DETERMINAZIONE DELLE VARIETÀ A TRE DIMENSIONI DI $S_r (r \geq 7)$ I CUI S_3 TANGENTI SI TAGLIANO A DUE A DUE

Una delle più notevoli proprietà caratteristiche della superficie di VERONESE è quella enunciata dal prof. DEL PEZZO nella sua Memoria sulle V_2^n di S_n (1) e dimostrata per la prima volta rigorosamente dal prof. BERTINI nella sua recente opera sulla geometria proiettiva degli iperspazi (2).

La proprietà in discorso si enuncia così:

La superficie di VERONESE *è la sola superficie di S_r $(r > 4)$ che non sia un cono e i cui piani tangenti si incontrino a due a due;*

ed essa risolve senz'altro per le superficie la questione che qui ci poniamo per le varietà a tre dimensioni.

Una V_3 che appartenga ad un S_r con $4 \leq r \leq 6$ ha per S_3 tangenti degli S_3 che certamente si tagliano a due a due, ma se una V_3 non è un cono ed appartiene ad un S_r con $r \geq 7$, è chiaro che due suoi S_3 tangenti generici in generale non si tagliano. D'altra parte il teorema ora citato fa pensare che debbano esservi delle V_3 particolari che, pur appartenendo a un S_r con $r \geq 7$, abbiano per S_3 tangenti degli S_3 mutuamente secantisi, e una facile analogia suggerisce subito la V_3^8 di S_9 che, se si riferisce l'S_9 allo spazio delle quadriche-inviluppo di un S_3, rappresenta quelle spezzate in un punto contato due volte e che appunto gode di questa proprietà singolare.

(1) DEL PEZZO, *Sulle superficie dell'n^0 ordine immerse nello spazio di n dimensioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. I (1887), pp. 241-271], n. 12.

(2) BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità* (Pisa, Enrico Spoerri, 1907), pp. 316 e 317.

www.rcin.org.pl

Cosicchè sembra che possa offrire un qualche interesse il ricercare se oltre questa V_3^8 e le sue proiezioni sopra un S_8 o un S_7 esistano delle V_3 dotate di tale particolarità.

Il risultato a cui si perviene e che, mentre risolve la questione ora posta, dà una nuova proprietà proiettiva di certe V_3 che già si erano presentate al prof. ENRIQUES in una sua ricerca di tutta altra natura (1), è raccolto nel seguente teorema:

Una V_3 di $S_r\,(r \geq 7)$ i cui S_3 tangenti si tagliano a due a due: o è un cono, o è situata sopra un cono avente per vertice un piano (in particolare consta di ∞^1 piani secanti in rette un piano fisso), o è situata sopra un cono proiettante da una retta una superficie di VERONESE *(e quindi appartiene ad un S_7), o è una V_3 razionale a curve sezioni ellittiche (e quindi appartiene al massimo ad un S_9 ed ha al massimo l'ordine* 8).

Notizie più minute sui vari tipi possibili di V_3 di quest'ultima specie risulteranno dal corso della dimostrazione.

1. Sia V_3^n una varietà (irriducibile) a tre dimensioni di $S_r (r \geq 7)$ i cui S_3 tangenti a due a due si taglino e supponiamo che essa non sia un cono, essendo senz'altro evidente che per una V_3^n conica la proprietà supposta resta verificata.

Si vede subito che i suoi S_3 tangenti non possono tagliarsi che in punti; poichè, se ad esempio, essi si tagliassero a due a due in rette, un S_{r-1} generico taglierebbe la V_3^n in una V_2^n irriducibile, appartenente ad S_{r-1}, non conica e coi piani tangenti mutuamente secantisi; quindi la V_2^n sarebbe una superficie di VERONESE e si avrebbe, contro l'ipotesi, $r-1=5$, cioè $r=6$.

Possono invece gli S_3 tangenti a V_3^n tagliare in rette un piano fisso, ma allora la V_3^n è situata sopra un cono avente per vertice quel piano.

Infatti, se gli S_3 tangenti a V_3^n tagliano in rette un piano fisso, un S_{r-1} generico taglia V_3^n in una V_2^n coi piani tangenti appoggiati a una retta fissa l; quindi nell'S_{r-1} ogni S_{r-2} per l taglia questa V_2^n in una linea con le tangenti appoggiate ad l, cioè in una linea piana (irriducibile o no) e la V_2^n è luogo di ∞^1 curve situate in piani per l. Siccome l è in sostanza una retta qualunque

(1) ENRIQUES, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche* [Mathematische Annalen, Bd. XLVI (1895), pp. 179-199], memoria nella quale si trovano esposti in maniera organica risultati a cui il sig. ENRIQUES era giunto in altri lavori precedenti.

www.rcin.org.pl

del piano fisso in discorso, si arriva alla conclusione che ogni piano per un punto della V_3^n e per una retta del piano fisso contiene una curva di V_3^n, cioè ogni S_3 per il piano fisso e per un punto della V_3^n ne contiene una superficie, e la V_3^n, come appunto si è affermato, giace sopra un cono avente per vertice un piano (in particolare, si compone di ∞^1 piani appoggiati ad un altro secondo rette).

