NOTA III [1].

CASO LIMITE IN CUI UNA DELLE MASSE È INFINITESIMA.

Ibidem, vol. XXIV$_2$ (1915$_2$),

pp. 553-569.

16. - Richiami concernenti il problema ristretto e le sue trasformazioni in coordinate isoterme.

Facciamo una breve digressione sul problema ristretto nella sua impostazione abituale, al fine di agevolare il confronto colle formule, che dedurremo poi per il problema regolarizzato, nel caso limite di m_0 infinitesimo.

Rammentiamo in conformità che, quando la massa di P_0 è trascurabile, P_1 e P_2 possono ruotare uniformemente attorno al loro comune centro di gravità O con velocità angolare n, legata alle masse e alla distanza $\overline{P_1P_2} = \varrho^2$ dalla nota relazione

$$n^2 = \frac{f(m_1 + m_2)}{\varrho^6} \qquad (f \text{ costante d'attrazione}).$$

In questa ipotesi, si tratta di determinare il moto della massa infinitesima P_0, attratta dai due centri mobili P_1, P_2 secondo la legge di NEWTON. La corrispondente funzione delle forze $U^{(1)}$, riferita all'unità di massa (essendo colle nostre notazioni, $\overline{P_0P_1} = \varrho_2^2$, $\overline{P_0P_2} = \varrho_1^2$), vale

$$U^{(1)} = f\left(\frac{m_1}{\varrho_2^2} + \frac{m_2}{\varrho_1^2}\right). \tag{58}$$

Detta $\boldsymbol{a}$ l'accelerazione assoluta di P_0, si ha, dalla legge fondamentale della meccanica,

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} U^{(1)}.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1915.

Riferiamo il moto ad un sistema di assi Oxy uniformemente ruotanti assieme coi corpi P_1, P_2, coll'origine nel baricentro O (punto fisso), e orientati in guisa che il verso di rotazione $x \to y$ coincida con quello dei due corpi.

Per il teorema di Coriolis, le componenti dell'accelerazione $\boldsymbol{a}$ rispetto a questi assi hanno le espressioni

$$a_x = \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x\,,$$

$$a_y = \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y\,,$$

designando evidentemente x, y le coordinate del corpo P_0, e il punto sovrapposto derivazione rispetto al tempo t.

Le equazioni cartesiane del moto di P_0 sono pertanto

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial x}\,, \\[2ex] \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y = \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial y}\,, \end{cases}$$

cui si attribuisce notoriamente forma canonica, introducendo le ausiliarie (componenti della velocità assoluta di P_0)

$$p_x = \dot{x} - ny\,, \qquad p_y = \dot{y} + nx\,.$$

Si ha infatti, da queste stesse posizioni,

$$\dot{x} = p_x + ny\,, \qquad \dot{y} = p_y - nx\,,$$

mentre, col tenerne conto, le precedenti equazioni del moto si possono scrivere

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + np_y\,, \qquad \frac{dp_y}{dt} = \frac{\partial U^{(1)}}{dy} - np_x\,.$$

I secondi membri sono ordinatamente le derivate rapporto a p_x, p_y, e le derivate rapporto ad x, y cambiate di segno della funzione

$$F = \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - n(xp_y - yp_x) - U^{(1)}\,.$$

Perciò le quattro equazioni costituiscono complessivamente un sistema canonico di funzione caratteristica F, essendo coniugate x, p_x; y, p_y.

Supposto, per fissare le idee, che l'asse Ox sia diretto verso P_1, le ascisse di P_1, P_2 sono rispettivamente

$$\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\varrho^2\,, \qquad -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\varrho^2\,;$$

l'ascissa del loro punto medio M è quindi espressa da

$$l=\frac{1}{2}\,\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\,\varrho^2\,. \tag{59}$$

Trasportando l'origine da O in M (sempre coll'asse delle x diretto verso P_1), l'ordinata y e le componenti p_x, p_y della velocità assoluta rimangono inalterate, mentre l'ascissa x va posta eguale a $x+l$. Con questa sostituzione, la precedente espressione di F diviene

$$F=\tfrac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)-n(xp_y-yp_x)-nlp_y-U^{(1)}\,. \tag{60}$$

Ecco la funzione caratteristica del problema ristretto, riferito ad assi mobili *coll'origine nel punto medio delle masse finite.*

Si può assegnare in modo semplice una trasformazione *canonica*, mediante cui si sostituiscono alle coordinate cartesiane x, y (e loro coniugate p_x, p_y) coordinate isoterme qualisivogliano u, v (con convenienti p_u, p_v).

Sia infatti

$$x+iy=f(u+iv)\,, \tag{61}$$

con f funzione regolare arbitraria dell'argomento $u+iv$, il legame complesso che compendia le formule di trasformazione fra le coordinate cartesiane x, y e le coordinate curvilinee u, v: si intende che, per la biunivocità della trasformazione, va ritenuta diversa da zero (nel campo di valori che si considerano) la derivata $f'(u+iv)$, con che si può invertire la (61), ricavandone $u+iv$ quale funzione di $x+iy$.

