XXXVII.

SOPRA DUE TRASFORMAZIONI CANONICHE DESUNTE DAL MOTO PARABOLICO

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXV$_1$ (1916$_1$),

pp. 446-458.

La regolarizzazione (con conservazione della forma canonica) del problema piano dei tre corpi dipende sostanzialmente dalla trasformazione quadratica

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2 \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Ne ho fatto uno studio sistematico in più Note recenti [1], nella prima delle quali esprimevo la fiducia di poter assoggettare anche il problema spaziale ad una regolarizzazione altrettanto esauriente. A ciò induce da un lato la considerazione che la permanenza dei tre corpi in uno stesso piano non conferisce alcun carattere specifico al comportamento analitico del sistema nell'immediata prossimità di un urto binario; dall'altro il fatto che (pur con l'intervento di ausiliarie ingombranti) una regolarizzazione è già stata raggiunta dal SUNDMAN [2] con piena generalità.

In questa fiducia, dopo aver infruttuosamente saggiato parecchie trasformazioni di coordinate, pensai di ricorrere ad uno spediente di calcolo alquanto più penetrante, cioè ad una trasformazione canonica di contatto (anzichè semplicemente puntuale), la quale abbia carattere regolarizzante per il problema elementare dei due corpi.

Scopo principale della presente Nota è la deduzione di questa trasformazione dai moti centrali di tipo parabolico e l'analisi delle sue eleganti proprietà geometrico-cinematiche.

---

(1) In questi Rendiconti, vol. XXIV$_2$ (1915$_2$), pp. 61-75, 235-248, 421-433, 485-501, 553-569 [in questo vol. delle «Opere»: XXXIII, pp. 477-493; XXXIV, pp. 495-509: XXXV, pp. 511-564.

(2) Nel suo celebrato *Mémoire sur le problème des trois corps*, « Acta Mathematica », tomo 36, 1912, pp. 105-179.

Mostrerò prossimamente come essa conduca alla desiderata regolarizzazione canonica del problema dei tre corpi. Qui ne ho tratto occasione per far conoscere una seconda trasformazione canonica, che introduce *elementi osculatori parabolici* riattaccandosi ad un'altra mia ricerca ([3]).

1. - Richiami concernenti il metodo di integrazione di Jacobi.

Sia dato un generico sistema canonico

$$(1) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

a funzione caratteristica $H(p_1, p_2, ..., p_n; x_1, x_2, ..., x_n)$ indipendente da t.

Si formi l'equazione di HAMILTON-JACOBI

$$(2) \qquad H = \text{cost.} = h,$$

ritenendo nel primo membro ogni

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

La definizione classica di integrale completo della (2) fa intervenire specificamente h ed altre $n - 1$ costanti arbitrarie $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$. In forma più simmetrica, seguendo POINCARÉ ([4]), si può chiamare integrale completo ogni funzione

$$W(x_1, x_2, ..., x_n; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$$

delle x_i e di n costanti ξ_i, la quale:

1) verifichi la (2), ossia, sostituita in H, la riduca ad una funzione $\mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ delle sole ξ_i (e quindi costante);

2) contenga le n costanti essenzialmente, ossia non annulli (nel campo di valori che si considera) il determinante hessiano

$$\left\| \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial \xi_j} \right\|. \qquad (i, j = 1, 2, ..., n).$$

([3]) *Nuovo sistema canonico di elementi ellittici*, «Annali di Matematica», serie III, tomo 20, 1913 (dedicato alla memoria di LAGRANGE) [in questo vol. delle «Opere»: XXIV, pp. 341-356].

([4]) *Leçons de mécanique céleste*, tomo I, Paris, Gauthier-Villars, 1905, n. 10.

