NOTA II (1).

FORME ESPLICITE (MISTA E CANONICHE) DELLE EQUAZIONI REGOLARIZZATE.

Ibidem, vol. XXIV$_2$ (1915$_2$),

pp. 485-501.

7. - Regolarità.

Le equazioni canonico-euleriane del moto di S dipendono esclusivamente [cfr. § 8 della Nota M), pag. 506 di questo volume] dalla funzione

$$H = \Theta - \frac{E}{U}, \tag{15}$$

col valore di Θ esplicitato nel § precedente.

Siamo *a priori* assicurati (2) che il sistema differenziale ha comportamento regolare *anche* nell'intorno di un eventuale urto binario (una delle ϱ nulla, e le altre due diverse da zero). Ne abbiamo conferma diretta nella *regolarità della H per tutti i valori finiti degli argomenti p, Ω_ν, q, γ_ν*, questi ultimi essendo coseni direttori, ossia legati dalla relazione $\gamma_1^2+\gamma_2^2+$ $+\gamma_3^2=1$. Invero, le (11) mostrano intanto che, per $q>0$, come (§ 2) va sempre ritenuto, può annullarsi una sola delle ϱ (in corrispondenza al valore ± 1 della γ affetta dallo stesso indice). Con ciò i rapporti $1/U$, $1/\varrho_\nu^2 U$, nonchè $1/\varrho_{\nu+1}^2\varrho_{\nu+2}^2 U$ $(\nu=0,1,2)$, si comportano regolarmente, anche in prossimità di urti binarî; e, in virtù delle (28), (31), (15), lo stesso segue per H, c. d. d.

8. - Digressione su due vettori desumibili dalla funzione H.

Studiamo un po' i due vettori $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Gamma}$, le cui componenti (secondo gli assi $Ox_0x_1x_2$) sono

$$\omega_\nu = \frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu}, \qquad \Gamma_\nu = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu}.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1915.

(2) R), p. 491 [di questo volume].

Sappiamo già [M, § 8] che $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare, quello stesso vettore che ripetutamente figura nei §§ antecedenti; si tratta di renderne espressiva anche la dipendenza formale dagli elementi costitutivi della funzione H.

All'uopo premettiamo che, per essere identicamente

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_0^2{}_\nu \, \Omega_\nu \boldsymbol{u}_\nu \,,$$

si ha, dalla (30),

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \Omega_\nu} = \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{u}_\nu ;$$

quindi, in quanto $\mathfrak{E}$ è una dilatazione,

$$\frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu} = \boldsymbol{u}_\nu \times \mathfrak{E}\boldsymbol{\Omega} + (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{u}_\nu) \times \mathfrak{E}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u}_\nu \times (\mathfrak{E}\boldsymbol{\Omega} + \mathfrak{E}\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{\gamma}) \,.$$

Il primo membro è, per definizione, la componente di $\boldsymbol{\omega}$ secondo Ox_ν; l'ultimo membro si presenta come l'omologa componente del vettore $\mathfrak{E}\boldsymbol{\Omega} + \mathfrak{E}\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{\gamma}$. Perciò

$$\boldsymbol{\omega} = \mathfrak{E}\boldsymbol{\Omega} + \mathfrak{E}\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{\gamma} \,. \tag{32}$$

In modo analogo segue, dalla (30),

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \gamma_\nu} = pq\boldsymbol{u}_\nu + \boldsymbol{u}_\nu \wedge \boldsymbol{\Omega} \,,$$

talchè, per le (15) e (31),

$$\Gamma_\nu = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu} = - pq\boldsymbol{u}_\nu \times \mathfrak{E}\boldsymbol{X} - (\boldsymbol{u}_\nu \wedge \boldsymbol{\Omega}) \times \mathfrak{E}\boldsymbol{X} + \Gamma_\nu^* \,,$$

l'ultimo addendo rappresentando il contributo proveniente: sia dal termine $-E/U$ (energia potenziale), sia dal fatto che anche l'operatore $\mathfrak{E}$ dipende dalle γ_ν.

I primi due addendi equivalgono complessivamente a

$$- \boldsymbol{u}_\nu \times (pq\mathfrak{E}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathfrak{E}\boldsymbol{X}) \,,$$

ossia alle componenti Ψ_ν del vettore

$$\mathbf{\Psi} = pq\mathfrak{E}X + \mathbf{\Omega}\wedge\mathfrak{E}X\,, \tag{33}$$

preso con segno cambiato.

Quanto a Γ_ν^*, si vede subito:

1) che l'energia potenziale dà luogo al contributo $-\partial/\partial\gamma_\nu(E/U)$;

2) che, per tener conto dell'intervento delle γ_ν in $\mathfrak{E}$, giova porre

$$g = \frac{1}{8U\varrho_0^2\varrho_1^2\varrho_2^2}\,, \tag{34}$$

e scrivere Θ per disteso sotto la forma

$$\Theta = g\sum_0^2 \frac{1}{m_\nu}\,\varrho_\nu^2(\Omega_\nu^2 + X_\nu^2)\,, \tag{31'}$$

con che la derivazione dei coefficienti rapporto a γ_ν, tenute presenti le (11), porge

$$\frac{\partial \log g}{\partial\gamma_\nu}\Theta - \frac{2}{m_\nu}\,q^2\gamma_\nu(\Omega_\nu^2 + X_\nu^2)\,.$$

Ne viene

$$\Gamma_\nu^* = -\frac{\partial}{\partial\gamma_\nu}\frac{E}{U} + \frac{\partial \log g}{\partial\gamma_\nu}\Theta - \frac{2}{m_\nu}\,q^2\gamma_\nu(\Omega_\nu^2 + X_\nu^2)\,, \tag{35}$$

e quindi

$$\Gamma_\nu = \Psi_\nu + \Gamma_\nu^*\,, \tag{36}$$

essendo Ψ_ν le componenti del vettore (33) e le Γ_ν^* definite dalla (35).

