

SUL PROBLEMA PIANO DEI TRE CORPI.

NOTA I (1).

CARATTERISTICHE CINETICHE DEL SISTEMA REGOLARIZZANTE;
FORZA VIVA E QUADRICA RECIPROCA.« Rend. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. XXIV₂ (1915₂),
pp. 422-433.

In una Nota recente (2) ho fatto subire al problema piano dei tre corpi una trasformazione dinamica, mostrando, in base ad essa, la *possibilità* di una regolarizzazione completa (per tutto il corso del moto, anche se eventualmente intervengono urti) mediante scelta opportuna di coordinate lagrangiane.

Mi accingo ora a tradurre in atto l'accennata possibilità. Col permesso dell'Accademia, dedicherò alla questione tre Note: la presente, e due altre che immediatamente seguiranno.

Premesso uno studio sulla struttura cinematica del sistema trasformato e rilevato che esso rientra in una categoria di sistemi olonomi cui si applicano utilmente le equazioni miste canonico-euleriane (3), deduco nella prima Nota una forma reciproca della forza viva, che domina tutto lo svolgimento ulteriore. Il calcolo all'uopo necessario è condotto in modo da poter seguire senza sforzo i passaggi successivi, evitando la materiale risoluzione di equazioni lineari, che sarebbe richiesta dalla teoria generale.

Nella seconda Nota si esplicitano le equazioni regolarizzate: dapprima sotto la forma mista, testè ricordata; poi anche sotto forma canonica

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1915.

(2) *Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi*, in questo stesso volume dei Rendiconti, pp. 61-75 [in questo stesso vol. delle « Opere »: XXXIII, pp. 477-493]. Tale Nota richiamerò qui appresso colla citazione abbreviata R).

(3) *Forma mista di equazioni del moto, che conviene ad una particolare categoria di sistemi meccanici*, ibidem, pp. 235-248 [in questo stesso vol. delle « Opere »: XXXIV, pp. 495-509]. Abbrevierò anche la citazione di quest'ultima Nota, designandola semplicemente con M).

pura, e ciò con referenza a tre diverse quaderne di coordinate lagrangiane. Ciascuna determina in modo geometricamente espressivo la configurazione dei tre corpi, ed ha una specifica ragion d'essere. La prima quaderna si presenta più ovvia per immediata analogia coi procedimenti classicamente in uso nella dinamica dei solidi; la seconda risponde in modo spontaneo al bisogno di simmetria, la quale simmetria — sia detto per incidenza — non è invece raggiungibile nel caso dei solidi, senza pregiudizio della agilità (si pensi ai parametri di RODRIGUES); infine la terza quaderna, che chiamo *asteroidica*, appare indicata allorchè, nell'impostazione astronomica o meccanica del problema, uno dei tre corpi si trova, per qualche motivo, distinto dagli altri due, i quali seguivano a comportarsi in modo simmetrico.

Un caso limite assai importante è offerto dal problema ristretto. Mi è parso perciò non inutile di occuparmene *ex professo* nella terza Nota. Essa si inizia richiamandone la trattazione abituale e sviluppando (sotto veste canonica) una trasformazione in coordinate ellittiche, già sfruttata dal THIELE a scopo pratico (per la valutazione numerica di certe soluzioni periodiche). Riprendendo poi le equazioni regolarizzate del problema piano in coordinate ellittiche, vi si pone (colle debite cautele) una delle masse eguali allo zero, si rileva la scindibilità del sistema differenziale in due e la conseguente riduzione a due gradi di libertà, e si istituiscono infine raffronti di controllo per assodare la coincidenza delle formule, che così si ottengono, con quelle ricavate per via diretta.

La ricerca è, come si vede, quasi interamente formale; ma non va dimenticato che, in simili questioni, i progressi formali sono stati spesso fecondi.

1. - Vincoli e funzione lagrangiana del problema trasformato.