Fra i differenziali delle due coppie di variabili sussiste la relazione

$$dx+i\,dy=f'(u+iv)\,(du+i\,dv)\,, \tag{62}$$

e quindi, anche, cambiando i in $-i$,

$$dx-i\,dy=f'(u-iv)\,(du-i\,dv)\,. \tag{62'}$$

Se ora si pone

$$p_x + ip_y = \frac{1}{f'(u - iv)}(p_u + ip_v)\,, \tag{63}$$

con che rimangono manifestamente definite le due quantità reali p_u, p_v in funzione lineare di p_x, p_y, si ha complessivamente nelle (61) e (63) una trasformazione fra le due quaderne (x, y, p_x, p_y), (u, v, p_u, p_v), la quale risulta canonica perchè dà luogo all'identità

$$p_x\,dx + p_y\,dy = p_u\,du + p_v\,dv\,.$$

La verificazione è immediata, bastando moltiplicare membro a membro la (63) e la (62′), il che dà

$$(p_x + ip_y)(dx - i\,dy) = (p_u + ip_v)(du - i\,dv)\,.$$

L'eguaglianza delle parti reali si traduce appunto nella relazione caratteristica della canonicità.

Rileviamo ancora una conseguenza delle (61), (63), che si ottiene moltiplicandole membro a membro, ed è

$$\begin{aligned}(p_x + ip_y)(x - iy) &= \frac{f(u - iv)}{f'(u - iv)}(p_u + ip_v) \\ &= \frac{f(u - iv)f'(u + iv)}{|f'|^2}(p_u + ip_v)\,.\end{aligned} \tag{64}$$

17. - Applicazione alle coordinate ellittiche.

Assumiamo in particolare

$$x + iy = \tfrac{1}{2}\varrho^2 \cosh(u + iv)\,, \tag{65}$$

le x, y essendo le coordinate cartesiane coll'origine in M, di cui al § precedente. Con ciò le u, v rappresentano notoriamente coordinate ellittiche, le linee $u = \text{cost.}$ essendo ellissi e le $v = \text{cost.}$ iperboli omofocali: i fuochi comuni cadono nei due punti $\pm\frac{1}{2}\varrho^2$ dell'asse delle ascisse, cioè, nel caso nostro, in P_1, P_2.

Le espressioni delle distanze focali $\overline{P_0P_2}$, $\overline{P_0P_1}$, che, secondo le notazioni dei §§ precedenti, vanno ordinatamente designate con ϱ_1^2, ϱ_2^2, si ottengono tosto dalla (65), aggiungendo ad entrambi i membri $\pm\frac{1}{2}\varrho^2$, e prendendo i moduli. Si trova così

$$(66) \qquad \varrho_1^2 = \varrho^2 |\cosh \tfrac{1}{2}(u+iv)|^2, \qquad \varrho_2^2 = \varrho^2 |\sinh \tfrac{1}{2}(u+iv)|^2.$$

Si ha poi, considerando la (65), e scrivendo brevemente f, f' per $f(u+iv)$, $f'(u+iv)$:

$$f = \tfrac{1}{2}\varrho^2 \cosh(u+iv),$$

$$f' = \tfrac{1}{2}\varrho^2 \sinh(u+iv),$$

$$|f'|^2 = \tfrac{1}{4}\varrho^4 |\sinh(u+iv|^2 = \varrho^4 |\sinh \tfrac{1}{2}(u+iv)|^2 |\cosh \tfrac{1}{2}(u+iv)|^2,$$

e quindi, badando alle (66),

$$(67) \qquad |f'|^2 = \varrho_1^2 \varrho_2^2.$$

Con questa determinazione di $|f'|^2$, la (63), eguagliando il quadrato dei moduli dei due membri, porge

$$(68) \qquad p_x^2 + p_y^2 = \frac{1}{\varrho_1^2\varrho_2^2}(p_u^2 + p_v^2).$$

Ove si noti che, per $f = \frac{1}{2}\varrho^2 \cosh(u+iv)$, si ha ulteriormente

$$f(u-iv)f'(u+iv) = \tfrac{1}{4}\varrho^4 \cosh(u-iv)\sinh(u+iv)$$
$$= \tfrac{1}{8}\varrho^4 (\sinh 2u + i \sin 2v),$$

dalla (64), eguagliando i coefficienti di i, ricaviamo

$$xp_y - yp_x = \frac{1}{8}\,\frac{\varrho^4}{\varrho_1^2\varrho_2^2}(\sin 2v \cdot p_u + \sinh 2u \cdot p_v).$$

Infine dalla (63), scritta

$$p_x + ip_y = \frac{f'(u+iv)}{|f'|^2}(p_u + ip_v),$$

segue

$$p_y = \frac{1}{2}\,\frac{\varrho^2}{\varrho_1^2\varrho_2^2}(\cosh u \sin v \cdot p_u + \sinh u \cos v \cdot p_v).$$

Ne deduciamo, badando alla (59),

$$n(xp_y - yp_x) + nlp_y$$
$$= \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\, n \left\{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)(xp_y - yp_x) + \left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\right)\frac{1}{2}\,\varrho^2 p_y\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\, n\, \frac{\varrho^4}{\varrho_1^2\varrho_2^2}\left[\sin v \left\{\frac{1}{m_1}(\cosh u + \cos v) - \frac{1}{m_2}(\cosh u - \cos v)\right\} p_u\right.$$
$$\left. + \sinh u \left\{\frac{1}{m_1}(\cosh u + \cos v) + \frac{1}{m_2}(\cosh u - \cos v)\right\} p_v\right].$$