9. - Equazioni canonico-euleriane.

Ecco ormai le equazioni del moto quali risultano dalla formula generale (I) [M), pag. 508 di questo volume]:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} (\mathrm{I}_a) & \dfrac{dp}{d\tau} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}\,, \qquad \dfrac{dq}{d\tau} = \dfrac{\partial H}{\partial p}; \\[2ex] (\mathrm{I}_b) & \dfrac{d\mathbf{\Omega}}{d\tau} = \mathfrak{M}; \\[2ex] (\mathrm{I}_c) & \dfrac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\tau} = \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\omega}; \end{cases}$$

$\mathfrak{M}$ sta per

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma} ,$$

$\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\Gamma}$ avendo le determinazioni specificate nel precedente §.

Una conseguenza delle (I), che va rilevata, è l'espressione della derivata del vettore ausiliario $\boldsymbol{X}$.

Si ha in primo luogo dalla (30), applicando materialmente le (I),

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{d\tau} = - \frac{\partial H}{\partial q} q\boldsymbol{\gamma} + \frac{\partial H}{\partial p} p\boldsymbol{\gamma} + pq(\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}) \wedge \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\gamma} \wedge \mathfrak{M} .$$

Sostituendo poi per $\mathfrak{M}$ la sua espressione e badando alle due identità

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{\gamma} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega}) = 0 ,$$

$$\boldsymbol{\gamma} \wedge (\boldsymbol{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\Gamma} - (\boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma} ,$$

nonchè, ancora una volta, alla (30), si trova subito

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \tau} = \left(p \frac{\partial H}{\partial p} - q \frac{\partial H}{\partial q}\right) \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Gamma} - (\boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma} . \tag{37}$$

10. - Interpretazione dell'integrale $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = \text{cost.}$

Sappiamo [M), § 10] che le equazioni (I) (oltre a comportare l'identità geometrica $\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$) ammettono i due integrali:

$$H = \text{cost.} ,$$

che assume (§ 1) la specificazione

$$H = 1 ,$$

e

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = \text{cost.} .$$

Nella citata Nota M), abbiamo anche assegnato, dipendentemente dalla effettiva costituzione del sistema S quale aggregato di punti materiali, una condizione sotto cui l'integrale suddetto si interpreta quale integrale del momento delle quantità di moto rispetto all'asse (fisso) Oz (delle aree rispetto al piano Oxy). Nel caso presente non possiamo riportarci a condizioni di questo tipo, dacchè S è definito solo astrattamente (§ 1) per mezzo della forza viva e della funzione delle forze: esso proviene, per trasformazione di Darboux, dal sistema di tre punti materiali P_ν $(\nu = 0, 1, 2)$, che si attraggono secondo la legge di Newton e si muovono in un piano fisso.

Per l'interpretazione di $\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{\gamma}$, conviene quindi far capo al problema originario. All'uopo, riprendiamo anzitutto la definizione (14) delle Ω_ν, ed esplicitiamo il prodotto scalare $\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{\gamma}$. Avremo

$$\mathbf{\Omega}\times\boldsymbol{\gamma} = \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu}\gamma_\nu .$$

Le derivate parziali $\partial T/\partial\omega_\nu$ vanno calcolate in base alle (2), (12), (10′) e (7). Le (12), (10′) e (7) dànno

$$\xi'_\nu \;\;= \xi_\nu\;\; q' + \xi_{\nu+1}\omega_{\nu+2} - \xi_{\nu+2}\omega_{\nu+1} ,$$

da cui

$$\xi'_{\nu+1} = \xi_{\nu+1}q' + \xi_{\nu+2}\omega_\nu \;\;- \xi_\nu\;\; \omega_{\nu+2} ,$$

$$\xi'_{\nu+2} = \xi_{\nu+2}q' + \xi_\nu\;\; \omega_{\nu+2} - \xi_{\nu+2}\omega_{\nu+1} ,$$

colle analoghe per η'_ν, $\eta'_{\nu+1}$, $\eta'_{\nu+2}$.