Ho dimostrato in R) che le equazioni differenziali, da cui dipende il problema piano dei tre corpi, equivalgono (a meno di un cambiamento di variabile indipendente) alle equazioni del moto di un altro sistema olonomo S definito come segue:

Da parametri determinativi della posizione di S fungono sei quantità

$$\xi_\nu, \eta_\nu \quad (\nu = 1, 0, 2)$$

legate dalle due equazioni vincolari

$$(1) \quad \sum_0^2 \xi_\nu^2 = \sum_0^2 \eta_\nu^2, \quad \sum_0^2 \xi_\nu \eta_\nu = 0.$$

Il significato di tali parametri è riportato all'originario problema piano dei tre corpi mediante le relazioni

$$x_v + iy_v = (\xi_v + i\eta_v)^2 \quad (i = \sqrt{-1}; \quad v = 0, 1, 2),$$

in cui x_v, y_v rappresentano le proiezioni dei lati del triangolo dei tre corpi $P_0P_1P_2$ sopra un sistema di assi di direzione invariabile; in modo preciso, x_v, y_v sono le componenti del vettore $P_{v+2} - P_{v+1}$, coll'intesa evidente di riguardare identici gli indici congrui rispetto al modulo 3.

Forza viva. Designando con apici le derivazioni rispetto alla variabile indipendente τ , si ha, quale espressione della forza viva,

$$(2) \quad T = 2U \sum_v m_v^* (\xi_v'^2 + \eta_v'^2),$$

dove, posto

$$(3) \quad \varrho_v^2 = \xi_v^2 + \eta_v^2 = \sqrt{x_v^2 + y_v^2} = \overline{P_{v+1}P_{v+2}},$$

le costanti m_v^* sono definite, in termini delle masse m_v dei tre corpi, dalle posizioni

$$(4) \quad m_v^* = \frac{m_{v+1}m_{v+2}}{m}, \quad (m = m_0 + m_1 + m_2);$$

e

$$(5) \quad U = f \sum_0^2 \frac{m_{v+1}m_{v+2}}{\varrho_v^2} = fm \sum_0^2 \frac{m_v^*}{\varrho_v^2}, \quad (f \text{ costante d'attrazione}),$$

è la funzione delle forze dell'originario problema.

Per il problema trasformato, di cui ora si tratta, si ha invece quale

Funzione delle forze

$$\frac{E}{U},$$

E essendo una costante (l'energia totale del problema primitivo); quale

Energia totale $T - E/U$, lo speciale valore 1; quale

Funzione lagrangiana

$$(6) \quad \Lambda = T + \frac{E}{U},$$

T ed U avendo le espressioni (2) e (5).

2. - Cinematica del sistema S .

Nella prima delle equazioni vincolari (1),

$$\sum_0^2 \xi_v^2 = \sum_0^2 \eta_v^2,$$

il valore comune dei due membri va ritenuto diverso da zero. Infatti esso potrebbe annullarsi solo a patto che si annullassero tutte le ξ e tutte le η : il che è quanto dire, riferendosi agli originari tre corpi, nel caso della loro coincidenza in un medesimo punto (collisione generale). Ora questa è senza altro esclusa, per tutto il corso del moto, tostochè si suppone diversa da zero la costante delle aree (teorema di SUNDMAN) (4). Sotto tale ipotesi, si può anzi affermare qualche cosa di più: cioè che il limite inferiore del trinomio

$$\sum_0^2 m_v^* \varrho_v^2$$

(momento di inerzia polare dei tre corpi rispetto al loro baricentro) (5) è > 0 . Ne consegue, in base alle (3), che è pure > 0 il limite inferiore del valore comune q^2 dei due trinomiali

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2.$$

Risguarderemo q come una prima coordinata lagrangiana del sistema S . Il significato geometrico risulta subito dalla definizione. Si ha infatti, in virtù delle (3),

$$2q^2 = \sum_0^2 \varrho_v^2;$$

donde apparisce che q^2 è il semiperimetro del triangolo dei tre corpi.

Posto

$$(7) \quad \xi_v = q\alpha_v, \quad \eta_v = q\beta_v, \quad (v = 0, 1, 2),$$

(4) Cfr. R), § 10.

(5) Ibidem, § 1.

la definizione di q e le (1) danno

$$(8) \quad \sum_0^2 \alpha_v^2 = 1, \quad \sum_0^2 \beta_v^2 = 1, \quad \sum_0^2 \alpha_v \beta_v = 0,$$

le quali consentono di interpretare α_v e β_v quali coseni direttori, rispetto ad un generico sistema cartesiano ortogonale $Ox_0x_1x_2$, di due semirette perpendicolari: indicheremo con α , β i rispettivi vettori unitari (le cui componenti sono appunto tali coseni α_v , β_v).