2. Ciò posto, consideriamo un S_3 α tangente a V_3^n in un punto generico A e conduciamo per α un iperpiano generico. La sua sezione con la V_3^n sarà una superficie che potrà contenere o no una parte situata in α: astraendo, ove occorra, dalla parte contenuta in α e detta V_2^m $(m \leq n)$ la sezione residua, è facile riconoscere che V_2^m deve essere irriducibile.

Infatti, se V_2^m si spezzasse in due o più parti, il sistema lineare di V_2^m ottenuto secando V_3^n con tutti gli iperpiani per α sarebbe riducibile, e, non potendo contenere una parte fissa, si comporrebbe delle superficie di un fascio, cioè gli iperpiani per α e per il punto generico P di V_3^n conterrebbero la superficie del fascio (almeno) passante per P. Ma allora questa superficie starebbe nell'S_4 congiungente α con P, i punti della V_3^n si distribuirebbero sopra ∞^1 S_4 uscenti da α, la V_3^n starebbe sopra un cono avente per vertice α e l'S_3 tangente a V_3^n nel punto generico P, essendo contenuto nell'S_5 tangente al cono lungo il suo S_4 generatore passante per P, verrebbe a trovarsi con α in un S_5 e lo taglierebbe, contro quel che è stato detto, in una retta.

Notisi inoltre che V_2^m ed α non possono appartenere ad un $S_{r-\delta}$ $(\delta > 1)$. Infatti, se ciò fosse, si potrebbe condurre almeno un iperpiano per α, V_2^m e un punto P di V_3^n esterno ad α e a V_2^m; e siccome V_2^m e l'eventuale superficie di V_3^n in α costituiscono una superficie di ordine complessivo n, questo iperpiano conterrebbe V_3^n.

3. Tenute sempre le notazioni precedenti, un S_{r-3} condotto per α e per un punto generico B di V_2^m, contenendo la retta che congiunge B col punto ove l'S_3 tangente a V_3^n in B taglia α, passerà, non solo per B, ma anche per un punto infinitamente vicino a questo nella direzione rappresentata da quella congiungente. Ne segue che un S_{r-3} condotto per α e per un punto B della linea intersezione di V_2^m con un S_{r-2} (dell'iperpiano considerato) passante per α, tocca in B la linea stessa e quindi, supposto che l'S_{r-3} stia nell'S_{r-2}, o la contiene per intero o, se essa è riducibile, ne contiene una parte che passa per B; giacchè, se non la contenesse,

www.rcin.org.pl

tagliando la linea con gli S_{r-3} dell'S_{r-2} passanti per α, si avrebbe su di essa o su ciascuna sua parte una serie lineare con infiniti punti multipli. Ripetendo per l'S_{r-3} il ragionamento fatto per l'S_{r-2} e così proseguendo, si giunge alla conclusione che ogni S_4 condotto per α e per un punto B di V_3^n deve contenere una linea irriducibile di V_3^n passante per B [1].

Di qui segue che se si considerano le linee intersezioni di V_2^m con gli S_{r-2} passanti per α dell'iperpiano contenente V_2^m e si prescinde dalla parte fissa comune che eventualmente queste linee abbiano in α, esse formano un sistema lineare certamente riducibile (poichè per due S_4, dell'iperpiano, passanti per α passa almeno un S_{r-2}) e ognuna di esse sarà composta di un certo numero di linee irriducibili di un fascio; linee che, per brevità di discorso, chiameremo curve λ.

Immaginando di ripetere per tutti gli iperpiani contenenti α il ragionamento ora fatto, si giunge alla conclusione che ogni S_4 per α e per un punto B di V_3^n fuori di α contiene la linea λ che vi passa e, forse, insieme con essa qualche altra linea λ, se, per mantenerci nell'ipotesi più generale, supponiamo che i sistemi lineari considerati sulle V_2^m, si riducano, nei corrispondenti fasci delle λ, a delle serie lineari composte con involuzioni.

4. Da tutto quel che si è detto risulta che la V_3^n è riempita da ∞^2 linee λ distribuite a ϱ a ϱ ($\varrho \geq 1$) in ∞^2 S_4 passanti per α, ossia che essa è situata sopra un cono a sei dimensioni avente per vertice α. Questo cono lungo ogni S_4 generatore è toccato da un S_6 che contiene α e gli ∞^1 S_3 tangenti a V_3^n nei punti delle ϱ linee λ appartenenti a quell'S_4, dunque:

Gli S_3 tangenti a V_3^n nei punti delle ϱ linee λ contenute in un S_4 passante per un suo punto generico B e per l'S_3 α ad essa tangente in un altro punto generico A giacciono tutti, insieme con α, in uno stesso S_6 [2].

[1] Quest'osservazione, per quanto semplice, è fondamentale in questa ricerca e nelle analoghe che più tardi pubblicheremo sulle varietà a un numero qualunque di dimensioni. Essa è dovuta al prof. Bertini ed ha il merito di *utilizzare* nel modo migliore e più diretto l'ipotesi fatta sugli spazî tangenti.

[2] Non mi sembra inutile far notare come partendo da un'osservazione analoga a quella del testo si possa arrivare alla dimostrazione del teorema del prof. Del Pezzo in modo abbastanza rapido e semplice.