Siccome T, a norma della (2), dipende da ω_ν pel tramite delle ξ', η', si ricava immediatamente

$$\frac{\partial T}{\partial\omega_\nu} = \frac{\partial T}{\partial\xi'_{\nu+1}}\xi_{\nu+2} - \frac{\partial T}{\partial\xi'_{\nu+2}}\xi_{\nu+1} + \frac{\partial T}{\partial\eta'_{\nu+1}}\eta_{\nu+2} - \frac{\partial T}{\partial\eta'_{\nu+2}}\eta_{\nu+1} .$$

Sostituiamo in $\sum_0^2{}_\nu (\partial T/\partial\omega_\nu)\gamma_\nu$ e riportiamo in ciascun termine del sommatorio le derivate di T all'indice ν: per es., nel primo termine

$$\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial\xi'_{\nu+1}}\xi_{\nu+2}\gamma_\nu ,$$

scambiamo ν in $\nu+2$, con che (tenuto conto che $\nu+3$ e $\nu+4$ si identificano rispettivamente con ν e $\nu+1$, e che all'indice ν basta far assumere tre valori consecutivi qualisivogliano) esso diviene

$$\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial\xi'_\nu}\xi_{\nu+1}\gamma_{\nu+2} .$$

Procedendo nello stesso modo anche per gli altri tre termini, risulta

$$\mathbf{\Gamma}\times\boldsymbol{\gamma} = \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu}\gamma_\nu$$

$$= \sum_0^2{}_\nu \left[\frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu}(\xi_{\nu+1}\gamma_{\nu+2} - \xi_{\nu+2}\gamma_{\nu+1}) + \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu}(\eta_{\nu+1}\gamma_{\nu+2} - \eta_{\nu+2}\gamma_{\nu+1})\right].$$

Mercè le identità

$$\xi_\nu = \quad \eta_{\nu+1}\gamma_{\nu+2} - \eta_{\nu+2}\gamma_{\nu+1},$$
$$\eta_\nu = -(\xi_{\nu+1}\gamma_{\nu+2} - \xi_{\nu+2}\gamma_{\nu+1})$$

[che conseguono dalle (7) e dalla ortogonalità dei vettori $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$] si ha infine

$$\mathbf{\Gamma}\times\boldsymbol{\gamma} = \sum_0^2{}_\nu \left(\xi_\nu \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu}\right).$$

Trasformiamo ulteriormente il secondo membro, facendovi apparire, al posto delle ξ_ν, η_ν, e loro derivate, le componenti x_ν, y_ν dei lati del triangolo dei tre corpi, colle derivate relative. Già abbiamo ricordato, al § 1, che si ha

$$x_\nu + iy_\nu = (\xi_\nu + i\eta_\nu)^2,$$

da cui, derivando rapporto a τ,

$$x'_\nu + iy'_\nu = 2(\xi_\nu + i\eta_\nu)(\xi'_\nu + i\eta'_\nu);$$

e, moltiplicando membro a membro per

$$x_\nu - iy_\nu = (\xi_\nu - i\eta_\nu)^2,$$

si ricava, in base alla definizione (3) di ϱ_ν^2,

$$(x_\nu - iy_\nu)(x'_\nu + iy'_\nu) = 2\varrho_\nu^2(\xi_\nu - i\eta_\nu)(\xi'_\nu + i\eta'_\nu).$$

L'eguaglianza dei coefficienti di i nei due membri porge

$$x_\nu y'_\nu - y_\nu x'_\nu = 2\varrho_\nu^2(\xi_\nu\eta'_\nu - \eta'_\nu\xi'_\nu).$$

Siccome la variabile τ del problema trasformato è legata al tempo t

del problema originario dei tre corpi dalla relazione differenziale

$$dt = \frac{d\tau}{U},$$

così, moltiplicando l'identità testè stabilità per $m_\nu^* U$, e designando con un punto sovrapposto le derivate rispetto a t, otteniamo

$$m_\nu^*(x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu) = 2 U m_\nu^* \varrho_\nu^2 (\xi_\nu \eta'_\nu - \eta_\nu \xi'_\nu),$$

che, in causa della (2), può essere scritta

$$m_\nu^*(x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu) = \frac{1}{2}\left(\xi_\nu \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu}\right).$$

La precedente espressione di $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}$ assume così l'aspetto

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 2 \sum_0^2 m^*(x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu).$$

Il sommatorio del secondo membro si può manifestamente risguardare come componente secondo l'asse Oz, perpendicolare al piano dei tre corpi, del vettore

$$\boldsymbol{K} = \sum_{0}^{2}{}_\nu\, \boldsymbol{r}_\nu \wedge m_\nu^* \dot{\boldsymbol{r}}_\nu,$$

essendo

$$\boldsymbol{r}_\nu = P_{\nu+2} - P_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2).$$

Ora è facile stabilire, in generale (qualunque sia il moto, anche non piano, dei tre corpi), che il vettore $\boldsymbol{K}$ suddetto si identifica col momento risultante delle quantità di moto: nè occorre specificare il polo, poichè ritenendosi fisso il baricentro dei tre corpi, è nulla la risultante delle loro quantità di moto.

Per la dimostrazione, basta sfruttare le relazioni che intercedono fra i vettori $\boldsymbol{r}_\nu$, rappresentativi dei lati del triangolo $P_0P_1P_2$, e i raggi vettori

$$P_\nu - O = \boldsymbol{R}_\nu,$$

che riterremo *baricentrali*, immaginando assunta nel baricentro l'origine O degli assi fissi di riferimento.