Per rendere espressiva l'interpretazione, conviene introdurre anche il vettore unitario

$$(9) \quad \gamma = \alpha \wedge \beta,$$

che individua, assieme coi primi due, un triedro trirettangolo congruente ad $Ox_0x_1x_2$. A norma della (9), i coseni direttori γ_v (componenti del vettore γ) valgono naturalmente

$$(9') \quad \gamma_v = \alpha_{v+1}\beta_{v+2} - \alpha_{v+2}\beta_{v+1} \quad (v = 0, 1, 2).$$

Pensiamo α , β , γ quali vettori fondamentali del sistema di assi fissi $Oxyz$, cui viene riferito il moto piano dei tre corpi, supponendo per maggior semplicità, gli assi Ox , Oy situati nel piano del moto, e quindi Oz perpendicolare a questo piano. In tale accezione, α_v , β_v , γ_v si interpretano come coseni direttori dell'asse Ox_v , rispetto al triedro (fisso) $Oxyz$; e rimane complessivamente definita (rispetto al detto triedro) l'orientazione della terna $Ox_0x_1x_2$, o, se si vuole, di un generico corpo rigido C solidale con essa.

Ne consegue che ad ogni sestupla ξ_v , η_v verificante le (1) fanno riscontro un ben determinato valore (positivo) di q e un'orientazione dell'ipotetico corpo C ; e, reciprocamente, da q e dall'orientazione di C si risale tosto, mediante le (7), alle ξ_v , η_v . Si può pertanto concludere che la configurazione del sistema S corrisponde biunivocamente all'insieme: parametro positivo q , orientazione di C .

3. - Comportamento cinetico.

La circostanza testè rilevata assicura che il sistema S rientra nella categoria di cui ci siamo diffusamente occupati nella Nota M) colla mira specifica di farne applicazione al problema attuale. Giova anzitutto richia-

marsi ad essa per le formole (di POISSON)

$$(10) \quad \alpha' = \alpha \wedge \omega, \quad \beta' = \beta \wedge \omega, \quad \gamma' = \gamma \wedge \omega,$$

in cui, fungendo τ da tempo, il vettore ω rappresenta la velocità angolare (dell'ipotetico corpo C rispetto agli assi fissi $Oxyz$).

Si ha poi, dalle (7) e (3) dei paragrafi precedenti,

$$\varrho_v^2 = q^2(\alpha_v^2 + \beta_v^2)$$

ossia, badando all'identità $\alpha_v^2 + \beta_v^2 + \gamma_v^2 = 1$,

$$(11) \quad \varrho_v^2 = q^2(1 - \gamma_v^2) \quad (v = 0, 1, 2),$$

donde apparisce che le mutue distanze, e di conseguenza la funzione delle forze E/U , si esprimono esclusivamente per q e per le γ_v .

Passiamo alla forza viva T definita dalla (2). In base alle derivate delle (7),

$$(12) \quad \xi'_v = q'\alpha_v + q\alpha'_v, \quad \eta'_v = q'\beta_v + q\beta'_v,$$

e alle (10), essa diviene ovviamente una forma quadratica dei quattro argomenti q' e $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (componenti del vettore ω secondo gli assi $Ox_0x_1x_2$). È facile constatare che i coefficienti si possono esprimere esclusivamente per la q e per le γ_v (rendendoli esenti dagli altri coseni α_v, β_v). Intanto, a norma delle (2), (5) e (11), basta accertarlo per ognuno dei binomi $\xi_v'^2 + \eta_v'^2$. A tal uopo conviene esplicitare le componenti delle (10),

$$(10') \quad \begin{cases} \alpha'_v = \alpha_{v+1}\omega_{v+2} - \alpha_{v+2}\omega_{v+1}, \\ \beta'_v = \beta_{v+1}\omega_{v+2} - \beta_{v+2}\omega_{v+1}, \\ \gamma'_v = \gamma_{v+1}\omega_{v+2} - \gamma_{v+2}\omega_{v+1}, \end{cases}$$

e dedurne, quadrando e sommando le prime due, e tenendo presenti le relazioni di ortogonalità,

$$\alpha_v'^2 + \beta_v'^2 = (1 - \gamma_{v+1}^2)\omega_{v+2}^2 + (1 - \gamma_{v+2}^2)\omega_{v+1}^2 + 2\gamma_{v+1}\gamma_{v+2}\omega_{v+1}\omega_{v+2}.$$

