri al secondo membro della (6) si ha:

$$(9) \quad d\Psi = \sum_{i=1}^{i=\vartheta-1} [(\varphi_{ia} + \lambda_1 + \lambda_{m+i})\, dq_{ia} + (\varphi_{ib} + \lambda_2 + \lambda_{m+i} p_b)\, dq_{ib} + \ldots] +$$
$$+ (\varphi_{\vartheta,a} + \lambda_1)\, dq_{\vartheta,a} + (\varphi_{\vartheta,b} + \lambda_2)\, dq_{\vartheta,b} + \ldots$$

Ora supponiamo di determinare le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m+\vartheta-1}$ in modo da annullare nel primo membro della (9) i coefficienti dei differenziali delle $(m + \vartheta - 1)$ variabili q_{il}, che dipendono dalle rimanenti in forza delle (2) e (3): rimarrà $d\Psi$ espresso per mezzo dei differenziali di variabili tutte indipendenti, e quindi perchè $d\Psi$ sia nullo, cioè Ψ sia massima occorrerà, che siano nulli tutti i coefficienti di questi differenziali.

Ciò porta (in accordo del resto a teorie generali del calcolo infinitesimale), che i sistemi di valori delle $q_{ia}, q_{ib}, \ldots (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$ pei quali sono soddisfatte le (2) e (3) ed è nel tempo stesso massima la funzione Ψ, sono da scegliersi fra i sistemi di soluzioni delle $\vartheta m + m + \vartheta - 1$ equazioni

$$(10) \qquad \begin{cases} q_{1a} + q_{2a} + \ldots = 0 \\ q_{1b} + q_{2b} + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ q_{1a} + p_b q_{1b} + p_c q_{1c} + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{\vartheta-1,a} + p_b q_{\vartheta-1,b} + p_c q_{\vartheta-1,c} + \ldots = 0 \end{cases}$$

$$(11) \qquad \begin{cases} \varphi_{1a} + \lambda_1 + \lambda_{m+1} = 0, \ \varphi_{2a} + \lambda_1 + \lambda_{m+2} = 0, \ldots, \ \varphi_{\vartheta-1,a} + \lambda_1 + \lambda_{m+\vartheta-1} = 0 \\ \varphi_{1b} + \lambda_2 + \lambda_{m+1} p_b = 0, \ \varphi_{2b} + \lambda_2 + \lambda_{m+2} p_b = 0, \ldots, \ \varphi_{\vartheta-1,b} + \lambda_2 + \lambda_{m+\vartheta-1} p_b = 0 \\ \varphi_{1c} + \lambda_3 + \lambda_{m+1} p_c = 0, \ \varphi_{2c} + \lambda_3 + \lambda_{m+2} p_c = 0, \ldots, \ \varphi_{\vartheta-1,c} + \lambda_3 + \lambda_{m+\vartheta-1} p_c = 0 \end{cases}$$

$$(12) \qquad \begin{cases} \varphi_{\vartheta,a} + \lambda_1 = 0 \\ \varphi_{\vartheta,b} + \lambda_2 = 0 \\ \varphi_{\vartheta,c} + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

fra le $\vartheta m + m + \vartheta - 1$ incognite

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+\vartheta-1}; \quad q_{ia}, q_{ib}, \ldots, \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

Dalle (12) si ricava:

$$\lambda_1 = -\varphi_{\vartheta,a}, \ \lambda_2 = -\varphi_{\vartheta,b}, \ldots$$

quindi sostituendo nelle (11) ed eliminando le $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2} \ldots \lambda_{m+\vartheta-1}$

si ha, che i valori delle ϑm variabili, $q_{ia}, q_{ib}, \ldots (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$ pei quali Ψ risulta massima e le (2) e (3) restano soddisfatte sono da cercarsi fra i sistemi di soluzioni delle ϑm equazioni, che risultano dall'aggiungere alle $\vartheta + m - 1$ equazioni (10) le $(\vartheta - 1)(m - 1)$ equazioni:

$$(13)\quad \begin{cases} \varphi_{\vartheta,a} - \varphi_{1a} = \dfrac{1}{p_b}(\varphi_{\vartheta,b} - \varphi_{1b}) = \dfrac{1}{p_c}(\varphi_{\vartheta,c} - \varphi_{1c}) = \ldots \\ \varphi_{\vartheta,a} - \varphi_{2a} = \dfrac{1}{p_b}(\varphi_{\vartheta,b} - \varphi_{2b}) = \dfrac{1}{p_c}(\varphi_{\vartheta,c} - \varphi_{2c}) = \ldots \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ora suppongasi, che