Infatti, si supponga che in una V_2 di S_r ($r > 4$), irriducibile, non conica, i piani tangenti si taglino a due a due e si faccia vedere che ogni S_3 per l'S_2

www.rcin.org.pl

5. Prima di procedere nella ricerca della natura delle curve λ, per rendere più chiaro un ragionamento ulteriore, facciamo vedere come la V_3^n non possa essere una semplice infinità di piani, a meno che non si supponga che questi piani si appoggino secondo rette a un piano fisso.

Se, infatti, la V_3^n risultasse di ∞^1 S_2, questi S_2, non appoggiandosi in rette a un piano fisso e non potendo passare tutti per una retta fissa o un punto fisso, poichè altrimenti la V_3^n sarebbe un cono, non potrebbero tagliarsi a due a due in rette per una ragione ovvia, e non potrebbero neppure tagliarsi a due a due in un punto, perchè altrimenti il loro insieme apparterrebbe a un S_5 (1). Inoltre l'S_3 α tangente a V_3^n in un suo punto A conterrebbe l'S_2 passante per A e un S_4 congiungente α con un punto B di V_3^n, esterno ad α, non potrebbe tagliare l'S_2 passante per B che in questo punto, poichè, ove ne contenesse una retta, questa passerebbe per il punto comune agli S_3 tangenti in A e B, e un tal punto, ove si trovasse nell'S_2 passante per B, dovrebbe anche giacere nell'S_2 passante per A. Allora quell'S_4 taglierebbe la V_3^n in una sua curva direttrice e lo stesso avverrebbe per gli S_4 congiungenti α con altri due punti generici C e D dell'S_2 passante per B; cioè la V_3^n apparterrebbe, al massimo, all'S_6 contenente questi tre S_4.

6. Ora consideriamo sulla V_3^n due punti generici A e B e gli S_3 ad essa tangenti in A e in B che chiameremo α e β. L'$S_4 \equiv \alpha B$ contiene certe ϱ linee λ e gli S_3 tangenti alla V_3^n nei punti di queste linee stanno nell'$S_6 \equiv \alpha\beta$. Se l'$S_4 \equiv \beta A$ contenesse ϱ linee λ diverse dalle precedenti, anche gli S_3 tangenti a V_3^n nei punti di queste starebbero in $\alpha\beta$, e facendo variare il punto B sulle linee situate in αB, si avrebbero ∞^2 punti della V_3^n i cui S_3 tangenti starebbero sempre nell'$S_6 \equiv \alpha\beta$. Allora ogni coppia di punti di V_3^n determinerebbe una superficie Φ della V_3^n tale che gli S_3 tan-

α tangente alla V_2 in un punto A e per un punto B della superficie stessa esterno ad α ne contiene una linea λ passante per B. La V_2 risulterà situata sopra un cono avente per vertice α; quindi i piani ad essa tangenti nei punti di una linea λ apparterranno a un S_4, e poichè tale S_4 non può contenere tutti i piani tangenti della V_2, esso ne conterrà soltanto ∞^1 e il luogo dei loro punti di contatto, che è λ, passerà per A.

Ma allora λ, trovandosi nell'$S_3 \equiv \alpha B$ e nell'S_3 che congiunge A al piano tangente alla V_2 in B, è una curva piana; dunque, etc.

(1) Cfr. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità* (Pisa, Enrico Spoerri, 1907), p. 316.

www.rcin.org.pl

genti alla V_3^n nei punti della superficie giacerebbero tutti in uno stesso S_6.

Per decidere se una tale circostanza possa o no verificarsi, supponiamola verificata per la nostra V_3^n e supponiamo, come è possibile, che la dimensione dello spazio ambiente sia 7, poichè altrimenti proietteremmo la V_3^n da punti esterni.

Tagliando la V_3^n con un S_6 generico si ottiene una superficie V_2^n, irriducibile, appartenente ad S_6 e tale che, presi due suoi punti generici A e B e i piani α' e β' ad essa tangenti in A e B, l'$S_5 \equiv \alpha' \beta'$ tocca la V_2^n, non solo in A e in B, ma anche in tutti i punti di una linea f (sezione di una superficie Φ col considerato S_6), la quale passerà per A e per B.

Questa proprietà della V_2^n può enunciarsi dicendo che nel sistema lineare ∞^3 delle linee tagliate su V_2^n dagli S_5 (dell'S_6 che la contiene) passanti per α', basta imporre ad una linea un punto doppio in un punto generico B della superficie, perchè essa ne contenga ∞^1; quindi, se si immagina di trasformare la V_2^n in una superficie (semplice o multipla) dello spazio ordinario riferendo proiettivamente quelle linee ai piani di questo spazio, un piano tangente a questa superficie in un punto la toccherà in altri ∞^1 e la superficie sarà una sviluppabile (in particolare un cono). Ne segue che le generatrici di questa sviluppabile (contate ciascuna una o più volte) rappresenteranno le ∞^1 linee f passanti per A, e come ciascuna di quelle giace in ∞^1 piani, così ciascuna di queste si troverà in ∞^1 S_5 per α', ossia giacerà in un S_4 per α'.