Dopo ciò, l'asserto risulta tosto dalle (12), le quali, badando alle identità

$$\begin{aligned} \alpha_v^2 + \beta_v^2 &= 1 - \gamma_v^2, \\ \alpha_v\alpha'_v + \beta_v\beta'_v &= -\gamma_v\gamma'_v = -\gamma_v(\gamma_{v+1}\omega_{v+2} - \gamma_{v+2}\omega_{v+1}), \end{aligned}$$

porgono

$$(13) \quad \begin{aligned} \xi_v'^2 + \eta_v'^2 &= q'^2(\alpha_v^2 + \beta_v^2) + 2qq'(\alpha_v\alpha'_v + \beta_v\beta'_v) + q^2(\alpha_v'^2 + \beta_v'^2) \\ &= q'^2(1 - \gamma_v^2) - 2qq'\gamma_v(\gamma_{v+1}\omega_{v+2} - \gamma_{v+2}\omega_{v+1}) \\ &\quad + q^2\{(1 - \gamma_{v+1}^2)\omega_{v+2}^2 + (1 - \gamma_{v+2}^2)\omega_{v+1}^2 + 2\gamma_{v+1}\gamma_{v+2}\omega_{v+1}\omega_{v+2}\}. \end{aligned}$$

Ne desumiamo che anche la funzione lagrangiana (6) del problema trasformato,

$$A = T + \frac{E}{U},$$

dipende, oltre che da q' e dalle ω_v , esclusivamente da q e dalle γ_v . Si trova con ciò soddisfatta anche l'ipotesi complementare, di cui al § 3 della Nota M). Possiamo quindi valerci delle regole ivi stabilite per la costruzione delle equazioni del moto.

Rivolveremo il nostro calcolo a quella delle due forme miste che abbiamo chiamata canonico-euleriana, perchè, a differenza dell'altra (euleriano-lagrangiana), si presenterà automaticamente regolarizzata anche nell'intorno di eventuali urti binari.

4. - Coniugate. Equazioni lineari da risolvere per passare alla quadrica reciproca.

Secondo la regola esposta al § 7 della Nota M), testè ricordata, partendo dalla T (q' , ω_v ; q , γ_v), si debbono introdurre gli argomenti p , Ω_v (coniugati a q , ω_v) a norma delle equazioni

$$(14) \quad p = \frac{\partial T}{\partial q'}, \quad \Omega_v = \frac{\partial T}{\partial \omega_v},$$

e valersene per eliminare q' e le ω_v dalla stessa $T(q', \omega_v; q, \gamma_v)$. Indicando con $\Theta(p, \Omega_v; q, \gamma_v)$ la forma in tal guisa ottenuta (2Θ è la quadrica reciproca di $2T$), si ha senz'altro dalla (6) la funzione lagrangiana modificata (o hamiltoniana)

$$(15) \quad H = \Theta - \frac{E}{U}.$$

La diretta risoluzione delle (14) e la successiva eliminazione delle

q' , ω_v da T richiederebbe tuttavia sviluppi non brevi, nè istruttivi, attesa la espressione abbastanza complicata di $T(q', \omega_v; q, \gamma_v)$ risultante dalle (2) e (13). Si arriva allo scopo in modo elegante e perspicuo, esprimendo mediante vettori ausiliari così le equazioni dei vincoli come T e le (14), ed eliminando poi comprensivamente gli elementi ausiliari con algoritmo vettoriale accomodato alle circostanze del caso.

5. - Introduzione di vettori ausiliari.

L'omografia vettoriale (dilatazione) \mathfrak{D} .

La sestupla ξ_v, η_v si compendia opportunamente in due vettori ξ, η , aventi rispettivamente le ξ_v, η_v per componenti secondo gli assi $Ox_0x_1x_2$.

Le derivate di questi vettori rapporto a τ ,

$$\xi', \eta',$$

hanno in conformità, per componenti, ξ'_v, η'_v .