Quest'ultima relazione, ove si noti che, per le (66), è

$$(66') \quad \begin{cases} \varrho_1^2 = \varrho^2 \left|\cosh\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} - i\sinh\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\right|^2 \\ \quad = \varrho^2\left(\cosh^2\frac{u}{2}\cos^2\frac{v}{2} + \sinh^2\frac{u}{2}\sin^2\frac{v}{2}\right) \\ \quad = \varrho^2\left(\cosh^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{v}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\varrho^2(\cosh u + \cos v)\,, \\ \\ \varrho_2^2 = \varrho^2\left|\sinh\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} + i\cosh\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\right|^2 \\ \quad = \varrho^2\left(\sinh^2\frac{u}{2}\cos^2\frac{v}{2} + \cosh^2\frac{u}{2}\sin^2\frac{v}{2}\right) \\ \quad = \varrho^2\left(\cosh^2\frac{u}{2} - \cos^2\frac{v}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\varrho^2(\cosh u - \cos v)\,, \end{cases}$$

si scrive più semplicemente

$$(69) \quad n(xp_y - yp_x) + nlp_y$$
$$= \frac{1}{2}\, n\, \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,\frac{\varrho^2}{\varrho_1^2\varrho_2^2}\left\{\sin v\left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} - \frac{\varrho_2^2}{m_2}\right)p_u + \sinh u\left(\frac{\varrho_1^2}{m_1}+\frac{\varrho_2^2}{m_2}\right)p_v\right\}.$$

Le formole (68) e (69) conducono immediatamente all'espressione trasformata della funzione caratteristica:

$$(70) \quad F = \frac{1}{2\varrho_1^2\varrho_2^2}\left[p_u^2 + p_v^2 - n\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,\varrho^2\left\{\sin v\left(\frac{\varrho_1^2}{m_1}-\frac{\varrho_2^2}{m_2}\right)p_u + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sinh u\left(\frac{\varrho_1^2}{m_1}+\frac{\varrho_2^2}{m_2}\right)p_v\right\}\right] - U^{(1)}\,,$$

in cui $U^{(1)}$ è sempre definita dalla (58), coll'intesa evidente che ϱ_1^2, ϱ_2^2 si devono risguardare ovunque sostituiti coi loro valori (66′) in funzione di u, v.

Il sistema canonico corrispondente,

$$(71)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p_u}, & \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p_v}; \\ \dfrac{dp_u}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial u}, & \dfrac{dp_v}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial v}, \end{cases}$$

ammette l'integrale

$$(72)\qquad F = C\,,$$

C essendo la così detta costante di JACOBI.

18. - La regolarizzazione di N. Thiele.

Immaginiamo attribuito a C un valore ben determinato, e poniamo

$$(73)\qquad F^* = \varrho_1^2\varrho_2^2(F - C)\,.$$

Si ha identicamente

$$\frac{\partial F^*}{\partial u} = \varrho_1^2\varrho_2^2\,\frac{\partial F}{\partial u} + (F - C)\,\frac{\partial(\varrho_1^2\varrho_2^2)}{\partial u}\,.$$

In quanto si tratti di soluzioni del sistema (71), che si riferiscono all'assunto valore di C, il secondo termine del secondo membro si annulla, e rimane

$$\frac{\partial F^*}{\partial u} = \varrho_1^2\varrho_2^2\,\frac{\partial F}{\partial u};$$

analogamente per le altre derivate parziali rapporto a v, p_u, p_v.

Da questo risulta subito che, ove nelle (71) si sostituisca al tempo t una variabile indipendente ausiliaria t^*, definita mediante la posizione

$$(74)\qquad dt = \varrho_1^2\varrho_2^2\,dt^*\,,$$

si è condotti ad un nuovo sistema canonico di funzione caratteristica F^*:

$$(71') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt^*} &= \frac{\partial F^*}{\partial p_u}, & \frac{dv}{dt^*} &= \frac{\partial F^*}{\partial p_v}; \\ \frac{dp_u}{dt^*} &= -\frac{\partial F^*}{\partial u}, & \frac{dp_v}{dt^*} &= -\frac{\partial F^*}{\partial v}, \end{aligned} \right.$$

equivalente a (71), *nell'àmbito delle* ∞^3 *soluzioni che corrispondono ad uno stesso valore*: C *di* F, *e zero di* F^*. *Quest'ultimo sistema presenta sul primo il vantaggio di essere completamente regolarizzato.* Infatti, attesa l'espressione (70) di F, e l'espressione (58) di $U^{(1)}$, nella nuova funzione caratteristica F^*, viene a scomparire il denominatore $\varrho_1^2\varrho_2^2$, talchè la F^* stessa si presenta come polinomio di secondo grado in p_u, p_v, i cui coefficienti, esplicitati a norma delle (66'), sono tutti trascendenti intere in u, v.

La regolarizzazione del problema ristretto, così conseguita, non differisce sostanzialmente da quella, già effettuata da N. THIELE [2], delle equazioni di secondo ordine in u, v. Si ritrovano infatti immediatamente le equazioni del THIELE, eliminando p_u, p_v dalle (71'): d'altra parte era pur stato notato che le equazioni regolarizzate di THIELE sono suscettibili di forma canonica, coll'introduzione di opportune ausiliarie p_u, p_v [3]. Nulla dunque di nuovo in questi nostri sviluppi concernenti il problema ristretto: essi hanno soltanto lo scopo di facilitare il confronto con le formule che ora ci accingiamo a dedurre come caso limite della nostra trattazione generale concernente il problema piano.

19. - Ritorno al problema regolarizzato per m_0 infinitesima. Ordine di grandezza di varii elementi. Approssimazione dei primi due ordini.

Supponiamo m_0 trascurabile di fronte ad m_1, m_2, tutto rimanendo del resto finito: intendiamo con ciò che, assieme con m_1, m_2, anche le coordinate del sistema regolarizzato e loro derivate vanno trattate come quantità finite.

In tale ipotesi, ove si riprenda per un momento l'espressione (2) di T,

---

(2) *Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps* (troisième Mémoire), « Astronomische Nachrich. », B. CXXXVIII, 1895, pp. 1-10.