$$p_b^{(0)}, p_c^{(0)}, \ldots ; q_{ia}^{(0)}, q_{ib}^{(0)}, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

sia un sistema di valori delle

$$p_b, p_c, \ldots ; q_{ia}, q_{ib}, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

pei quali restino soddisfatte le equazioni (1), (2), (3): essi soddisferanno evidentemente anche le (13) e quindi se

$$p_b^{(0)}, p_c^{(0)}, \ldots ; q_{ia}^{(0)} + dq_{ia}, q_{ib}^{(0)} + dq_{ib}, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

è un sistema di valori, che soddisfano alle equazioni (2) e (3), si ha, in corrispondenza degli incrementi $dq_{ia}, dq_{ib}, \ldots$:

$$d\Psi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + \ldots + d\Phi_\vartheta = 0.$$

Segue, che se i $d\Phi_1, d\Phi_2, \ldots d\Phi_\vartheta$ non sono tutti nulli, essi non possono essere tutti positivi nè tutti negativi. Allora, per ragione di continuità, i $d\Phi_1, d\Phi_2, \ldots d\Phi_\vartheta$ non possono essere tutti positivi o tutti negativi anche se $q_{ia}^{(0)} + dq_{ia}, q_{ib}^{(0)} + dq_{ib}, \ldots (i = 1, \ldots \vartheta)$ soddisfano non alle equazioni (2) e (3), ma a quelle che se ne ottengono ponendovi $p_b^{(0)} + dp_b, p_c^{(0)} + dp_c, \ldots$ al posto di $p_b^{(0)}, p_c^{(0)}, \ldots$; $dp_b, dp_c, \ldots$ essendo sufficientemente piccoli (1).

(1) Questa restrizione, come mostra il ragionamento del prof. PARETO, non è necessaria: cosicchè per questa parte del teorema non sarebbe certo opportuno sostituire al ragionamento del prof. PARETO il nostro. Noi però arriviamo più tardi a una conclusione relativa ai $\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2, \ldots$ a cui il prof. PARETO non arriva.

Tale è la parte vera della proposizione del prof. PARETO, quando si noti che non si può escludere, come il prof. PARETO vorrebbe, il caso nel quale tutti i $d\Phi_1, d\Phi_2, \ldots$ sono nulli.

Infatti se, mantenendo le notazioni del suo articolo a pag. 410 e seg., fosse

$$\delta\Phi_1 = \delta\Phi_2 = \ldots = 0$$

sarebbe, come si vede facilmente:

$$q_{1b}\,\delta p_b + q_{1c}\,\delta p_c + \ldots = 0$$

$$q_{2b}\,\delta p_b + q_{2c}\,\delta p_c + \ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ma poichè queste sono ϑ equazioni lineari omogenee fra le $m - 1$ quantità δp_b, $\delta p_c, \ldots$, finchè non si dice nulla sui valori di m e ϑ, non è possibile trarne la conclusione:

$$\delta p_b = 0, \quad \delta p_c = 0, \ldots$$

pur escludendo ogni relazione fra le quantità $q_{1b}, q_{1c}, \ldots$; e quand'anche ciò fosse, non si potrebbe dedurne che, contro l'ipotesi fatta, la posizione (II), cioè quella corrispondente ai valori:

$$p_b + \delta p_b\,, p_c + \delta p_c\,, \ldots q_{ia} + \delta q_{ia}\,, q_{ib} + \delta q_{ib} \ldots \qquad (i = 1, \ldots \vartheta)$$

verrebbe a soddisfare alle equazioni (1), poichè sarebbero nulle le $\delta p_b, \delta p_c, \ldots$ ma non le $\delta q_{ia}, \delta q_{ib}, \ldots (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$ e quindi le equazioni (1), contenendo non solo le $p_b, p_c, \ldots$ ma anche le q_{il}, potrebbero benissimo non essere soddisfatte.

5. Dalle cose ora stabilite può dedursi un'altra conseguenza, utilizzando la definizione di massimo di una funzione di più variabili in un punto del campo in cui essa esiste.