Si ha anzitutto

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{R}_{\nu+2} - \boldsymbol{R}_{\nu+1} ;$$

quindi, sostituendo in $\boldsymbol{K}$,

$$\boldsymbol{K} = \sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{R}_{\nu+2} \wedge m_\nu^* \dot{\boldsymbol{r}}_\nu - \sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{R}_{\nu+1} \wedge m_\nu^* \dot{\boldsymbol{r}}_\nu .$$

Cambiando, nella prima sommatoria, ν in $\nu+1$, e, nella seconda, ν in $\nu+2$ (in modo da riportare in entrambe il vettore $\boldsymbol{R}$ all'indice ν), si ottiene

$$\boldsymbol{K} = \sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{R}_\nu \wedge (m_{\nu+1}^* \dot{\boldsymbol{r}}_{\nu+1} - m_{\nu+2}^* \dot{\boldsymbol{r}}_{\nu+2}) .$$

Ciò posto, si ricordi [R), § 3] che

$$m_\nu \boldsymbol{R}_\nu = m_{\nu+1}^* \boldsymbol{r}_{\nu+1} - m_{\nu+2}^* \boldsymbol{r}_{\nu+2}$$

e si derivi rapporto a t. La sostituzione in $\boldsymbol{K}$ porge

$$\boldsymbol{K} = \sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{R}_\nu \wedge m_\nu \dot{\boldsymbol{R}}_\nu ,$$

che è appunto il momento risultante delle quantità di moto dei tre punti P_ν rispetto ad O, c. d. d.

Concludiamo che

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 2K_z = \text{cost.}$$

non è altro che l'integrale delle aree dell'originario problema piano dei tre corpi.

11. - Angoli di Eulero. Interpretazione intrinseca.

Dacchè (§ 2) le configurazioni di S sono in corrispondenza biunivoca coll'insieme (q, orientazione del corpo C), possiamo assumere a coordinate lagrangiane del sistema la stessa q e i tre angoli di Eulero ϑ, φ, ψ, che individuano l'orientazione della terna $Ox_0x_1x_2$ solidale con C.

Dalle note espressioni dei coseni direttori, avvertendo che (per la convenzione fatta di riguardare equivalenti gli indici congrui fra loro rispetto al modulo 3) l'indice zero corrisponde a quello abitualmente designato con 3, si ha

$$(38) \qquad \gamma_1 = \sin\vartheta \sin\varphi\,, \qquad \gamma_2 = \sin\vartheta\cos\varphi\,, \qquad \gamma_0 = \cos\vartheta\,;$$

inoltre

$$\alpha_0 = \sin\vartheta\sin\psi\,, \qquad \beta_0 = -\sin\vartheta\cos\psi\,,$$

le quali, complessivamente, dànno luogo ad una interpretazione dei parametri ϑ, φ, ψ in relazione diretta col triangolo dei tre corpi.

Per quanto concerne ϑ e ψ, vi si perviene, ricordando (§ 1) che le componenti x_0, y_0 del vettore $P_2 - P_1$ sono legate alle corrispondenti ξ_0, η_0 dalle equazioni

$$x_0 = \xi_0^2 - \eta_0^2\,, \qquad y_0 = 2\xi_0\eta_0\,,$$

le quali, per le (7) e per le espressioni surriferite di α_0, β_0, si scrivono

$$x_0 = -q^2\sin^2\vartheta\cos 2\psi\,, \qquad y_0 = -q^2\sin^2\vartheta\sin 2\psi\,.$$

Da queste apparisce che $\sin^2\vartheta = (\sqrt{x_0^2+y_0^2})/q^2$ *si identifica col rapporto fra il lato* $\overline{P_1P_2}$ *e il semiperimetro* q^2 (cfr. § 2) *del triangolo dei tre corpi, mentre* 2ψ *misura l'inclinazione dello stesso lato, più precisamente del vettore* $P_1 - P_2$*, sull'asse delle ascisse*: si intende che si tratta di inclinazione contata, al pari delle anomalie, positivamente nel senso $Ox \to Oy$,

Il significato dell'angolo φ risulta poi ovviamente dalle (11) e (38). Si ha infatti dalle (11)

$$\gamma_\nu^2 = \frac{q^2 - \varrho_\nu^2}{q^2}\,, \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

donde in particolare

$$\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} = \frac{q^2 - \varrho_1^2}{q^2 - \varrho_2^2}\,.$$

Se ne desume, badando alle (38), che $\mathrm{tg}^2\,\varphi$ *fornisce il rapporto fra gli eccessi del semiperimetro* q^2 *sui due lati* $\overline{P_0P_2}$, $\overline{P_0P_1}$.

12. - Prima forma canonica pura.

Le equazioni del moto del sistema S si possono naturalmente presentare anche nella tipica forma hamiltoniana, assumendo come funzioni incognite [anzichè le q, γ_ν, p, Ω_ν delle (I)] quattro coordinate lagrangiane e le loro coniugate.

Assumeremo per coordinate q, ϑ, φ, ψ, ricordando, poichè ne avremo bisogno tra un momento, le classiche espressioni delle componenti della velocità angolare in funzione degli angoli di EULERO e loro derivate prime. Esse sono

$$(39)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \quad \vartheta' \cos\varphi + \psi'\gamma_1 , \\ \omega_2 = -\vartheta' \sin\varphi + \psi'\gamma_2 , \\ \omega_0 = \qquad\qquad \psi'\gamma_0 + \varphi' , \end{cases}$$

le γ avendo, ben si intende, i valori (38).