(3) Cfr. la prefazione della bella Memoria del sig. BIRKHOFF, *The restricted problem of the three bodies*, testè apparsa nei « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », t. XXXIX, pp. 265-334. In questa Memoria è anche assegnata (§ 5) una nuova trasformazione regolarizzante, puramente algebrica.

e si noti che, in base alla (4), m_1^*, m_2^* contengono m_0 a fattore, appare ovviamente, dalle (18), che lo stesso accade per le componenti dei due vettori $\boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{H}$ secondo gli assi Ox_1, Ox_2.

Ne viene, badando alle (23), (29), che, dei vettori $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{X}$, sono invece le componenti Ω_0, X_0 affètte dal fattore m_0.

Ciò posto, si noti che dalla definizione (5) di U, scrivendo, come a § 15 (e seguenti), ϱ per ϱ_0, e ponendo per brevità

$$U^{(0)} = f\frac{m_1 m_2}{\varrho^2}, \tag{75}$$

si ha

$$U = U^{(0)} + m_0 U^{(1)},$$

coll'espressione di $U^{(1)}$, già introdotta a § 16,

$$U^{(1)} = f\left(\frac{m_1}{\varrho_2^2} + \frac{m_2}{\varrho_1^2}\right). \tag{58}$$

Ne viene, a meno di termini di secondo ordine, in m_0,

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{U^{(0)}}\left(1 - m_0\frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}\right). \tag{76}$$

Esaminiamo ora l'ordine di grandezza dei vari termini costituenti Θ, raggruppandoli nel modo seguente:

$$\frac{1}{8Um_0\varrho_1^2\varrho_2^2}(\Omega_0^2 + X_0^2) = m_0 A, \tag{77}$$

$$\frac{1}{8U\varrho^2}\left\{\frac{1}{m_1\varrho_2^2}(\Omega_1^2 + X_1^2) + \frac{1}{m_2\varrho_1^2}(\Omega_2^2 + X_2^2)\right\} = B, \tag{78}$$

(si intende che scriviamo dappertutto ϱ al posto di ϱ_0).

A suo tempo terremo conto che

$$\Theta = m_0 A + B; \tag{79}$$

occupiamoci intanto separatamente di A e di B.

Dacchè Ω_0 e X_0 sono, come s'è detto, di prim'ordine in m_0, lo è del pari $(1/8Um_0\varrho_1^2\varrho_2^2)(\Omega_0^2 + X_0^2)$, ed è quindi giustificato di assumerlo sotto la forma $m_0 A$. A meno di termini di secondo ordine in m_0, si può naturalmente, nel denominatore dello stesso $m_0 A$, sostituire $U^{(0)}$ ad U.

Riferiamoci ormai a coordinate asteroidiche, badando alle prime delle (56), (57):

$$X_0 = qZ_0\,, \qquad \Omega_0 = p_\varphi\,.$$

Si metta in evidenza il fattore m_0, ponendo

$$Z_0 = m_0 Z_0^*\,, \qquad p_\varphi = m_0 p_\varphi^*\,. \tag{80}$$

Si ha

$$A = \frac{1}{8U\varrho_1^2\varrho_2^2}\,(q^2 Z_0^{*2} + p_\varphi^{*2})\,. \tag{77'}$$

Ponendo ancora

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_1^{(0)} &= \zeta_0\cos\varphi\, p_\varrho + \frac{q}{\varrho}\sin\varphi\, p_\psi\,, & \Omega_1^{(1)} &= -\left(\varrho\cos\varphi\, Z_0^* + \frac{\zeta_0}{\varrho}\sin\varphi\, p_\varphi^*\right),\\
X_1^{(0)} &= q\sin\varphi\, p_\varrho - \frac{\zeta_0}{\varrho}\cos\varphi\, p_\psi\,, & X_1^{(1)} &= \frac{q}{\varrho}\cos\varphi\, p_\varphi^*\,,\\
\Omega_2^{(0)} &= -\zeta_0\sin\varphi\, p_\varrho + \frac{q}{\varrho}\cos\varphi\, p_\psi\,, & \Omega_2^{(1)} &= \varrho\sin\varphi\, Z_0^* - \frac{\zeta_0}{\varrho}\cos\varphi\, p_\varphi^*\,,\\
X_2^{(0)} &= q\cos\varphi\, p_\varrho + \frac{\zeta_0}{\varrho}\sin\varphi\, p_\psi\,, & X_2^{(1)} &= -\frac{q}{\varrho}\sin\varphi\, p_\varphi^*\,,
\end{aligned}\right. \tag{81}$$

si compendiano i vari termini delle rimanenti (56), (57), secondochè contengono o no m_0 a fattore, sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_1 &= \Omega_1^{(0)} + m_0\Omega_1^{(1)}\,, & X_1 &= X_1^{(0)} + m_0 X_1^{(1)}\,,\\
\Omega_2 &= \Omega_2^{(0)} + m_0\Omega_2^{(1)}\,, & X_2 &= X_2^{(0)} + m_0 X_2^{(1)}\,.
\end{aligned}\right.$$

Ove si introducano, per brevità di scrittura, le ulteriori combinazioni

$$\left\{\begin{aligned}
\lambda_1 &= \Omega_1^{(0)}\Omega_1^{(1)} + X_1^{(0)}X_1^{(1)}\,,\\
\lambda_2 &= \Omega_2^{(0)}\Omega_2^{(1)} + X_2^{(0)}X_2^{(1)}\,,
\end{aligned}\right. \tag{82}$$

e si abbia riguardo alle (81), risulta subito, a meno di termini di secondo ordine in m_0,

$$\Omega_1^2 + X_1^2 = (\zeta_0^2\cos^2\varphi + q^2\sin^2\varphi)\left(p_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}\,p_\psi^2\right) + 2m_0\lambda_1\,,$$

$$\Omega_2^2 + X_2^2 = (\zeta_0^2\sin^2\varphi + q^2\cos^2\varphi)\left(p_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}\,p_\psi^2\right) + 2m_0\lambda_2\,.$$