Mercè una tale W, le equazioni

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \xi_i} = -\tilde{\omega}_i\,, \\ \dfrac{\partial W}{\partial x_i} = p_i\,, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

definiscono complessivamente l'integrale generale del sistema (1), porgendo le x_i e le p_i in funzione dei $2n$ argomenti ξ_i e $\tilde{\omega}_i$: i primi sono da risguardarsi costanti di integrazione; i secondi funzioni lineari di t, e precisamente

$$\tilde{\omega}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i}\, t + \eta_i\,,$$

le η_i designando altre n costanti arbitrarie.

2. - Moto centrale parabolico. Trasformazione di Darboux-Sundman.

Per il moto di un punto P (di massa 1), attratto da un centro fisso secondo la legge di NEWTON, si ha la funzione caratteristica (energia totale)

$$(4)\qquad H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{k}{r}\,,$$

dove k è la costante d'attrazione ed $r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ rappresenta la distanza dal centro, le variabili coniugate $\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \end{pmatrix}$ designando rispettivamente coordinate cartesiane e componenti di velocità del punto mobile. La natura della traiettoria dipende notoriamente dal valore (costante per ogni determinato movimento) dell'energia totale H. Il moto parabolico corrisponde al valore zero. Fissiamo questa determinazione, e consideriamo il sistema differenziale che si ottiene da (1) [per $n = 3$, con la espressione (4) di H] cambiando la variabile indipendente a norma della posizione

$$(5)\qquad dt = r\,du\,.$$

Avremo

$$\frac{dp_i}{du} = -r\frac{\partial H}{\partial x_i}\,, \qquad \frac{dx_i}{du} = r\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Per le soluzioni paraboliche, in corrispondenza a cui $H = 0$, i secondi membri possono essere scritti $-\partial(rH)/\partial x_i$, $\partial(rH)/\partial p_i$. Le soluzioni stesse appartengono perciò anche al sistema canonico

$$\frac{dp_i}{du} = -\frac{\partial(rH)}{\partial x_i}, \qquad \frac{dx_i}{du} = \frac{\partial(rH)}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3)\,, \tag{6}$$

che differisce dall'originario per la duplice alterazione della variabile indipendente e della funzione caratteristica. Tale trasformazione — in verità non recondita e già da me usata ([5]) per la regolarizzazione del problema ristretto — vorrei chiamarla di DARBOUX-SUNDMAN, poichè collega la sostituzione a t del parametro u di SUNDMAN con una proprietà delle traiettorie conservative dovuta a DARBOUX.

Tutte le soluzioni del sistema (6) si possono rappresentare (con le modalità richiamate al n. 1) mediante un integrale completo di

$$rH = \tfrac{1}{2}r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - k = \text{cost}\,.$$

Di queste soluzioni hanno per noi interesse le ∞^5, comuni con l'originario sistema canonico, per le quali $H = 0$.

Ciò posto, ove si conglobi k nella costante del secondo membro, ci si trova condotti ad assegnare un integrale completo $W(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ della equazione

$$\tfrac{1}{2}r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \text{cost.} = \mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,. \tag{7}$$

Nelle espressioni finali delle x_i, p_i, le costanti ξ_1, ξ_2, ξ_3 dovranno ritenersi vincolate dalla relazione

$$\mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = k\,, \tag{8}$$

con che si verifica la condizione $H = 0$ caratteristica delle ∞^5 soluzioni paraboliche.

3. - Costruzione di un integrale completo omogeneo di grado $\frac{1}{2}$.

In coordinate polari r, w (colatitudine), φ (longitudine), la (7) si scrive

$$\frac{r}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 w}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right\} = \text{cost}\,. \tag{7'}$$

([5]) *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*, «Acta Mathematica», tomo 30, 1906, pp. 306-327, [in queste «Opere»: vol. secondo, XXIII, pp. 419-439].

Essa ammette, come si riconosce immediatamente, integrali particolari indipendenti da φ, della forma

$$W = \sqrt{r}\, f(w) .$$

Infatti, sostituendo in (7′), risulta

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4} f^2 + \left(\frac{df}{dw}\right)^2\right\} = \text{cost.} ,$$

cui si soddisfa prendendo per es.

$$f = 2\sqrt{\xi} \sin \tfrac{1}{2} w ,$$

con ξ costante positiva arbitraria. Il primo membro della (7′) si riduce in conformità a $\frac{1}{2}\xi$.