Per introdurre le coniugate

$$p\,, \quad p_\vartheta\,, \quad p_\varphi\,, \quad p_\psi$$

dei quattro parametri

$$q\,, \quad \vartheta\,, \quad \varphi\,, \quad \psi\,,$$

conviene immaginare la forza viva T espressa mediante i parametri e loro derivate q', ϑ', φ', ψ'; dopo di che

$$p = \frac{\partial T}{\partial q'}\,, \qquad p_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'}\,, \qquad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}\,, \qquad p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \psi'}\,.$$

Una tale espressione di T si può risguardare proveniente dalla $T(q, \gamma_\nu; q', \omega_\nu)$ del § 4, intendendovi le γ_ν, ω_ν sostituite dai loro valori (38), (39). Dacchè in queste formule non c'è traccia di q', si vede, intanto, che la coniugata di q coincide colla p dei §§ antecedenti [definita dalla prima delle (14)].

Si ha poi

$$p_\vartheta = \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} \frac{\partial \omega_\nu}{\partial \vartheta'}\,, \quad \text{ecc.},$$

ossia, esplicitando in base alle (38) e ricordando la definizione (14) delle Ω_ν,

$$(40)\qquad \begin{cases} p_\vartheta = \cos\varphi\,\Omega_1 - \sin\varphi\,\Omega_2\,, \\ p_\varphi = \Omega_0\,, \\ p_\psi = \gamma_0\Omega_0 + \gamma_1\Omega_1 + \gamma_2\Omega_2 = \mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}\,, \end{cases}$$

le quali, risolute rapporto ad Ω_1, Ω_2, Ω_0, ove si ponga per brevità

$$\tilde{\omega} = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \tag{41}$$

dànno

$$\begin{cases} \Omega_1 = \quad p_\vartheta \cos\varphi + \tilde{\omega}\sin\varphi, \\ \Omega_2 = -\, p_\vartheta \sin\varphi + \tilde{\omega}\cos\varphi, \\ \Omega_0 = \quad p_\varphi. \end{cases} \tag{42}$$

Si ha ormai tutto quanto occorre per formare la funzione caratteristica H del sistema hamiltoniano negli otto argomenti

$$q,\ \vartheta,\ \varphi,\ \psi,$$
$$p,\ p_\vartheta,\ p_\varphi,\ p_\psi.$$

Essa è notoriamente l'energia totale $T - E/U$, o, se si vuole,

$$H = \Theta - \frac{E}{U}, \tag{15}$$

in cui si abbia cura di fare apparire esclusivamente gli otto argomenti suindicati.

Ponendo mente all'espressione (31) di Θ [e considerando, ben si intende, le ϱ_ν come date dalle (11), e le γ_ν dalle (38)], l'unica operazione che resti da fare è la sostituzione, in H, delle Ω_ν mediante le (42): va da sè che il vettore $\mathbf{X}$ deve preventivamente ritenersi espresso per $\mathbf{\Omega}$, a norma della (30).

Se si nota che nè l'espressione di H, da cui si parte, nè le (38), nè le (42) contengono esplicitamente ψ, si può anche affermare *a priori* che l'espressione finale di H sarà esente da ψ. Questa è dunque, come dicono gli inglesi, una coordinata ignorabile, e, dall'essere $\partial H/\partial\psi = 0$, segue che il sistema canonico di funzione caratteristica H ammette l'integrale

$$p_\psi = \text{cost}.$$

In virtù della terza delle (40), questo integrale non è che la nuova forma assunta dall'integrale delle aree

$$\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 2K_z = \text{cost}.$$

Vale la pena di notare che, in questo modo, può ritenersi automaticamente compiuta anche la riduzione del problema piano dei tre corpi a tre soli gradi di libertà, sfruttando i suoi tre integrali cardinali delle quantità di moto e delle aree. Infatti, nel problema trasformato, già si trova eseguita la riduzione corrispondente ai due integrali delle quantità di moto. L'ulteriore abbassamento di un grado di libertà (da quattro a tre, cioè dall'ottavo al sesto ordine) si ha considerando, in H, la p_φ come una costante arbitraria e limitando in conformità il sistema canonico di funzione caratteristica H alle tre coppie di variabili coniugate,

$$q\,,\quad \vartheta\,,\quad \varphi\,,$$
$$p\,,\quad p_\vartheta,\quad p_\varphi\,.$$

Ulteriore conseguenza delle formule precedenti, di cui trarremo partito più avanti, è un'espressione vettoriale del binomio $p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi$. Per ricavarla, partiamoci dal prodotto

$$\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}\times d\boldsymbol{\gamma}\,,$$

ossia dal determinante

$$\begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ d\gamma_0 & d\gamma_1 & d\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Sostituendovi i differenziali delle $\boldsymbol{\gamma}_\nu$ coi loro valori derivanti dalle (38), si ha

$$d\vartheta \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} + d\varphi \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ 0 & \gamma_2 & -\gamma_1 \end{vmatrix},$$

da cui, sviluppando i due determinanti (secondo gli elementi della seconda riga) e badando alle (38), viene

$$(\Omega_1\cos\varphi - \Omega_2\sin\varphi)\,d\vartheta + \{\Omega_0(1-\gamma_0^2) - \Omega_1\gamma_0\gamma_1 - \Omega_2\gamma_0\gamma_2\}\,d\varphi\,.$$