Mercè l'introduzione di questi vettori, si può attribuire alle equazioni (1) dei vincoli la forma

$$\xi \times \xi - \eta \times \eta = 0, \quad \xi \times \eta = 0,$$

con che le loro derivate rapporto a τ si scrivono

$$(16) \quad \xi' \times \xi - \eta' \times \eta = 0, \quad \xi' \times \eta + \eta' \times \xi = 0.$$

Anche alle (12) si attribuisce ovviamente forma vettoriale: basta notare che, in base alle (7) e (10), i loro secondi membri si identificano colle componenti dei due vettori

$$\frac{q'}{q} \xi + \xi \wedge \omega, \quad \frac{q'}{q} \eta + \eta \wedge \omega,$$

talchè esse equivalgono a

$$(17) \quad \xi' = \frac{q'}{q} \xi + \xi \wedge \omega, \quad \eta' = \frac{q'}{q} \eta + \eta \wedge \omega.$$

Convieni ancora definire due altri vettori Ξ, H aventi rispettivamente

per componenti (sempre secondo gli assi $Ox_0x_1x_2$)

$$(18) \quad \begin{cases} \Xi_v = \frac{\partial T}{\partial \xi'_v} = 4Um_v^* \rho_v^2 \xi'_v, \\ H_v = \frac{\partial T}{\partial \eta'_v} = 4Um_v^* \rho_v^2 \eta'_v. \end{cases}$$

Queste espressioni di Ξ_v , H_v mostrano che i due vettori Ξ , H risultano dall'applicare a ξ' , η' una stessa omografia vettoriale, anzi una stessa dilatazione (*) avente per direzioni unite quelle degli assi Ox_v .

Designieremo con \mathfrak{D} l'omografia inversa, cioè la dilatazione

$$(19) \quad \mathfrak{D} = \left(\frac{1}{4Um_v^* \rho_v^2} \mathbf{u}_v \right), \quad (v = 0, 1, 2),$$

che opera sui vettori fondamentali \mathbf{u}_v del triedro (unito) $Ox_0x_1x_2$, riducendone le lunghezze nel rapporto di 1 a $1/(4Um_v^* \rho_v^2)$. Potremo così compendiare le (18) (o meglio le loro risolventi rapporto a ξ'_v , η'_v) nelle due relazioni vettoriali

$$(20) \quad \xi' = \mathfrak{D}\Xi, \quad \eta' = \mathfrak{D}H.$$

Dacchè l'espressione (2) della forza viva è omogenea di secondo grado rispetto alle ξ'_v , η'_v , si ha dal teorema di EULERO

$$2T = \sum_0^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi'_v} \xi'_v + \frac{\partial T}{\partial \eta'_v} \eta'_v \right).$$

Nel secondo membro riconosciamo i due prodotti scalari $\Xi \times \xi'$, $H \times \eta'$. Risulta quindi, in virtù delle (20),

$$(21) \quad 2T = \Xi \times \mathfrak{D}\Xi + H \times \mathfrak{D}H.$$

Per la costruzione delle equazioni del moto nella divisata forma canonico-euleriana, è mestieri far intervenire, a norma delle (14) del paragrafo precedente, lo scalare

$$p = \frac{\partial T}{\partial q'},$$

(*) Cfr. BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Transformations linéaires* (Pavia, Mattei, 1912), pp. 20-22.

e il vettore Ω avente per componenti

$$\Omega_v = \frac{\partial T}{\partial \omega_v}.$$

Occupiamoci di esprimere p ed Ω in forma appropriata. All'uopo giova premettere che, se T dipende da un parametro generico μ , pel tramite delle ξ'_v , η'_v , si ha, derivando,

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \sum_v^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \xi'_v} \frac{\partial \xi'_v}{\partial \mu} + \frac{\partial T}{\partial \eta'_v} \frac{\partial \eta'_v}{\partial \mu} \right),$$

ciò che, attesa la definizione dei vettori Ξ , H , ξ' , η' , equivale a

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \Xi \times \frac{\partial \xi'}{\partial \mu} + H \times \frac{\partial \eta'}{\partial \mu}.$$

Se ne ricava in primo luogo, ponendo $\mu = q'$ e badando alle (17),

$$(22) \quad p = \frac{\partial T}{\partial q'} = \frac{1}{q} (\Xi \times \xi + H \times \eta).$$