Se, come prima,

$$p_b^{(0)}, p_c^{(0)}, \ldots ; q_{ia}^{(0)}, q_{ib}^{(0)}, \ldots (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

è una soluzione del sistema formato dalle (1), (2), (3), essa soddisfa a una delle condizioni necessarie perchè le corrisponda un massimo della funzione Ψ, ma non può dirsi senz'altro, *almeno per ora e in generale* (1), che tale massimo realmente le corrisponda.

In ogni modo, ammesso che ciò sia, indicando con

$$p_b^{(0)}, p_c^{(0)}, \ldots ; q_{ia}^{(0)} + dq_{ia}, q_{ib}^{(0)} + dq_{ib} \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$$

una soluzione delle equazioni (2) e (3) e con $\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2, \ldots \Delta\Psi$ gli incrementi delle funzioni $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Psi$ corrispondenti agli incrementi dq_{il} delle q_{il}, si ha:

$$\Delta\Psi < 0$$

ossia:

$$\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 + \ldots + \Delta\Phi_\vartheta < 0$$

purchè le $dq_{ia}, dq_{ib}, \ldots (i = 1, 2, \ldots \vartheta)$ *siano sufficientemente piccole*, quindi gli incrementi $\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2, \ldots$ non possono essere tutti positivi.

Premessa una osservazione analoga ad un'altra precedente, può concludersi che quando, mantenendo il linguaggio del Prof. PARETO, si considerano due posizioni (I) e (II) *abbastanza prossime* delle quali la prima soddisfi a tutte le equazioni (1), (2), (3), mentre la seconda soddisfa alle (2) e (3) ma non a tutte le (1), le ofelimità totali dei ϑ individui nella posizione (II) non possono essere tutte maggiori delle corrispondenti ofelimità totali nella posizione (I).

Poichè si vede qui che il teorema criticato del Prof. PARETO diventa corretto quando si ponga la limitazione espressa, per amore di brevità, con le parole «*abbastanza prossime*», è probabile, che a qualche lettore venga l'idea di pensare, che proprio questa limitazione fosse nella mente del professore medesimo.

A me sembra invece che ciò debba essere escluso, quando si osservi, che non se ne fa parola nell'enunciato, che nessun passaggio della precedente argomentazione a pag. 413 e 414 ne richiede di necessità la tacita ammissione, che il caso di una posizione (II)

(1) Pel caso di due merci non è difficile tôr via questa obbiezione, tenendo presenti le parole con le quali si chiude a pag. 81 il § 84 degli *Éléments* (Lausanne, 1900) del prof. WALRAS. Ivi si trae partito del fatto espresso dalla disuguaglianza

$$\frac{d\varphi_{ia}}{dq_{ia}} < 0$$

valida qualunque sia i e qualunque sia la merce A; ma tale proprietà non è più sufficiente quando si tratta del caso con un numero di merci superiore a due.

« che dista dalla (I) di quantità finite » (pag. 415), è posto in opposizione al caso di una posizione (II) « leggermente » (pag. 410) diversa dalla posizione (I) e che, infine, nell'esempio istituito a pag. 415 e seguenti per illustrare le teorie generali, giunti alle formule (26), nelle quali x ed y tengono il posto delle dq_{ii}, si riconosce una riprova della « proprietà dimostrata in generale per uno spostamento infinitesimo » nella conseguenza tratta dall'imporre alle x, y la condizione di essere sufficientemente piccole, e si riconosce una riprova della « proprietà dimostrata in generale per uno spostamento finito » nella conseguenza, che si trae quando non si fa sulle x, y una tale ipotesi restrittiva.

6. Intanto è bene notare, che i teoremi dimostrati nei § 4 e 5, erano già conosciuti in un caso particolare.

Il LAUNHARDT nella sua opera « *Mathematische Begründung der Volkswirthschaftslehre* » dopo essere arrivato, con la solita argomentazione del WALRAS alla determinazione del « *Gleichgewichtspreise* » nel caso del baratto di due sole merci, mediante le equazioni:

$$(\alpha) \qquad \frac{f'(a-x)}{\varphi'(z)} = \frac{p_{\prime}}{p_{\prime\prime}}$$

e

$$(\beta) \qquad \frac{f'(x)}{\varphi'(b-z)} = \frac{p_{\prime}}{p_{\prime\prime}}$$

conclude il § 7 con queste parole:

« Es ist leicht nachzuweisen, dass bei dem Tausche zu den Gleichgewichtspreise die Summe der für beide Besitzer erreichten Nützlichkeit, also die im volkswirthschaftlichen Sinne erlangte Nützlichkeit, zu einem Maximum wird. Diese Summe ist nämlich:

$$N = f(a-x) + \varphi(z) + f(x) + \varphi(b-z).$$

Die Bedingung für das Maximum ist:

$$\frac{dN}{dx} = -f'(a-x) + \varphi'(z)\frac{dz}{dx} + f'(x) - \varphi'(b-z)\frac{dz}{dx} = 0$$

oder, da $\frac{dz}{dx} = \frac{p_{\prime}}{p_{\prime\prime}}$ sein muss:

$$\frac{f'(a-x) - f'(x)}{\varphi'(z) - \varphi'(b-z)} = \frac{p_{\prime}}{p_{\prime\prime}}.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, sobald die Gleichungen (α) und (β) zugleich erfüllt sind, das heisst also, wenn die Gleichgewichtspreise bestehen ».

Basta osservare, che qui la funzione N tiene il posto di quella da noi indicata nel caso generale con Ψ, per riconoscere subito che, pel caso di $m = 2$, i teoremi dei § 4 e 5 erano implicitamente noti al sig. LAUNHARDT (1).

Così può trovarsene, pel caso di $m = 2$, un qualche cenno nell'ultima delle quattro dimostrazioni che il Prof. EDGEWORTH dà nel suo notissimo libro «*Mathematical Psychics*» (London, Kegan 1881) della sua formula:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{d\Pi}{dy}\right)-\left(\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{d\Pi}{dx}\right)=0.$$

Egli dice (*Math. Psyc.*, pag. 24):

« No doubt the one theory which has been thus differently expressed could be presented by a professed mathematician more elegantly and scientifically. What appears to the writer the most philosophical presentation may be thus indicated.

Upon the hypothesis above shadowed forth, human action generally, and in particular the step taken by a contractor modifying articles of contract, may be regarded as the working of a gross

(1) Il LAUNHARDT conclude questo stesso § 7 con le parole:

« Diese wichtige Wahrheit, welche ganz unabhängig von der Form der Nützlichkeitsgleichung gefunden wurde, und nach welcher volkswirthschaftlich bei einem Tausche das Maximum an Nützlichkeit erreicht wird, wenn der Tausch zu den Gleichgewichtspreisen stattfindet, bei welchen Angebot und Nachfrage gleich sind, kann in Verbindung mit dem Umstande, dass auf dem Markte in Kampfe um den Preis unzweifelhaft die Ausgleichung zwischen Angebot und Nachfrage herbeigeführt werden muss, zu dem Schlusse verleiten, dass *durch die natürlichen Wirkungen des Waltens des freie Wettbewerbes, durch das « laissez faire, laissez passer » oder das « gehen und geschehen lassen » das allgemeine Beste am sichersten erreicht werde.* In diesem Schlusse, zu welchem auch Walras in seiner sonst so geistreichen Darlegung gelangte, liegt aber ein schwerer Irrthum, wie durch die folgenden Untersuchungen nachgewiesen werden wird »;

ed è appunto perchè le avevo presenti, insieme con le argomentazioni dei § successivi, che nella recensione dell'opuscolo del CASSEL io non mi preoccupai d'altro se non di presentare nel modo più rapido possibile ciò che di nuovo era stato detto dal CASSEL sull'argomento. Quanto all'esistenza di un sofisma nel teorema in questione io non ne avevo mai dubitato, nè mai avrei pensato di aver a scrivere un così lungo articolo per dimostrarlo.

force *governed*, let on, and directed by a more delicate pleasure-force. From which it seems to follow upon general dynamical principles applied to this special case that equilibrium is attained when the *total pleasure-energy of the contractors is a maximum relative*, or subject to condition... Then,... it appears that *the total utility of the system is a relative maximum at any point on the pure contract-curve* ».

7. Consideriamo adesso, per semplicità di discorso il caso particolarissimo, di due individui e di due merci: come si vedrà, quel che noi diremo, sarà indipendente da questa ipotesi e avrà una portata affatto generale.

Segniamo su un medesimo piano, rispetto a due medesimi assi coordinati, le linee di indifferenza dei due individui e consideriamo il luogo del punto M nel quale si toccano due curve d'indifferenza appartenenti l'una a un individuo, l'altra all'altro. Questo luogo, che, dice il professor PARETO (pag. 422), si potrebbe chiamare luogo dei massimi di ofelimità, e che coincide con la linea chiamata dal prof. EDGEWORTH (*Math. Psyc.* pag. 21) « *the contract-curve* », contiene i punti d'equilibrio ai quali porta la libera concorrenza.