Ora le linee f costituiscono sulla V_2^n un sistema ∞^2 tale che per due punti generici A e B di V_2^n ne passa una sola, dunque o esse sono irriducibili e costituiscono una rete, o si spezzano ciascuna in due o più curve f_1 di un fascio situato sopra V_2^n (1).

Discutiamo separatamente le due ipotesi.

a) Se la linea f passante per A e B è irriducibile, come essa è situata in un S_4 passante per B e per α', così è situata anche in un S_4 per A e per β'; questi due S_4 sono distinti, poichè α' e β' *appartengono* ad un S_5, e stanno in questo S_5, quindi si tagliano in un S_3 che contiene la linea f.

(1) ENRIQUES, *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. II (1893), 2° semestre, pp. 3-8]; od anche SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* [Annali di Matematica, serie II, t. XXII (1894), pp. 41-142], n. 27.

www.rcin.org.pl

Segue che le linee f o appartengono a piani o sono curve sghembe ordinarie.

Il supporre che le linee f siano piane e quindi coniche (altrimenti ogni corda di V_2^n sarebbe almeno una trisecante) porta alla conclusione che V_2^n è una superficie di VERONESE e quindi *non appartenente* ad un S_6, dunque non resta che supporre che le f siano linee sghembe ordinarie.

Se la serie caratteristica della rete delle f è una g_n^1 con $n > 1$, i gruppi di questa serie saranno situati sui piani o sulle rette secondo cui si tagliano a due a due gli S_3 che contengono le linee f. Ma tali S_3 non possono tagliarsi a due a due in piani, perchè non giacendo in un S_4 dovrebbero passare tutti per lo stesso piano e la g_n^1 si ridurrebbe a una g_n^0; quindi si taglieranno in rette e in ciascun S_3 le rette segnatevi dagli altri saranno le generatrici di una rigata (razionale) contenente la relativa linea f e taglieranno la f nei gruppi della g_n^1. Ora questa rigata è necessariamente un cono, poichè in caso contrario due sue rette generiche non avrebbero punti comuni e l'S_5 determinato da due degli ∞^2 S_3 delle linee f li verrebbe a contener tutti, contenendo di un terzo S_3 generico due rette sghembe; quindi quegli ∞^2 S_3 passan tutti per uno stesso punto O.

Si immagini allora di proiettare i punti della V_2^n da questo punto O e di considerare la congruenza di rette che così si ottiene come una superficie Ψ dello spazio a cinque dimensioni costituito dalle rette della iperstella O; corrispondentemente alle ∞^2 linee sghembe di V_2^n situate in S_3 per O e quindi proiettate da O mediante le generatrici di coni appartenenti a stelle ordinarie, si avranno sulla superficie Ψ ∞^2 linee piane e quindi queste linee saranno coniche, Ψ sarà una superficie di VERONESE e la V_2^n sarà situata sopra un cono ottenuto proiettando da un punto O una superficie di VERONESE.

Poichè le sezioni f delle superficie Φ della V_3^n con un iperpiano generico appartengono a degli S_3 secantisi in rette uscenti da un punto O, le superficie Φ apparterranno a degli S_4 secantisi a due a due in piani uscenti da una retta o: di più questi piani potranno considerarsi come ottenuti proiettando da o i punti di una superficie di VERONESE e formeranno una V_4^4 contenente la V_3^n.

Si trova così una delle classi di V_3^n indicate nell'enunciato, poichè è chiaro che, inversamente, una V_3^n situata sopra un cono ottenuto proiettando da una retta o una superficie di VERONESE ha per S_3 tangenti degli S_3 che a due a due si tagliano in un punto.

www.rcin.org.pl

Infatti questo cono lungo ogni S_2 generatore ammette un S_4 tangente che si ottiene proiettando dal vertice o il piano tangente alla superficie di VERONESE nel punto situato su quell'S_2; quindi gli S_4 tangenti al cono si tagliano a due a due in piani per o e gli S_3 tangenti della V_3^n, trovandosi in questi S_4, si tagliano a due a due in punti contenuti nei piani secondo cui si tagliano gli S_4 che li contengono.

Si osservi inoltre che due S_4 tangenti del cono o stanno in un S_6 che contiene gli S_4 tangenti al cono lungo tutti gli S_2 generatori di un certo cono quadrico (1): questo cono quadrico contiene una superficie della V_3^n tale che gli S_3 tangenti alla V_3^n in tutti i suoi punti stanno in un S_6. Tale superficie è pertanto una delle superficie Φ del ragionamento precedente.

Per esaurire la discussione del caso che stiamo considerando supponiamo che la rete delle f sia una rete omoaloidica, cioè che le curve della rete si taglino a due a due in un sol punto variabile. Allora le superficie Φ si tagliano a due a due in una sola retta variabile, appartengono a degli S_4 e sono delle rigate razionali.

Una rigata razionale dell'S_4 d'ordine n ammette sempre $\binom{n-2}{2}$ punti doppi impropri (2), quindi se le superficie Φ sono di un ordine $n > 3$ ciascuna di esse ha dei punti doppi impropri. Ora se questi punti doppi impropri sono dei punti base per il sistema delle Φ, gli S_4 cui queste rigate appartengono, tagliandosi a due a due in rette oltre che in questi punti base, si taglieranno a due a due in piani (3), e gli S_3 delle linee f di ogni sezione iperpiana si taglieranno a due a due in rette uscenti da un punto, perchè due generiche di queste rette non possono essere sghembe, per una ragione già detta, e d'altronde è chiaro che esse non possono stare in un

(1) È noto che i piani tangenti a una superficie di VERONESE nei punti di una sua conica stanno tutti in un S_4 tangente doppio della superficie.