Se poi si nota che il vettore ω si può esprimere, per mezzo delle componenti ω_v , e dei vettori fondamentali u_v , sotto la forma

$$\sum_v^2 \omega_v u_v,$$

si ha, dalle (17),

$$\frac{\partial \xi'}{\partial \omega_v} = \xi \wedge u_v, \quad \frac{\partial \eta'}{\partial \omega_v} = \eta \wedge u_v,$$

con che

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_v} = \Xi \times (\xi \wedge u_v) + H \times (\eta \wedge u_v) = u_v \times (\Xi \wedge \xi + H \wedge \eta).$$

Il terzo membro è manifestamente la componente secondo Ox , del vettore

$$\Xi \wedge \xi + H \wedge \eta.$$

Il primo membro è, per definizione, l'analoga componente del vettore Ω . Ne consegue la espressione di Ω sotto la voluta veste vettoriale:

$$(23) \quad \Omega = \Xi \wedge \xi + H \wedge \eta .$$

6. - Passaggio alla forma reciproca 2Θ mediante eliminazioni vettoriali.

Le definizioni (22), (23) di p ed Ω , e le (16), poste, in virtù delle (20), sotto la forma equivalente

$$(24) \quad \mathfrak{D}\Xi \times \xi - \mathfrak{D}H \times \eta = 0, \quad \mathfrak{D}\Xi \times \eta + \mathfrak{D}H \times \xi = 0,$$

costituiscono in sostanza un sistema di sei equazioni lineari (non omogenee) nei due vettori Ξ , H . Esse consentono quindi (in quanto siano indipendenti, come infatti sono) di ricavarne le sei componenti in funzione lineare dei vari termini noti (che si riducono a p ed Ω), a coefficienti che possono *a priori* dipendere da ξ , η e dall'omografia \mathfrak{D} , ossia, complessivamente, da q , α , β , γ . Portando queste espressioni dei due vettori Ξ , H nella (21), la T diviene una forma quadratica nelle p , Ω , (esente dai primitivi argomenti q' , ω); e si ha la Θ cercata la quale si presenta altresì esente dalle α , β (ha cioè i coefficienti che dipendono soltanto da q e dalle γ): circostanza questa senz'altro prevedibile in base all'analoga proprietà della T , già rilevata al § 3.

Anzichè eseguire per via diretta la risoluzione delle (22), (23), (24), e successiva sostituzione nella (21), conviene trasformare la (21) stessa a mezzo delle altre equazioni.

Dopo alquanti passaggi, tutti immediati sotto il duplice punto di vista concettuale e formale, l'eliminazione di Ξ , H si troverà automaticamente compiuta.

Prepariamoci anzi tutto l'espressione esplicita di

$$(25) \quad W = \xi \times \mathfrak{D}\xi + \eta \times \mathfrak{D}\eta .$$

Dacchè, a norma della (19), le componenti di $\mathfrak{D}\xi$, $\mathfrak{D}\eta$ sono ordinatamente $(1/4Um_v^*e_v^2)\xi_v$, $(1/4Um_v^*e_v^2)/\eta_v$, si ha subito, badando alle (3) e (4),

$$(26) \quad W = \sum_0^2 \frac{1}{4Um_v^*} = \frac{m^2}{4Um_0m_1m_2} .$$

Ciò premesso, riprendiamo l'espressione (21) di T , e scriviamola. sfrut-

tando le (24), sotto la forma equivalente

$$2WT = (\mathbf{E} \times \mathfrak{D}\mathbf{E} + \mathbf{H} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\xi \times \mathfrak{D}\xi + \eta \times \mathfrak{D}\eta) \\ - (\mathfrak{D}\mathbf{E} \times \xi - \mathfrak{D}\mathbf{H} \times \eta)^2 - (\mathfrak{D}\mathbf{E} \times \eta + \mathfrak{D}\mathbf{H} \times \xi)^2.$$