Ne risulta, in virtù delle (40),

$$\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}\times d\boldsymbol{\gamma} = p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi - \gamma_0 p_\psi d\varphi\,.$$

Isoliamo il binomio $p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi$, e notiamo che il $d\varphi$, fornito dalle (38),

$$d\varphi = \frac{\gamma_2\, d\gamma_1 - \gamma_1\, d\gamma_2}{1-\gamma_0^2},$$

si può presentare sotto la forma

$$\frac{1}{1-\gamma_0^2}\begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ d\gamma_0 & d\gamma_1 & d\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Dacchè 1, 0, 0 sono le componenti del vettore unitario $\boldsymbol{u}_0$, il determinante si identifica col prodotto

$$\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{u}_0\times d\boldsymbol{\gamma},$$

e si ha infine

$$p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi = \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}^*\times d\boldsymbol{\gamma}, \tag{43}$$

essendosi posto per brevità

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \boldsymbol{\Omega} + \frac{\gamma_0}{1-\gamma_0^2}\, p_\varphi \boldsymbol{u}_0. \tag{44}$$

13. - Osservazione elementare di calcolo vettoriale.

Suppongasi che un vettore (incognito) $\boldsymbol{R}$ verifichi le due equazioni

$$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{R} = a, \end{cases} \tag{45}$$

essendo assegnati i vettori $\boldsymbol{\gamma}$ ed $\boldsymbol{A}$, e lo scalare a: si intende che $\boldsymbol{\gamma}$ ed $\boldsymbol{A}$ debbono ottemperare alla condizione

$$\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{A} = 0, \tag{46}$$

necessaria perchè possa sussistere la prima delle (45).

Vogliamo mostrare che, ritenuto $\gamma^2 = 1$, risulta univocamente

$$\boldsymbol{R} = a\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{\gamma}. \tag{47}$$

All'uopo basta rilevare:

1) che l'espressione (47) di $\boldsymbol{R}$ soddisfa effettivamente alle (45);

2) che non possono esistere altre soluzioni $\boldsymbol{R}^*$ distinte dalla (47).

La prima verificazione è immediata, purchè si tenga conto, nel formare $\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{R}$, che si ha identicamente

$$\boldsymbol{\gamma}\wedge(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}\,,$$

e che l'ultimo termine è nullo, in virtù della (46).

Quanto all'unicità della soluzione, essa risulta dalla circostanza che la differenza $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}^*$, ove non fosse nulla, dovrebbe essere ad un tempo parallela e perpendicolare al vettore $\boldsymbol{\gamma}$, per ipotesi $\neq 0$; parallela, perchè avrebbe nullo il prodotto vettoriale per $\boldsymbol{\gamma}$; perpendicolare, perchè avrebbe nullo anche il prodotto scalare, c. d. d.

14. - Coordinate simmetriche. Seconda forma canonica.

La relazione delle posizioni di S coll'orientazione di un corpo rigido ci ha portati naturalmente ad assumere i tre angoli di EULERO ϑ, φ, ψ come altrettante coordinate lagrangiane del nostro sistema, la quaderna essendo completata da q. Questi parametri, pur avendo (§ 9) una stretta relazione col triangolo dei tre corpi, difettano di simmetria.

Si rimedia a questo inconveniente, conservando ψ e associandogli la terna

$$\zeta_0 = q\gamma_0\,,\qquad \zeta_1 = q\gamma_1\,,\qquad \zeta_2 = q\gamma_2\,, \tag{48}$$

che, in base alle (38), risulta manifestamente costituita da combinazioni indipendenti di q, ϑ, φ.

Ove si risguardino le ζ_ν quali componenti (secondo gli assi mobili $Ox_0x_1x_2$) del vettore

$$\boldsymbol{\zeta} = q\boldsymbol{\gamma}\,, \tag{48'}$$

si può dire che ψ e $\boldsymbol{\zeta}$ (angolo e vettore completamente indipendenti) determinano in modo univoco la configurazione di S.

Le ζ_ν, in base alla loro definizione e alle (11), sono legate al triangolo dei tre corpi dalle relazioni semplicissime

$$\zeta_\nu^2 = q^2\gamma_\nu^2 = q^2 - q^2(1-\gamma_\nu^2) = q^2 - \varrho_\nu^2 = q^2 - r_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2); \tag{49}$$

esse rappresentano dunque, coi loro quadrati, i tre eccessi del semiperimetro sui lati.

Dalle (49), sommando, si trae

$$q^2 = \sum_0^2{}_\nu \zeta_\nu^2 ,$$

con che

(49′) $$r_\nu = \varrho_\nu^2 = q^2 - \zeta_\nu^2 = \zeta_{\nu+1}^2 + \zeta_{\nu+2}^2 .$$

Si è già osservato che le nuove coordinate ζ_ν sono combinazioni di q, ϑ, φ, esenti da ψ. Perciò, anche nel nuovo sistema, la coniugata p_ψ di ψ è quella di prima. Per assegnare le coniugate Z_ν delle nuove variabili ζ_ν, giova appoggiarsi sulla circostanza che la trasformazione fra le due sestuple (q, ϑ, φ; p, p_ϑ, p_φ), (ζ_ν, Z_ν) deve risultare canonica e quindi verificare la condizione caratteristica

$$\sum_0^2{}_\nu Z_\nu d\zeta_\nu = p\,dq + p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi .$$