(2) SEVERI, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XV (1901), pp. 33-51], n. 2 in nota; o anche TANTURRI, *Un problema di geometria numerativa sulle varietà algebriche luogo di ∞^1 spazî* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXV (1900), pp. 427-442], n. 12.

(3) Notisi che le rette d'intersezione degli S_4 non possono passare pei punti base in discorso, se essi sono in numero finito (e quindi si riducono a un solo), perchè V_3^n è irriducibile e non è un cono: che se poi la varietà base è almeno ∞^1, l'affermazione del testo è subito giustificata.

www.rcin.org.pl

piano. Ne segue che, se non si vuol ricadere in un caso già considerato, si deve supporre che quei punti doppi impropri siano variabili e quindi descrivano una varietà multipla per la V_3^n (1).

Allora detto M uno dei punti doppi impropri di una superficie generica Φ_0, esso è punto-base per un fascio di superficie Φ e la linea intersezione di due superficie di questo fascio, avendo un punto quadruplo (almeno) in O, non potrà essere una retta. Si conclude che queste superficie Φ debbono avere una parte comune e (poichè Φ_0 è una superficie generica della rete) che la rete è riducibile, contro l'ipotesi fatta.

Non resta dunque che far l'ipotesi che queste superficie Φ siano rigate cubiche normali e quindi segnino sopra ogni curva sezione di V_3^n con un S_5 una g_3^2, per modo che questa curva risulti razionale od ellittica.

A questo punto la discussione è facilmente esaurita tenendo presenti i tipi di varietà a tre dimensioni a sezioni razionali od ellittiche che già furono enumerati dal prof. ENRIQUES, e così si riconosce subito che V_3^n è a sezioni ellittiche, è una V_3^6 di S_7, e, precisamente, stando le ipotesi fatte, quella che è rappresentata punto per punto in uno spazio ordinario, le sezioni iperpiane avendo per immagini le superficie del terz'ordine aventi un punto-base doppio P, biplanare, con uno dei piani osculatori fisso, e una cubica-base piana con un punto doppio in P.

Questa V_3^6 contiene realmente una rete di rigate cubiche normali che due a due dànno una sezione iperpiana; quindi gli S_3 tangenti alla V_3^6 nei punti di una di esse stanno in un S_6. Di più, non è difficile vedere che le rigate hanno tutte la stessa direttrice d, la retta d essendo doppia per la V_3^6 (2), per modo che V_3^6 sta sopra un cono proiettante da d una superficie di VERONESE e, per conseguenza, rientra nella classe di varietà già incontrate.

b) Passiamo ora all'ipotesi che sulla V_2^n le curve f si spezzino in due o più curve f_1 di un fascio.

Allora la linea f per due punti generici A e B di V_2^n è formata (o contiene, insieme con qualche altra curva del fascio $|f_1|$) dalle

(1) SEVERI, *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLI (1906), pp. 205-223], n. 1, od anche BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e le loro singolarità* (Pisa, Enrico Spoerri, 1907), pag. 239.

(2) Questa ed altre proprietà di questa V_3^6 e delle analoghe a curve sezioni ellittiche si troveranno ampiamente sviluppate in un lavoro che sto preparando sulle varietà a curve sezioni ellittiche a un numero qualunque di dimensioni.

www.rcin.org.pl

due curve di $|f_1|$ passanti per A e per B, f_{1a} ed f_{1b}. Tenendo fermo B e facendo variare A sulla V_2^n resta fissa la parte f_{1b} della curva f per A e per B; cosicchè, se diciamo S_δ lo spazio a cui appartengono i piani tangenti a V_2^n nei punti di f_{1b}, gli S_5 per S_δ tagliano V_2^n in un sistema lineare di curve contenente (parzialmente o totalmente) ogni curva del fascio $|f_1|$ contata due volte. Ciò porta che la dimensione di questo sistema deve essere almeno 2 e che quindi δ è al più 3; e poichè chiaramente δ deve anche essere > 2 si conclude che $\delta = 3$, ossia che i piani tangenti a V_2^n nei punti di una curva del fascio $|f_1|$ appartengono a un S_3 che contiene la curva. Questa curva allora trovandosi in un tale S_3 e dovendo d'altra parte giacere anche in un S_4 per α', che non contiene l'S_3, sarà una curva piana (1).