Sviluppando materialmente il prodotto e i due quadrati del secondo membro, ove inoltre si aggiunga (ad esso secondo membro) il binomio, identicamente nullo per la proprietà caratteristica delle dilatazioni, $2(\mathbf{E} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\xi \times \mathfrak{D}\eta) - 2(\mathbf{E} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\mathfrak{D}\xi \times \eta)$, si dà a $2WT$ la forma di somma dei sei termini seguenti:

$$t_1 = (\mathbf{E} \times \mathfrak{D}\mathbf{E})(\xi \times \mathfrak{D}\xi) - (\mathfrak{D}\mathbf{E} \times \xi)^2, \\ t_2 = (\mathbf{H} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\eta \times \mathfrak{D}\eta) - (\mathfrak{D}\mathbf{H} \times \eta)^2, \\ t_3 = (\mathbf{E} \times \mathfrak{D}\mathbf{E})(\eta \times \mathfrak{D}\eta) - (\mathfrak{D}\mathbf{E} \times \eta)^2, \\ t_4 = (\mathbf{H} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\xi \times \mathfrak{D}\xi) - (\mathfrak{D}\mathbf{H} \times \xi)^2, \\ t_5 = 2\{(\mathbf{E} \times \mathfrak{D}\xi)(\eta \times \mathfrak{D}\mathbf{H}) - (\mathbf{E} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\mathfrak{D}\xi \times \eta)\}, \\ t_6 = 2\{(\mathbf{E} \times \mathfrak{D}\mathbf{H})(\xi \times \mathfrak{D}\eta) - (\mathbf{E} \times \mathfrak{D}\eta)(\mathfrak{D}\mathbf{H} \times \xi)\}.$$

Ciascuno di questi può essere trasformato usando l'identità

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \times \mathbf{D})(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) \times (\mathbf{B} \wedge \mathbf{D})$$

valida qualunque siano i quattro vettori \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} .

In primo luogo, per

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathfrak{D}\mathbf{E}, \quad \mathbf{C} = \xi, \quad \mathbf{D} = \mathfrak{D}\xi,$$

viene

$$t_1 = (\mathbf{E} \wedge \xi) \times (\mathfrak{D}\mathbf{E} \times \mathfrak{D}\xi),$$

da cui, cambiando \mathbf{E} , ξ in \mathbf{H} , η ,

$$t_2 = (\mathbf{H} \wedge \eta) \times (\mathfrak{D}\mathbf{H} \times \mathfrak{D}\eta).$$

Assumendo poi

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathfrak{D}\mathbf{E}, \quad \mathbf{C} = \eta, \quad \mathbf{D} = \mathfrak{D}\eta.$$

si ha

$$t_3 = (\mathbf{E} \wedge \eta) \times (\mathfrak{D}\mathbf{E} \wedge \mathfrak{D}\eta),$$

la quale, colla sostituzione di H , ξ , a Ξ , η , porge

$$t_4 = (H \wedge \xi) \times (\mathfrak{D}H \wedge \mathfrak{D}\xi).$$

Infine, per

$$A = \Xi, \quad B = \mathfrak{D}\xi, \quad C = \eta, \quad D = \mathfrak{D}H;$$

e

$$A = \Xi, \quad B = \mathfrak{D}H, \quad C = \xi, \quad D = \mathfrak{D}\eta,$$

risulta rispettivamente

$$t_5 = 2(\Xi \wedge \eta) \times (\mathfrak{D}\xi \wedge \mathfrak{D}H) = -2(\Xi \wedge \eta) \times (\mathfrak{D}H \wedge \mathfrak{D}\xi),$$

$$t_6 = 2(\Xi \wedge \xi) \times (\mathfrak{D}H \wedge \mathfrak{D}\eta).$$

In ognuno dei termini t_j , ($j = 1, \dots, 6$) così trasformati, figura un prodotto vettoriale del tipo

$$\mathfrak{D}A \wedge \mathfrak{D}B.$$

Dalla teoria delle omografie vettoriali si sa (*) che un tale prodotto dipende da A e da B esclusivamente pel tramite del loro prodotto vettoriale. E precisamente si ha

$$\mathfrak{D}A \wedge \mathfrak{D}B = R\mathfrak{D}(A \wedge B),$$

l'operatore R applicato alla dilatazione \mathfrak{D} producendo, a norma della (19), la dilatazione

$$(27) \quad \left(\frac{1}{16Um_{v+1}^*m_{v+2}^*\varrho_{v+1}^2\varrho_{v+2}^2} u_v \right). \quad (v = 0, 1, 2).$$

Applichiamo questa formula ai vari t_j , introducendo per brevità il simbolo operativo

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{W} R\mathfrak{D},$$

il quale, in virtù delle (4), (26) e (27), si scrive

$$(28) \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{4U} \left(\frac{1}{m_v\varrho_{v+1}^2\varrho_{v+2}^2} u_v \right), \quad (v = 0, 1, 2).$$

(*) BURALI-FORTI e MARCOLONGO, op. cit., pp. 38-39.