Mediante le (55) i due binomii $\zeta_0^2 \cos^2 \varphi + q^2 \sin^2 \varphi$, $\zeta_0^2 \sin^2 \varphi + q^2 \cos^2 \varphi$ divengono $\zeta_0^2 + q^2\gamma_1^2$, $\zeta_0^2 + q^2\gamma_2^2$, i quali, in virtù delle (48) e (48′), si identificano colle due distanze ϱ_2^2, ϱ_1^2. Possiamo quindi scrivere semplicemente

$$\text{(83)} \qquad \begin{cases} \Omega_1^2 + X_1^2 = \varrho_2^2\left(p_\varrho^2 + \dfrac{1}{\varrho^2}\, p_\varphi^2\right) + 2m_0\lambda_1\,, \\[2ex] \Omega_2^2 + X_2^2 = \varrho_1^2\left(p_\varrho^2 + \dfrac{1}{\varrho^2}\, p_\varphi^2\right) + 2m_0\lambda_2\,. \end{cases}$$

È facile adesso far apparire anche in B i termini affètti dal fattore m_0.

Basta combinare la definizione (78) di B colle (76) e (83), e porre

$$\text{(84)} \qquad \begin{cases} \Theta^{(0)} = \dfrac{1}{8\,U^{(0)}\varrho^2}\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)\left(p_\varrho^2 + \dfrac{1}{\varrho^2}\, p_\varphi^2\right), \\[2ex] \Theta^{(2)} = A + \dfrac{1}{4\,U^{(0)}\varrho^2}\left(\dfrac{\lambda_1}{m_1\varrho_2^2} + \dfrac{\lambda_2}{m_2\varrho_1^2}\right), \end{cases}$$

per desumerne

$$\text{(78′)} \qquad B = \Theta^{(0)} + m_0(\Theta^{(1)} - A) - m_0\Theta^{(0)}\,\frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}\,.$$

La (79) porge in conformità

$$\text{(79′)} \qquad \Theta = \Theta^{(0)} + m_0\left(\Theta^{(1)} - \Theta^{(0)}\,\frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}\right),$$

e la funzione caratteristica H del problema regolarizzato

$$H = \Theta - \frac{E}{U}\,,$$

diviene

$$\text{(85)} \qquad H = H^{(0)} + m_0 H^{(1)}\,,$$

con

$$\text{(86)} \qquad H^{(0)} = \Theta^{(0)} - \frac{E}{U^{(0)}} = \frac{1}{8\,U^{(0)}\varrho^2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(p_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}\, p_\varphi^2\right) - \frac{E}{U^{(0)}}\,,$$

$$\text{(87)} \qquad H^{(1)} = \Theta^{(1)} - \left(\Theta^{(0)} - \frac{E}{U^{(0)}}\right)\frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}\,.$$

20. - Conseguente riduzione del sistema canonico che definisce il movimento.

La (86), tenuta presente la (74), mostra che $H^{(0)}$ *non* dipende da alcuno dei quattro argumenti

$$\zeta_0 , \quad \varphi , \quad Z_0^* , \quad p_\varphi^*$$

(e nemmeno da ψ). Ciò premesso, si formi il sistema canonico di funzione caratteristica $H = H^{(0)} + m_0 H^{(1)}$ nelle due quaderne coniugate

$$\begin{array}{llll} \varrho , & \psi , & \zeta_0 , & \varphi , \\ p_\varrho , & p_\psi , & Z_0 = m_0 Z_0^* , & p_\varphi = m_0 p_\varphi^* . \end{array}$$

In primo luogo, a meno di termini affètti dal fattore m_0, si ha

$$(88) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d\varrho}{d\tau} = \dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial p_\varrho} , & \dfrac{d\psi}{d\tau} = \dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial p_\psi} , \\ \dfrac{dp_\varrho}{d\tau} = - \dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial \varrho} , & \dfrac{dp_\psi}{d\tau} = - \dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial \psi} = 0 , \end{array} \right.$$

le quali valgono da sole ad individuare le prime quattro incognite

$$\begin{array}{ll} \varrho , & \psi , \\ p_\varrho , & p_\psi , \end{array}$$

si intende, a meno di termini che si annullano con m_0. In questo stesso ordine di approssimazione va ritenuto (§ 1)

$$H^{(0)} = 1 ,$$

per tutte le soluzioni del sistema (88) che convengono al problema dei tre corpi, nel caso limite, di cui ora si tratta.

Le rimanenti equazioni, relative alla quaderna

$$\begin{array}{ll} \zeta_0 & , \ \varphi , \\ Z_0 = m_0 Z_0^* & , \ p_\varphi = m_0 p_\varphi^* , \end{array}$$

per l'indipendenza di $H^{(0)}$ da questi argomenti, si riducono a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\zeta_0}{d\tau} &= \quad m_0 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial(m_0 Z_0^*)}, & \frac{d\varphi}{d\tau} &= \quad m_0 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial(m_0 p_\varphi^*)}, \\ m_0 \frac{dZ_0^*}{d\tau} &= -m_0 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial\zeta_0}, & m_0 \frac{dp_\varphi^*}{d\tau} &= -m_0 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial\varphi}, \end{aligned}\right.$$