Gli S_3 che contengono i piani tangenti a V_2^n nei punti delle varie curve di $|f_1|$ giacendo a coppie (almeno) in un S_5 si tagliano a due a due in una retta, e su una di queste rette si troveranno, per es., i punti ove il piano π_b della f_{1b} è tagliato dai piani tangenti alla V_2^n nei punti di f_{1a}, poichè ciascuno di questi viene a trovarsi con π_b in un S_4 e quindi ha certo con esso un punto comune. Segue che il piano π_b della f_{1b} deve contener quella retta: se non la contenesse i piani tangenti a V_2^n nei punti di f_{1a} dovrebbero passare tutti per uno stesso punto del piano π_b; così per uno stesso punto del piano π_c di f_{1c} e non potendo questi punti esser distinti (poichè altrimenti quei piani stando in un S_3 formerebbero un fascio di piani e le tangenti di f_{1a} passerebbero tutte per un punto) si concluderebbe che i piani tangenti nei punti di f_{1a} passerebbero tutti per un punto comune a tutti i piani delle curve f_1. Allora per questo punto passerebbero tutti i piani tangenti di V_2^n, e V_2^n sarebbe, al pari di V_3^n, un cono.

Si deduce da ciò che il piano di f_{1b} contiene la retta intersezione dei due S_3 relativi a f_{1a} ed f_{1b}. Ma allora anche il piano di f_{1a} contiene quella retta e i piani delle f_1, tagliandosi due a due in rette e non essendo situati in uno stesso S_3, passano tutti per una medesima retta. Ogni sezione iperpiana di V_3^n è formata dunque di ∞^1 curve piane situate in piani per una retta, il fascio delle superficie Φ_1, corrispondenti alle f_1, in cui si spezzano le superficie Φ, è un fascio di superficie appartenenti ad S_3 per uno stesso piano, e la V_3^n è situata sopra un cono avente per vertice un piano.

(1) Notisi che le linee f_1 non possono esser delle rette, poichè in tal caso la V_3^n sarebbe una ∞^1 di piani, contro quel che è stato dimostrato al n. 5.

www.rcin.org.pl

Osservando che, inversamente, una V_3^n situata sopra un cono avente per vertice un piano realizza le ipotesi fatte in quest'ultima parte *b*) della discussione e gode della solita proprietà relativa agli S_3 tangenti, si giustifica un'altra parte dell'enunciato che raccoglie i risultati di questa ricerca.

7. Nella discussione precedente abbiamo supposto che la V_3^n appartenesse ad un S_7; ora consideriamo una V_3^n di $S_r\,(r > 7)$, per la quale gli S_6 che contengono gli S_3 tangenti in due punti generici A e B contengono gli S_3 tangenti in tutti i punti di una superficie passante per A e B e situata sopra la V_3^n.

Proiettando la V_3^n da $r - 7$ punti generici sopra un S_7, si ottiene in questo spazio una V_3^* del tipo or ora studiato, cioè, o una V_3^* situata sopra un cono avente per vertice un piano (in questo caso le superficie Φ^* della V_3^* si spezzano in coppie di superficie di un fascio appartenenti ad S_3 per un piano), o una V_3^* situata sopra un cono proiettante da una retta o^* una superficie di Veronese (in questo caso le superficie Φ^* della V_3^* sono situate sopra gli ∞^2 coni quadrici proiettanti dalla retta o^* le ∞^2 coniche della superficie di Veronese). Nel primo caso una superficie Φ essendo proiettata da $r - 7$ punti *generici* in una superficie Φ^* appartenente ad un S_3 dovrà anch'essa appartenere ad un S_3, e gli S_3 contenenti le superficie Φ dovranno, al pari di quelli contenenti le Φ^*, passare per un piano fisso; nel secondo caso la V_3^*, essendo sopra un cono proiettante da una retta o^* una superficie di Veronese, conterrà ∞^2 curve piane situate negli ∞^2 piani per o^* di una V_4^{*4}, le quali saranno immagini di ∞^2 curve pure piane della V_3^n situate in ∞^2 piani per una retta o di una V_4^4.

Si vede pertanto che il primo caso porta a varietà appartenenti a uno spazio a un numero qualunque di dimensioni, ma il secondo non dà, come appunto si afferma nel nostro teorema, che varietà appartenenti a uno spazio a sette dimensioni.

8. Esclusi i tipi di varietà considerati fin qui, consideriamo quello da riguardarsi come il più generale (e che è anche il più importante) pel quale accade che l'S_6 contenente gli S_3 tangenti in due punti contiene soltanto quelli tangenti in altri ∞^1 punti costituenti una curva passante per quei due.

Per una osservazione già fatta, se V_3^n è una varietà di questo tipo e A e B sono due suoi punti generici, la curva, luogo dei punti di contatto degli S_3 tangenti contenuti nell'S_5 determinato dagli

www.rcin.org.pl

S_3 α e β tangenti in A e B rispettivamente, è contenuta non solo nell' S_4 che congiunge α e B, ma anche nell' S_4 che congiunge β ed A. Ora questi due S_4 non possono avere che un piano comune (quello determinato dai punti A, B ed $\alpha\beta$), poichè se si tagliassero in un S_3, α e β avrebbero almeno una retta in comune, dunque quella curva è piana, del 2^0 ordine (in caso contrario ogni corda della V_3^n sarebbe almeno una trisecante) e irriducibile (i punti A e B essendo generici), cioè è una conica vera e propria.

Si vede pertanto che le curve λ del teorema enunciato al n. 4 sono, in questo caso, delle coniche; che il numero ϱ ivi contenuto è uguale ad 1, e che la V_3^n possiede ∞^4 coniche, per ogni sua coppia di punti generici passandone *una sola*.