Otteniamo

$$\frac{1}{W} t_1 = (\Xi \wedge \xi) \times \mathfrak{C}(\Xi \wedge \xi),$$

$$\frac{1}{W} t_2 = (H \wedge \eta) \times \mathfrak{C}(H \wedge \eta),$$

$$\frac{1}{W} t_3 = (\Xi \wedge \eta) \times \mathfrak{C}(\Xi \wedge \eta),$$

$$\frac{1}{W} t_4 = (H \wedge \xi) \times \mathfrak{C}(H \wedge \xi),$$

$$\frac{1}{W} t_5 = -2(\Xi \wedge \eta) \times \mathfrak{C}(H \wedge \xi),$$

$$\frac{1}{W} t_6 = 2(\Xi \wedge \xi) \times \mathfrak{C}(H \wedge \eta).$$

Ora, in quanto \mathfrak{C} è essa stessa una dilatazione, si ha ovviamente

$$\frac{1}{W} (t_1 + t_2 + t_6) = (\Xi \wedge \xi + H \wedge \eta) \times \mathfrak{C}(\Xi \wedge \xi + H \wedge \eta),$$

$$\frac{1}{W} (t_3 + t_4 + t_5) = (\Xi \wedge \eta - H \wedge \xi) \times \mathfrak{C}(\Xi \wedge \eta - H \wedge \xi),$$

le quali, badando alla (23) e ponendo

$$(29) \quad X = \Xi \wedge \eta - H \wedge \xi,$$

si scrivono più semplicemente

$$\frac{1}{W} (t_1 + t_2 + t_6) = \Omega \times \mathfrak{C}\Omega,$$

$$\frac{1}{W} (t_3 + t_4 + t_5) = X \times \mathfrak{C}X.$$

La somma delle t , non è altro che $2WT$; si ha quindi

$$2T = \Omega \times \mathfrak{C}\Omega + X \times \mathfrak{C}X.$$

È questa, come passiamo ad accertare, la voluta espressione 2θ di $2T$,

tosto esplicitabile come forma quadratica degli argomenti p, Ω_v . E in verità essa è visibilmente funzione quadratica dei due vettori Ω, X , a coefficienti che, a norma della (28), dipendono soltanto dalle ϱ , ossia, per le (11), da q e dalle γ_v : l'asserto sarà quindi provato se constateremo che X è funzione lineare ed omogenea di p , e delle Ω_v , con analoghi coefficienti.

All'uopo, partiamoci dall'osservazione che, attesa l'ortogonalità di α, β, γ , si ha dalle (7):

$$\xi = \eta \wedge \gamma, \quad \eta = -\xi \wedge \gamma;$$

con che la (29) può essere scritta

$$X = -\Xi \wedge (\xi \wedge \gamma) - H \wedge (\eta \wedge \gamma).$$

D'altra parte, l'identità

$$\Xi \wedge (\xi \wedge \gamma) + \xi \wedge (\gamma \wedge \Xi) + \gamma \wedge (\Xi \wedge \xi) = 0,$$

ove si noti che, per l'ortogonalità fra ξ e γ , il termine medio si riduce a $(\Xi \times \xi)\gamma$, porge

$$-\Xi \wedge (\xi \wedge \gamma) = (\Xi \times \xi)\gamma + \gamma \wedge (\Xi \wedge \xi).$$

Poniamovi H, η al posto di Ξ, ξ , e sommiamo, tenendo conto delle (22) e (23). Risulta

$$(30) \quad X = pq\gamma + \gamma \wedge \Omega,$$

e rimane in definitiva acquisita per la forma reciproca l'annunciata espressione

$$(31) \quad 2\theta = \Omega \times \mathfrak{C}\Omega + X \times \mathfrak{C}X,$$

la dilatazione \mathfrak{C} e il vettore X essendo rispettivamente definiti dalle (28) e (30).