Si è così trovato un integrale

$$W = 2\sqrt{\xi r} \sin \tfrac{1}{2} w , \tag{9}$$

che dipende materialmente da una sola costante, ma che si può agevolmente interpretare come dotato di maggiore generalità. Basta riflettere che (nessuna supposizione essendo stata fatta circa l'orientazione degli assi) è lecito considerare come arbitraria la direzione dell'asse polare Ox_3, cioè della semiretta a partire dalla quale è contata la colatitudine w. In questa accezione, ove si ritorni a coordinate cartesiane generiche, e si designino con λ_1, λ_2, λ_3 i coseni direttori della semiretta suaccennata, sarà

$$\cos w = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{r} ,$$

e W conterrà, oltre a ξ, anche i coseni λ, ossia complessivamente tre costanti indipendenti. Per rendercene conto in modo preciso, immaginiamo il vettore di lunghezza ξ e di coseni direttori λ_1, λ_2, λ_3, ed esprimiamo W per mezzo delle componenti

$$\xi_i = \xi \lambda_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

di questo vettore, continuando tuttavia per brevità a scrivere ξ in luogo di $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$.

La (9) dà

$$W = \sqrt{2\xi r}\sqrt{1-\cos w} = \sqrt{2}\sqrt{\xi r - \sum_{1}^{3}{}_i\, \xi_i x_i}\,, \tag{9'}$$

che costituisce pertanto un integrale della (7) contenente le tre costanti ξ_1, ξ_2, ξ_3 in modo essenziale.

Non mi soffermo a giustificare quest'ultima affermazione, poichè essa apparirà manifesta dallo svolgimento e dal risultato finale del calcolo. Mi limito a rilevare che, a norma della (9'), W si mantiene regolare e diversa da zero, a meno che non si annullino insieme tutte le x_i ($r=0$), ovvero tutte le ξ_i ($\xi=0$), o infine tutte le differenze $x_i - \xi_i$ ($\cos w = 1$). Ricordo, poi, che la sostituzione di (9) in (7') dava per risultato $\frac{1}{2}\xi$, e ne desumo che, per l'integrale completo (9') testè conseguito,

$$\mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \tfrac{1}{2}\xi\,, \tag{10}$$

donde, badando alla (8),

$$\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = 2k\,. \tag{8'}$$

Tale è dunque la relazione, da cui dovranno ritenersi legate al coefficiente d'attrazione le tre costanti d'integrazione ξ_1, ξ_2, ξ_3 nelle soluzioni paraboliche che ci interessano.

4. - Significato delle costanti ξ_i e dei parametri $\tilde{\omega}_i$.

Le equazioni che definiscono il movimento sono, in base alle (3) e alla (9'),

$$-\frac{\partial W}{\partial \xi_i} = \frac{r}{W}\left(\frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi}\right) = \tilde{\omega}_i\,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\xi}{W}\left(\frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi}\right) = p_i\,, \tag{12}$$

$$(i = 1, 2, 3)\,.$$

Prima di risolvere rispetto alle x_i e alle p_i, non sarà male rilevare il significato geometrico-cinematico delle ξ_i, $\tilde{\omega}_i$, appoggiandosi sul fatto noto [e altresì — ben si intende — implicito nelle stesse (11) e (12)] che il movimento è centrale ed ha luogo sopra una traiettoria parabolica col fuoco nell'origine delle coordinate.

La circostanza che il moto è centrale implica l'esistenza degli integrali delle aree, che si compendiano nella relazione vettoriale

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{c}\,, \tag{13}$$

designando $\mathbf{r}$ il raggio vettore focale (di componenti ξ_1, ξ_2, ξ_3); $\mathbf{v}$ la velocità, ossia il vettore di componenti p_1, p_2, p_3; $\mathbf{c}$ un vettore costante (momento focale della velocità). Per brevità, introduciamo ancora il vettore costante $\boldsymbol{\xi}$ definito dalle componenti ξ_1, ξ_2, ξ_3, nonchè il vettore (variabile) $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ definito dalle componenti $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$.