ossia, più semplicemente, a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\zeta_0}{d\tau} &= \quad \frac{\partial H^{(1)}}{\partial Z_0^*}, & \frac{d\varphi}{d\tau} &= \quad \frac{\partial H^{(1)}}{\partial p_\varphi^*}, \\ \frac{dZ_0^*}{d\tau} &= -\frac{\partial H^{(1)}}{\partial\zeta_0}, & \frac{\partial p_\varphi^*}{\partial\tau} &= -\frac{\partial H^{(1)}}{\partial\varphi}, \end{aligned}\right. \tag{89}$$

costituendo evidentemente un secondo sistema canonico nelle due coppie di coniugate

$$\begin{matrix} \zeta_0, & \varphi, \\ Z_0^*, & p_\varphi^* . \end{matrix}$$

Le variabili della prima quaderna ϱ, ψ, p_ϱ, p_ψ, che (ad eccezione di ψ) ancora figurano in $H^{(1)}$, vanno ormai risguardate come funzioni di τ, corrispondenti ad una ben determinata soluzione del sistema (88): questa può essere, *a priori*, qualunque, coll'unica restrizione che i valori iniziali rendano $H^{(0)} = 1$.

Concludendo, in questo caso limite, il sistema differenziale, dà cui dipende la determinazione delle otto incognite, si scinde in due sistemi distinti. È chiaro senz'altro (in quanto si pensi all'originario problema dei tre corpi, per m_0 trascurabile di fronte alle altre due masse) che, dei due sistemi (88), (89), il primo deve corrispondere al problema dei due corpi, individuando per mezzo di ϱ e di ψ (lunghezza e orientazione del segmento P_2P_1) il moto delle due masse finite m_1, m_2; mentre il secondo definisce successivamente il moto della massa infinitesima nel piano e sotto l'attrazione delle altre due.

Aggiungeremo qui appresso qualche sviluppo di controllo; in particolare ritroveremo le formole del § 17, nell'ipotesi caratteristica del problema ristretto che il moto di m_1, m_2 si riduca ad una rotazione uniforme [cioè che si tratti di una soluzione del sistema (88) nella quale ϱ si mantiene costante].

21. - Verificazioni e raffronti.

a) *Masse finite.* – Constatiamo materialmente che il moto non perturbato dei due corpi P_1, P_2 di masse finite (m_1, m_2) dà luogo alle equazioni (88).

Immaginiamo assunte come coordinate lagrangiane del sistema costituito dai due corpi la loro distanza ϱ^2 e l'inclinazione del vettore $P_1 - P_2$ sopra una retta fissa (del piano del moto): sappiamo (§ 11) che tale anomalia non è altro che 2ψ. Dacchè le distanze di P_1, P_2 dal loro baricentro O valgono rispettivamente

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2}\varrho^2, \qquad \frac{m_1}{m_1 + m_2}\varrho^2,$$

possiamo risguardare

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2}\varrho^2, \qquad 2\psi,$$

come coordinate polari di P_1, e

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}\varrho^2, \qquad 2\psi + \pi,$$

come coordinate polari di P_2.

La loro forza viva complessiva è data, in conformità, da

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left\{\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 (4\varrho^2\dot{\varrho}^2 + 4\varrho^4\dot{\psi}^2)\right\}$$
$$+ \frac{1}{2} m_2 \left\{\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 (4\varrho^2\dot{\varrho}^2 + 4\varrho^4\dot{\psi}^2)\right\} = 2\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\varrho^2(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\psi}^2),$$

il punto sovrapposto designando derivazione rispetto a t.

La funzione delle forze

$$f\,\frac{m_1 m_2}{\varrho^2},$$

si identifica manifestamente coll'$U^{(0)}$ del § 19.

Ove si fissi il valore dell'energia totale E, e si sostituisca al tempo t

una variabile ausiliaria τ definita dalla relazione differenziale

$$d\tau = U^{(0)} dt\,,$$

il problema in questione equivale (trasformazione di DARBOUX) ([4]) ad altro problema dinamico, avente per forza viva

$$\mathsf{T} = \frac{1}{U^{(0)}}\, T = 2\, U^{(0)} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, \varrho^2(\varrho'^2 + \varrho^2 \psi'^2)\,,$$

$$\left(\varrho' = \frac{d\varrho}{d\tau} = \frac{1}{U^{(0)}}\,\dot{\varrho}\,, \qquad \psi' = \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{U^{(0)}}\,\dot{\psi}\right);$$

per funzione delle forze,

$$\frac{E}{U^{(0)}};$$

e per costante delle forze vive l'unità.

Introducendo le coniugate

$$p_\varrho = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \varrho'}\,, \qquad p_\psi = \frac{\partial \mathsf{T}}{d\psi'}\,,$$

ed esprimendo T a loro mezzo, si ha

$$\frac{1}{8\, U^{(0)} \varrho^2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(p_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}\, p_\psi^2\right),$$

che coincide con $\Theta^{(0)}$ per la prima delle (84).

La funzione caratteristica del sistema canonico (in ϱ, ψ e loro coniugate), corrispondente al problema regolarizzato dei due corpi, è così

$$H^{(0)} = \Theta^{(0)} - \frac{E}{U^{(0)}} = \frac{1}{8\, U^{(0)} \varrho^2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(p_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}\, p_\psi^2\right) - \frac{E}{U^{(0)}}\,,$$

ossia proprio la $H^{(0)}$ del sistema (88), c. d. d.