Ora suppongasi possibile, che in un determinato scambio questi punti di equilibrio siano almeno due e suppongasi che, chiamatili A e B, le ofelimità totali, che i due individui verrebbero ad avere quando lo scambio avvenisse secondo il prezzo indicato dal coefficiente angolare della retta tangente in A alle due curve di indifferenza (dei due individui che), vi passano, siano rispettivamente maggiori di quelle che verrebbero ad avere qualora lo scambio avvenisse secondo il prezzo indicato dal coefficiente angolare della retta tangente in B alle due curve (dei due individui), che vi passano. Allora è chiaro, che se si considera, per questo caso, come posizione (I) quella corrispondente al punto B e come posizione (II) una posizione, del tipo noto, abbastanza prossima a quella corrispondente al punto A, passando dalla posizione (I) alla posizione (II) entrambe le ofelimità totali dei due individui crescono anzichè diminuire: quindi resta provato, che se non si dimostrano economicamente assurde le ipotesi, analiticamente possibili, ora fatte, non solo è errata l'argomentazione del prof. PARETO a pag. 413-414, ma anche è impossibile arrivare a stabilirne la conclusione per altra via.

8. Al caso in cui i prezzi di equilibrio siano più d'uno sembra, che il prof. PARETO abbia voluto dedicare una parte del suo articolo, ma la parentesi che egli apre per questo scopo a pag. 418, si chiude a pag. 419 senza alcun risultato positivo.

Egli dice (pag. 418): « Qui apriamo una parentesi. L'equazione (22) (quella appunto che dà i prezzi d'equilibrio nel caso, che egli considera), essendo di grado dispari, poteva avere una sola radice reale; ma se fosse di grado pari, non ne avrebbe punto, o ne avrebbe almeno due, e allora cosa accadrebbe?

« Per ora tali problemi hanno scarsa utilità: ci sono cose di ben maggiore momento che ancora ignoriamo nella economia matematica e che richiedono di essere studiate prima. Le cose bisogna farle una alla volta. Ma, per mero diletto, e senza sprecare troppo tempo in discussioni algebriche, vediamo un semplice esempio numerico ».

Quand'io leggendo l'articolo giunsi a questo punto, mi rivolsi con interesse all'esame dell'esempio promesso, sperando, che ivi si trattasse appunto di un caso con due possibili prezzi d'equilibrio almeno, e si facesse relativamente ad essi qualche importante osservazione economica. Ma rimasi deluso, poichè nel calcolo numerico esposto si trova bensì una equazione pel prezzo p con due radici reali positive, ma poi una di queste viene esclusa perchè ad essa viene a corrispondere un valore negativo per un'altra incognita del problema, che deve essere, di sua natura, positiva.

Naturalmente un tale esempio non prova nulla e quindi sul parere del prof. PARETO a proposito della quistione riguardante il numero delle posizioni d'equilibrio corrispondenti a un determinato baratto, se ne sa quanto prima.

Eppure quella quistione, anche dato l'attuale sviluppo dell'Economia pura e anche senza tener conto di quel che è detto al n. 7, non è tanto poco importante quanto egli sembra credere.

Per poter concludere che (*Cours*, § 59): « le marchandage qui s'établit avec la libre concurrence est le moyen de résoudre par tentatives les équations de l'échange » e che (*Cours*, § 101): « la concurrence des entrepreneurs et des échangeurs est un moyen de résoudre par tentatives les équations de l'équilibre de la production » è necessario come io ho stabilito altrove (1), dimostrare dapprima, che ciascuno di quei sistemi di equazioni non può avere, che una sola soluzione, soddisfacente inoltre a certe particolarità analitiche; nè,

(1) *Osservazioni sulla teoria del baratto secondo il prof.* WALRAS. Giornale degli Economisti, Aprile 1902.

d'altra parte, è permesso rinunziare a questi risultati dell'analisi walrasiana del fenomeno economico, se si vuol riguardarla come una prima approssimazione sintetica del fenomeno stesso (1).

(1) A sostegno di questa tesi, è bene tener presenti le parole del § 59 del *Cours*, che seguono a quelle sopra riportate: « M. EDGEWORTH a objecté que ce n'était là qu'*un* moyen. Il a raison; mais le moyen indiqué par M. WALRAS est bien celui qui répresente la partie principale du phénomène économique ».