Il secondo membro, badando all'identità $\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma} = 1$ e alle (48′) e (43), si scrive

$$\frac{1}{q}\,(pq\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}\,dq + \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}^*\times q\,d\boldsymbol{\gamma}) .$$

In entrambi i termini si può mettere in evidenza il fattore $d\boldsymbol{\zeta}$. Infatti, a norma della (48′),

$$d\boldsymbol{\zeta} = q\,d\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\,dq ;$$

e quindi

$$\boldsymbol{\gamma}\times d\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}\,dq ,$$

in virtù dell'identità $\boldsymbol{\gamma}\times d\boldsymbol{\gamma} = 0$; mentre, per la perpendicolarità fra $\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}^*$ e $\boldsymbol{\gamma}$, segue

$$\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}^*\times d\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}^*\times q\,d\boldsymbol{\gamma} .$$

Ne consegue

$$\sum_0^2{}_\nu Z_\nu d\zeta_\nu = \frac{1}{q}\,(pq\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}^*)\times d\boldsymbol{\zeta} .$$

Eguagliando i coefficienti dei singoli $d\zeta_\nu$ nei due membri, si ricava la *espressione cercata delle* Z_ν: *esse si identificano con le componenti del vettore*

$$\frac{1}{q}(pq\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\Omega}^*) .$$

Compendiando a loro volta le Z_ν in un vettore $\boldsymbol{Z}$, si ha

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{q}(pq\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\Omega}^*) . \tag{50}$$

Non è questa ancora la forma che giova, per introdurre nella quadrica Θ gli argomenti $\boldsymbol{Z}$, p_ψ. Ma vi si arriva subito, ricordando le (30) e (44), che dànno

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{q}\left(\boldsymbol{X} + \frac{\gamma_0 p_\psi}{1-\gamma_0^2}\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{u}_0\right),$$

ossia

$$\boldsymbol{X} = q\boldsymbol{Z} - \frac{\gamma_0 p_\psi}{1-\gamma_0^2}\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{u}_0 . \tag{51}$$

Coll'intesa che q e le γ_ν si risguardino funzioni delle ζ_ν a norma delle (48) [o (48')], la (51) ci porge l'espressione di $\boldsymbol{X}$ nelle variabili trasformate. Resta da procurarsi l'analoga espressione di $\boldsymbol{\Omega}$, dopodichè la trasformazione di Θ potrà ritenersi compiuta, in base alla (31).

Per ricavare $\boldsymbol{\Omega}$ nella forma desiderata, basta associare l'equazione (50) all'ultima delle (40),

$$\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega} = p_\psi .$$

Assumendo provvisoriamente come incognita $\boldsymbol{\Omega}^* = \boldsymbol{\Omega} + (\gamma_0 p_\psi / 1 - \gamma_0^2)\boldsymbol{u}_0$, le dette due equazioni si possono scrivere

$$\left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\Omega}^* = q\boldsymbol{Z} - pq\boldsymbol{\gamma} , \\ &\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}^* = p_\psi + \frac{\gamma_0^2 p_\psi}{1-\gamma_0^2} = \frac{1}{1-\gamma_0^2}\, p_\psi . \end{aligned}\right.$$

Per la formula (47) del § precedente, ne ricaviamo

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \frac{p_\psi}{1-\gamma_0^2}\boldsymbol{\gamma} + q\boldsymbol{Z} \wedge \boldsymbol{\gamma} ,$$

da cui, riponendo per $\mathbf{\Omega}^*$ il suo valore (44) e sostituendo, nel primo addendo, per $\boldsymbol{\gamma}$, il trinomio $\gamma_0 \boldsymbol{u}_0 + \gamma_1 \boldsymbol{u}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{u}_2$, risulta

$$\mathbf{\Omega} = qZ \wedge \boldsymbol{\gamma} + \frac{p_\psi}{1-\gamma_0^2}(\gamma_1 \boldsymbol{u}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{u}_2)\,. \tag{52}$$

15. - Coordinate asteroidiche. Terza forma canonica.

Per passare utilmente al caso limite in cui una delle masse — diciamo m_0 — è trascurabile di fronte alle altre due, conviene abbandonare la simmetria rispetto a tutti i tre corpi, pur conservandola rispetto ai due di massa finita P_1, P_2. Appare all'uopo indicata una piccola modificazione della quaderna ζ_ν, ψ, consistente nel sostituire a ζ_1, ζ_2 le combinazioni ϱ, φ definite da

$$\zeta_1 = \varrho \sin\varphi\,, \qquad \zeta_2 = \varrho \cos\varphi\,, \tag{53}$$

senza toccare nè ζ_0, nè ψ.

Il significato geometrico delle nuove variabili ϱ, φ segue senz'altro dalle (48) e (49'). *L'angolo φ è ancora quello che figura nella terna euleriana* [essendo, per le (53) e (38), $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ proporzionali a γ_1, γ_2, con fattore di proporzionalità positivo]; *e $\varrho^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$ si identifica col lato* $\varrho_0^2 = r_0 = \overline{P_1P_2}$.

Quanto alle coordinate non trasformate, va da sè che la ψ è ancora uno degli argomenti euleriani, 2ψ rappresentando (§ 9) l'inclinazione del lato P_2P_1 (nel verso da P_2 a P_1), mentre (§ 14) $\zeta_0 = \sqrt{q^2 - r_0}$.