Ciò porta che le ∞^2 coniche uscenti da un punto generico A della V_3^n formano un sistema ∞^2 in corrispondenza biunivoca con la stella delle tangenti alla V_3^n uscenti da A, cioè un sistema razionale, e che anche la V_3^n è razionale, poichè se si riferisce ogni punto B della V_3^n diverso da A al punto B', ove la tangente nel punto B alla conica per A e B taglia quella ad essa tangente nel punto A, la V_3^n viene birazionalmente riferita all' S_3 α ad essa tangente nel punto A.

Allora conduciamo per A e in α un piano generico π (che risulterà tangente a V_3^n) e costruiamo le ∞^1 coniche che toccano in A le rette del fascio (A, π). I piani di queste coniche riempiono una $V_3^{(0)}$ che non può essere nè una V_3^1, cioè un S_3, nè una V_3^2.

Infatti, se la $V_3^{(0)}$ si riducesse ad un S_3, questo S_3 sarebbe determinato da π e da una delle ∞^1 coniche per A considerate: e allora un S_4 per α e per un punto generico B della V_3^n verrebbe a contenere tutti gli S_3 che in questo modo verrebbero a corrispondere ai piani di α condotti per la retta tangente in A alla conica che passa per A e B; cioè quell' S_4 verrebbe a contenere la V_3^n. E se inoltre la $V_3^{(0)}$ fosse una V_3^2, cioè appartenesse a un S_4 per π, un S_5 (per π) che ne contenesse due punti generici fuori di π la conterrebbe per intero, o, in altri termini, ogni S_5 passante per α e per due punti generici B e C di V_3^n conterrebbe le ∞^1 coniche tangenti in A alle rette del fascio determinato dalle rette che ivi toccano le coniche passanti per A e B, A e C rispettivamente. Cosicchè ogni S_{r-2} per α, dovendo contenere almeno due coniche per A (n. 3), ne conterrebbe infinite e la sezione di V_3^n con un iperpiano generico passante per α, esterna ad α, sarebbe sempre spezzata, contro quel che più sopra è stato dimostrato.

www.rcin.org.pl

Si conclude che la $V_3^{(0)}$ è almeno del 3^0 ordine e che quindi un iperpiano generico condotto per il piano π, essendo questo un piano *direttore semplice* per la $V_3^{(0)}$, dovrà tagliarla almeno in altri due piani, cioè dovrà contenere almeno due delle ∞^1 coniche della V_3^n tangenti in A al piano π.

Questo risultato può presentarsi sotto una forma che ci permetterà di caratterizzare immediatamente il tipo di V_3^n in questione.

Esso esprime infatti che la sezione iperpiana generica contiene un sistema ∞^1 di coniche tale che per ogni suo punto ne passano almeno due: ma tale sezione è certo una superficie regolare (¹), e per un noto teorema dell'HUMBERT sopra una superficie regolare ogni sistema algebrico di curve è totalmente contenuto in un sistema lineare, quindi o il sistema di coniche è irriducibile e allora *appartiene* a un sistema lineare ∞^2 (almeno) o è riducibile e allora si spezza in due o più fasci lineari. La prima alternativa è subito esclusa dal fatto che la sezione iperpiana in discorso non può essere una superficie di VERONESE, la seconda porta alla conclusione che sopra ogni curva sezione di V_3^n si hanno almeno due g_2^1 e che quindi V_3^n è una varietà (razionale) a curve sezioni ellittiche (non razionali, perchè la V_3^n non può contenere ∞^1 piani) (²).

Ricorrendo alla classificazione di queste varietà compiuta come già si è detto dal prof. ENRIQUES, si trova allora che la V_3^n o è la V_3^8 di S_9, riferibile ad un S_3 punto per punto così che le sezioni iperpiane siano rappresentate dalle ∞^9 quadriche dello spazio stesso, o è una proiezione di questa V_3^8 sopra un S_7 o un S_6, o è la V_3^6 di S_7, riferibile punto per punto ad un S_3 così che le sezioni iperpiane siano rappresentate dalle superficie cubiche con un punto-base doppio P e una cubica gobba base passante per P.

Le sezioni iperpiane di queste V_3 contengono realmente dei fasci di coniche, e precisamente, quelle della V_3^8 ne contengono *due*, mentre quelle della V_3^6 ne contengono *tre*; in ognuna di tali V_3 gli S_3 tangenti sono, come è chiaro, mutuamente incidenti e infine

(¹) CASTELNUOVO ed ENRIQUES, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, III^e série, t. XXIII (1906), pp. 339-366]; od anche: SEVERI, *Osservazioni varie di Geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* [Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Anno acc. 1905-1906; t. LXV (serie VIII, t. VIII); parte seconda, pp. 625-643].

(²) ENRIQUES, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche* [Mathematiche Annalen. Bd. XLVI (1895) pp. 179-199].

www.rcin.org.pl

si verifica pure con tutta facilità che gli S_3 tangenti a una qualunque di esse nei punti di una conica appartengono a un S_6.

Il teorema enunciato è così del tutto stabilito.