Una soluzione particolare del sistema (88), si ha ovviamente, supponendo ϱ costante (scelta ad arbitrio), $p_\varrho = 0$. In tal caso, il valore, pure

---

([4]) R), p. 483 [di questo volume].

costante, di p_ψ, dovrà ritenersi legato a ϱ dalla condizione che risulti $H^{(0)} = 1$. Indipendentemente da questa sua determinazione, p_ψ è legato alla velocità angolare n del moto delle due masse, in base alla definizione di n e alla seconda delle (8). Si ha infatti

$$n = 2\frac{d\psi}{dt} = 2U^{(0)}\frac{d\psi}{d\tau}:$$

ossia, sostituendo a $d\psi/d\tau$ il suo valore

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial p_\psi} = \frac{1}{4U^{(0)}\varrho^4}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)p_\psi\,,$$

(90) $$n = \frac{1}{2\varrho^4}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)p_\psi\,.$$

A questa si poteva anche pervenire, ricordando (§ 12) che p_ψ rappresenta in ogni caso il doppio del momento delle quantità di moto dei tre corpi (rispetto ad Oz).

Per $m_0 = 0$, e P_1, P_2 animati da moto circolare con velocità angolare n (attorno ad Oz), si hanno le velocità

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2}\varrho^2 n\,, \qquad \frac{m_1}{m_1 + m_2}\varrho^2 n\,,$$

e quindi i momenti di quantità di moto

$$m_1\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \varrho^4 n\,, \qquad m_2\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \varrho^4 n\,.$$

Sommando ed eguagliando a $\frac{1}{2}p_\psi$, si è appunto ricondotti alla (90).

Ricordiamo ancora che, nel moto circolare uniforme compatibile colla legge di NEWTON, l'energia totale è metà dell'energia potenziale. Dobbiamo dunque avere

(91) $$E = -\tfrac{1}{2}U^{(0)}\,.$$

Per ricavare questa formula in base al sistema (88), basta combinare le due condizioni

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial \varrho} = 0\,, \qquad H^{(0)} = 1\,.$$

La prima, tenendo conto che $p_\varrho = 0$ e che $U^{(2)} = f(m_1 m_2/\varrho^2)$, si scrive

$$-\frac{1}{4fm_1m_2\varrho^3}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)p_\psi^2 - 2\,\frac{E}{fm_1m_2}\,\varrho = -\frac{2}{\varrho}\left(H^{(0)}+\frac{2E}{U^{(0)}}\right) = 0\,,$$

e questa, per $H^{(0)} = 1$, dà appunto la (91).

Sempre per le soluzioni circolari che stiamo considerando, da

$$H^{(0)} = \Theta^{(0)} - \frac{E}{U^{(0)}} = 1\,,$$

come corollario della (91), si ha

$$\Theta^{(0)} = \tfrac{1}{2}\,. \tag{92}$$

b) *Massa infinitesima*. — Passiamo ormai al sistema (89), ritenendovi ϱ e p_ψ costanti, e $p_\varrho = 0$ (ψ non vi comparisce, e non c'è quindi da occuparsene).

Vogliamo constatare sulle formule l'equivalenza, concettualmente evidente, di tale sistema col sistema (71) del § 17.

All'uopo cominciamo col fissare le relazioni che intercedono fra le funzioni incognite dei due sistemi: ne trasformeremo poi uno, in modo che compariscano in entrambi le stesse incognite.

Nel sistema (71) figurano le coordinate ellittiche u, v; in (89) abbiamo invece ζ_0, φ. Il legame fra queste due coppie si assegna agevolmente, eguagliando le espressioni (in u e v da un lato, ζ_0 e φ dall'altro) delle due distanze ϱ_1^2, ϱ_2^2 (di P_0 da P_2 e da P_1 rispettivamente).

Dalle (66′) si ha

$$\begin{cases} \varrho_1^2 = \varrho^2\left(\cosh^2\dfrac{u}{2} - \sin^2\dfrac{v}{2}\right), \\[2ex] \varrho_2^2 = \varrho^2\left(\cosh^2\dfrac{u}{2} - \cos^2\dfrac{v}{2}\right), \end{cases}$$

mentre le (11), e (55) porgono

$$\begin{cases} \varrho_1^2 = q^2(1-\gamma_1^2) = \zeta_0^2 + \varrho^2 - \varrho^2\sin^2\varphi\,, \\ \varrho_2^2 = q^2(1-\gamma_2^2) = \zeta_0^2 + \varrho^2 - \varrho^2\cos^2\varphi\,. \end{cases}$$

Dal loro confronto si trae

$$\zeta_0^2 + \varrho^2 = \varrho^2\cosh^2\frac{u}{2}\,,\qquad \sin^2\varphi = \sin^2\frac{v}{2}\,,\qquad \cos^2\varphi = \cos^2\frac{v}{2}\,,$$

le quali equivalgono a

$$\zeta_0 = \pm\, \varrho \sinh \frac{u}{2}\,, \qquad v = \pm\, 2\varphi + \text{multiplo arbitrario di } 2\pi\,.$$

Assumeremo

$$\zeta_0 = \varrho \sinh \frac{u}{2}\,, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\, v\,, \tag{93}$$

risguardando queste formule come parte di una trasformazione *canonica* fra le due quaderne $\begin{pmatrix} \zeta_0\,, & \varphi \\ Z_0^*\,, & p_\varphi^* \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} u\,, & v \\ p_u\,, & p_v \end{pmatrix}$.