Chiameremo *asteroidica* la quaderna ζ_0, ϱ, φ, ψ.

Importa notare che, dalla prima delle (48), si ha

$$\zeta_0 = q\gamma_0 = q\cos\vartheta\,,$$

e dalla prima delle (49)

$$\zeta_0^2 = q^2 - \varrho_0^2 = q^2 - \varrho^2\,,$$

donde, senza ambiguità, dacchè $\sin\vartheta > 0$,

$$\varrho = q\sin\vartheta\,.$$

Ne consegue che la quaderna asteroidica differisce (non soltanto dalla simmetrica, ma anche) dalla prima quaderna di coordinate lagrangiane q, ϑ, φ, ψ per una semplice trasformazione binaria,e precisamente per la sostituzione della coppia

$$q\,,\quad \vartheta$$

con

$$\zeta_0 = q\cos\vartheta\,,\qquad \varrho = q\sin\vartheta\,.$$

Dacchè φ rimane inalterata e non interviene nelle nuove combinazioni ζ_0, ϱ, rimarrà pure inalterata la coniugata p_φ: questa si identifica pertanto con Ω_0, a norma della terza delle (42). Del resto, considerando insieme le coniugate p_ϱ, p_φ, le possiamo esprimere in termini delle variabili simmetriche ζ_1, ζ_2 e loro coniugate Z_1, Z_2, desumendole dalla condizione differenziale di canonicità (della trasformazione fra ζ_1, ζ_2, Z_1, Z_2 e ϱ, φ, p_ϱ, p_φ)

$$p_\varrho d\varrho + p_\varphi d\varphi = Z_1 d\zeta_1 + Z_2 d\zeta_2\,.$$

Introducendo per $d\zeta_1$, $d\zeta_2$ i valori forniti dalle (53) ed eguagliando i coefficienti di $d\varrho$, $d\varphi$ nei due membri, risulta

$$(54)\qquad \begin{cases} p_\varrho = \sin\varphi\, Z_1 + \cos\varphi\, Z_2\,, \\ p_\varphi = \varrho(\cos\varphi\, Z_1 - \sin\varphi\, Z_2)\,, \end{cases}$$

da cui

$$(54')\qquad \begin{cases} Z_1 = \sin\varphi\, p_\varrho + \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\, p_\varphi\,, \\[2ex] Z_2 = \cos\varphi\, p_\varrho - \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\, p_\varphi\,. \end{cases}$$

Queste ultime formule, unitamente alle (53), esprimono in definitiva le due coppie coniugate $\begin{pmatrix}\zeta_1 & \zeta_2\\ Z_1 & Z_2\end{pmatrix}$ del sistema simmetrico, mediante le due del sistema asteroidico $\begin{pmatrix}\varrho & \varphi\\ p_\varrho & p_\varphi\end{pmatrix}$. Ove si trasformino per loro mezzo le (51), (52), sottointendendo ulteriormente che

$$(55)\qquad \begin{cases} q\ = \sqrt{\zeta_0^2 + \varrho^2} \text{ (col valore aritmetico del radicale)}\,, \\ \gamma_0 = \dfrac{\zeta_0}{q}\,,\qquad \gamma_1 = \dfrac{\varrho}{q}\sin\varphi\,,\qquad \gamma_2 = \dfrac{\varrho}{q}\cos\varphi\,, \end{cases}$$

si è in grado di fare il calcolo effettivo della Θ, e quindi della funzione caratteristica H nelle nuove variabili.

Per aver in pronto tutti gli elementi del calcolo, trascriviamo qui appresso le espressioni di $\mathbf{X}$ e di $\mathbf{\Omega}$ derivanti dalle (51), (52):

$$(56)\quad \begin{cases} X_0 = qZ_0\,, \\ X_1 = \quad q\sin\varphi\, p_\varrho + \dfrac{q}{\varrho}\cos\varphi\, p_\varphi - \dfrac{\zeta_0}{\varrho}\cos\varphi\, p_\psi\,, \\ X_2 = \quad q\cos\varphi\, p_\varrho - \dfrac{q}{\varrho}\sin\varphi\, p_\varphi + \dfrac{\zeta_0}{\varrho}\sin\varphi\, p_\psi\,; \end{cases}$$

$$(57)\quad \begin{cases} \Omega_0 = \qquad p_\varphi \\ \Omega_1 = -\varrho\cos\varphi\, Z_0 + \zeta_0\cos\varphi\, p_\varrho - \dfrac{\zeta_0}{\varrho}\sin\varphi\, p_\varphi + \dfrac{q}{\varrho}\sin\varphi\, p_\psi\,, \\ \Omega_2 = \quad \varrho\sin\varphi\, Z_0 - \zeta_0\sin\varphi\, p_\varrho - \dfrac{\zeta_0}{\varrho}\cos\varphi\, p_\varphi + \dfrac{q}{\varrho}\cos\varphi\, p_\psi\,. \end{cases}$$

Intesi che q va considerato come abbreviazione di $\sqrt{\zeta_0^2+\varrho^2}$, nei secondi membri compariscono, come si richiede per la sostituzione in H, soltanto coordinate asteroidiche e coniugate relative.