9. La V_3^6 di S_7, nominata nel n. precedente, può caratterizzarsi in una maniera proiettiva semplice.

Si può dimostrare infatti che essa può ottenersi secando con un S_7 generico la V_4^6 di S_8 studiata dal prof. Segre (1) e generabile mediante tre piani collineari o mediante tre stelle di spazi a sei dimensioni aventi per centri tre S_5 generici e riferite omograficamente.

Quindi la V_3^6 in discorso è la varietà luogo delle ∞^2 rette secondo cui si tagliano le ∞^2 terne di S_5 omologhi di tre stelle omografiche aventi per centri tre S_4 generici; e come la V_4^6 contiene due sistemi ∞^2 di piani con proprietà identiche, così la V_3^6 contiene un altro sistema ∞^2 di rette generabile allo stesso modo.

10. La ricerca compiuta in questa Nota, quando si tenga presente un teorema che qui mi contenterò d'enunciare, permette di risolvere subito la questione:

Caratterizzare tutte le varietà a quattro dimensioni di S_r ($r \geq 8$) che non siano coni e i cui S_4 tangenti si taglino a due a due in rette.

Infatti, se V_4^n è una tale varietà, la sua sezione iperpiana generica è una V_3^n di uno spazio a 7 dimensioni almeno, i cui S_3 tangenti a due a due si tagliano, e quindi questa V_3^n, non potendo essere un cono,

a) o sta sopra un cono avente per vertice un piano;

b) o sta sopra un cono proiettante da una retta una superficie di Veronese;

c) o è una V_3 a curve sezioni ellittiche.

L'ipotesi *a*) conduce facilmente alla conclusione che V_4^n sta sopra un cono avente per vertice un S_3.

Infatti, se chiamiamo π_α il piano che è vertice del cono contenente la sezione di V_4^n ottenuta con l'iperpiano α, la superficie V_2^n sezione di V_4^n con un S_{r-2} di α contiene ∞^1 linee situate in ∞^1 piani per la retta l comune al detto S_{r-2} e al piano π_α: per conseguenza, se al mutare di α nel fascio che ha per asse questo S_{r-2}

(1) Segre, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. V (1891), pp. 192-204].

www.rcin.org.pl

il piano π_α non rotasse intorno alla retta l, la superficie V_2^n conterrebbe ∞^2 linee piane, sarebbe una superficie di VERONESE e apparterrebbe a un S_5. Si vede da ciò che i piani π corrispondenti nel modo che risulta dall'ipotesi fatta ai vari iperpiani di S_r si tagliano a due a due in rette e quindi, non potendo evidentemente passare per una stessa retta, sono situati in un S_3, vertice di un cono a cinque dimensioni i cui S_4 generatori contengono ciascuno una V_3 della V_4^n.

In maniera analoga si dimostra che nell'ipotesi *b*), la V_4^n sta sopra un cono proiettante da un piano una superficie di VERONESE.

Infatti, se la sezione di V_4^n ottenuta con l'iperpiano generico α sta sopra un cono proiettante da una o_α una superficie di VERONESE, la superficie V_2^n sezione di V_4^n con un S_{r-2} generico sta sopra un cono proiettante da un punto O una superficie di VERONESE e contiene, corrispondentemente alle ∞^2 coniche di questa, una rete di ∞^2 curve appartenenti a spazi a tre dimensioni. Ne segue che al mutare di α intorno ad S_{r-2} la retta o_α muta intorno al punto O, oppure la superficie V_2^n contiene ∞^2 curve sghembe ordinarie e quindi ∞^3 cubiche gobbe, poichè in caso contrario ogni piano trisecante di V_2^n sarebbe almeno quadrisecante.

Nel primo caso la nostra affermazione resta senz'altro stabilita; nel secondo caso vale egualmente, ma non vi insisteremo più a lungo, perchè quand'esso si verifica la V_4^n è a curve sezioni ellittiche e quindi si cade nell'ipotesi *c*).

Per discutere l'ipotesi *c*) basta considerare le varietà a quattro dimensioni, non coniche, a curve sezioni ellittiche appartenenti a spazi di più che sette dimensioni, le cui sezioni iperpiane sono delle V_3^6 o delle V_3^8 (n. 8); e allora si perviene alla conseguenza [1] che la V_4 considerata è necessariamente la V_4^6 di S_8 studiata dal prof. SEGRE.

I ragionamenti fatti per esaminare da vicino le ipotesi *a*) e *b*) sono facilmente invertibili, dunque:

[1] Noi dimostreremo, infatti, in uno dei lavori di cui si è già parlato che: *Eccettuate le forme cubiche e le quartiche intersezioni di due quadriche, ogni altra V_4 a curve sezioni ellittiche: o è un cono, o è una ∞^1 ellittica di S_3, o è proiezione di una certa V_4^5 di S_7, o della V_4^6 di* SEGRE *già nominata.*

www.rcin.org.pl

Una varietà a quattro dimensioni di S_r $(r \geq 8)$ i cui S_4 tangenti si taglino a due a due in rette: o è un cono, o sta sopra un cono avente per vertice un S_3, o sta sopra un cono proiettante da un piano una superficie di VERONESE, *o è la V_4^6 di* SEGRE *generabile mediante piani o stelle collineari. In questi ultimi due casi la varietà appartiene ad un S_8.*

Palermo, settembre-ottobre 1907.

www.rcin.org.pl