La condizione di canonicità

$$Z_0^*\, d\zeta_0 + p_\varphi^*\, d\varphi = p_u\, du + p_v\, dv$$

porge immediatamente, in base alle (93), le altre due relazioni che completano la trasformazione, e sono (eguagliando i coefficienti di du, dv nei due membri)

$$\frac{1}{2}\, \varrho \cosh \frac{u}{2}\, Z_0^* = p_u\,, \qquad \frac{1}{2}\, p_\varphi^* = p_v\,.$$

Dacchè, per la prima delle (93), $\varrho \cosh (u/2)$ vale $|\sqrt{\zeta_0^2 + \varrho^2}|$, che è poi q, a norma della prima delle (55) scriveremo più semplicemente

$$q Z_0^* = 2 p_u\,, \qquad p_\varphi^* = 2 p_v\,, \tag{94}$$

e trasformeremo il sistema (89) mercè le (93), (94).

Abbiamo anzitutto dalla (77′), in virtù delle (94),

$$A = \frac{1}{2\, U^{(0)} \varrho_1^2 \varrho_2^2}\, (p_u^2 + p_v^2)\,. \tag{95}$$

Le (81) poi, badando che vi si deve anche porre $p_\varrho = 0$, divengono

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_1^{(0)} &= \frac{q}{\varrho} \sin \frac{v}{2}\, p_\psi\,, & \Omega_1^{(1)} &= -\,2 \left(\frac{\varrho}{q} \cos \frac{v}{2}\, p_u + \sinh \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2}\, p_v \right),\\
X_1^{(0)} &= -\sinh \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2}\, p_\psi\,, & X_1^{(1)} &= 2\, \frac{q}{\varrho} \cos \frac{v}{2}\, p_v\,,\\
\Omega_2^{(0)} &= \frac{q}{\varrho} \cos \frac{v}{2}\, p_\psi\,, & \Omega_2^{(1)} &= 2 \left(\frac{\varrho}{q} \sin \frac{v}{2}\, p_u - \sinh \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2}\, p_v \right),\\
X_2^{(0)} &= \sinh \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2}\, p_\psi\,, & X_2^{(1)} &= -\,2\, \frac{q}{\varrho} \sin \frac{v}{2}\, p_v\,,
\end{aligned}\right.$$

e così le (82) dànno

$$\lambda_1 = -\, p_\varphi \left(\sin v\, p_u + 2\, \frac{q}{\varrho} \sinh \frac{u}{2}\, p_v\right) = -\, p_\varphi (\sin v\, p_u + \sinh u\, p_v)\,,$$

$$\lambda_2 = \quad p_\varphi \left(\sin v\, p_u - 2\, \frac{q}{\varrho} \sinh \frac{u}{2}\, p_v\right) = \quad p_\varphi (\sin v\, p_u - \sinh u\, p_v)\,.$$

Si ha in conformità, dalla seconda delle (84),

$$\Theta^{(1)} = A - \frac{p_\varphi}{4\, U^{(0)} \varrho_1^2 \varrho_2^2 \varrho^2} \left\{\sin v \left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} - \frac{\varrho_2^2}{m_2}\right) p_u + \sinh u \left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} + \frac{\varrho_2^2}{m_2}\right) p_v\right\};$$

e questa, ponendovi per A l'espressione (95), e per p_φ il suo valore

$$2n\, \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, \varrho^4\,,$$

desunto dalla (90), diviene

$$\text{(96)} \qquad \Theta^{(1)} = \frac{1}{U^{(0)}}\, \frac{1}{2\varrho_1^2 \varrho_2^2} \left[p_u^2 + p_v^2 - n\, \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, \varrho^2 \left\{\sin v \left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} - \frac{\varrho_2^2}{m_2}\right) p_u + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sinh u \left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} + \frac{\varrho_2^2}{m_2}\right) p_v\right\}\right].$$

D'altra parte, l'espressione (87) di $H^{(1)}$, ove si abbiano presenti le (91) e (92), si riduce immediatamente a

$$H^{(1)} = \Theta^{(1)} - \frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}\,.$$

In virtù della (96), il confronto colla (70) porge

$$H^{(1)} = \frac{1}{U^{(0)}}\, F\,.$$

Dacchè, nelle equazioni (89), ϱ e con essa $U^{(0)}$ va trattata come costante, è chiaro che basta, nelle (89) stesse, sostituire $U^{(0)} dt$ a $d\tau$ per ritrovare materialmente il sistema (71) di funzione caratteristica F.

Così è raggiunta anche la prova formale che le equazioni del problema regolarizzato in coordinate asteroidiche (nel caso limite $m_0 = 0$, e sotto l'ipotesi particolare che si mantenga costante la distanza ϱ^2 delle altre due masse) dànno luogo alle consuete equazioni canoniche (71) del problema ristretto in coordinate ellittiche.

OSSERVAZIONE. – Può a primo aspetto parere incongruente che dalle equazioni generali *regolarizzate* scendano per $m_0 = 0$ le (71) che *non* lo sono, ma richiedono all'uopo una trasformazione ulteriore (§ 17).

La spiegazione si ha tosto ricordando che l'algoritmo generale di regolarizzazione si appoggia essenzialmente sulla circostanza che le masse siano, tutte e tre, > 0 (5). Nulla si può dunque pretendere *a priori* per il caso limite $m_0 = 0$. *A posteriori* risulta che, dei due sistemi parziali (88) e (89) definienti il moto in questo caso limite, il primo rimane regolarizzato (problema dei due corpi), ma non così il secondo (problema ristretto). Tanto più, perciò, appariscono interessanti le regolarizzazioni autonome di questo ultimo problema già segnalate da THIELE e da BIRKHOFF.

---

(5) Infatti, soltanto sotto tale ipotesi è legittima la conclusione [R), p. 491 di questo volume; e § 7 del presente scritto] che $(1/U)(1/\varrho_\nu^2 U)$ ($\nu = 0, 1, 2,$), ecc. si comportano regolarmente anche in prossimità di un eventuale urto binario.