Già risulta dalla (8′) che il vettore $\boldsymbol{\xi}$ ha lunghezza (certo non nulla) $2k$; resta da renderci conto della direzione, servendoci all'uopo delle (11) e (12). In forma vettoriale esse si scrivono

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{W}\left(\mathbf{r} - \frac{r}{\xi}\boldsymbol{\xi}\right), \tag{11′}$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{W}\left(\frac{\xi}{r}\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}\right), \tag{12′}$$

e consentono di riconoscere che, *al pari di* $\boldsymbol{\xi}$, *è costante anche il vettore* $\boldsymbol{\xi} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}$. All'uopo, moltiplichiamo vettorialmente la (11′) per $\boldsymbol{\xi}$ e la (12′) per $\mathbf{r}$. Viene

$$\boldsymbol{\xi} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{1}{W}\mathbf{r} \wedge \boldsymbol{\xi}\,,$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = -\frac{1}{W}\mathbf{r} \wedge \boldsymbol{\xi}\,,$$

donde, per la (13),

$$\boldsymbol{\xi} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{c}\,, \tag{14}$$

c. d. d.

Ricaviamo dalle (11′) anche l'espressione del prodotto scalare $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\xi}$ e di $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^2$, che scriveremo $\tilde{\omega}^2$, attribuendo, per analogia con ξ, la designazione $\tilde{\omega}$ alla lunghezza $\sqrt{\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^2}$ del vettore $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$.

Si ha

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{W}(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r} - \xi r)\,,$$

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{2r}{\xi W^2}(\xi r - \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r})\,,$$

le quali, badando che, per la (9′), è

$$\tfrac{1}{2}W^2 = \xi r - \boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{r}\,, \tag{9″}$$

porgono

$$-\tilde{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\xi} = \tfrac{1}{2}W\,, \tag{15}$$

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{r}{\xi}\,. \tag{16}$$

Noto per incidenza che la (15) si esplicita in

$$-\sum_1^3{}_i\,\tilde{\omega}_i\xi_i = \sum_1^3{}_i\,\frac{\partial W}{\partial\xi_i}\,\xi_i = \frac{1}{2}\,W\,,$$

e si sarebbe potuta desumere dalla semplice osservazione che W è omogenea di grado $\frac{1}{2}$ rispetto alle ξ (come anche rispetto alle x).

Con ovvia combinazione delle (9″), (15) e (16), si ha

$$\tilde{\omega}^2\xi^2 - (\tilde{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\xi})^2 = \xi r - \frac{1}{2}\,(\xi r - \boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\,\xi\left(r + \frac{1}{\xi}\,\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{r}\right).$$

Il primo membro si identifica manifestamente col quadrato del vettore $\boldsymbol{\xi}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}}$; cioè, in virtù della (14), con la costante $\boldsymbol{c}^2$.

Ricordando che w rappresenta l'angolo formato dai due vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{\xi}$, si attribuisce al terzo membro la forma $\frac{1}{2}\xi r(1 + \cos w)$, e se ne ricava l'equazione

$$r(1 + \cos w) = \frac{2}{\xi}\,\boldsymbol{c}^2\,. \tag{17}$$

Questa contiene i soli argomenti variabili r e w, e definisce quindi la traiettoria del moto, dal momento che, in virtù della (13), si tratta di una curva tutta situata nel piano

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r} = 0\,.$$

Il confronto con la forma tipica della equazione polare della parabola mostra che w è l'angolo formato dal raggio vettore $\boldsymbol{r}$ con l'asse rivolto dalla banda della direttrice; inoltre che la costante del secondo membro,

$$\frac{2}{\xi}\mathbf{c}^2 = \frac{2}{\xi}(\boldsymbol{\xi}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}})^2 = \frac{2}{\xi}\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \tilde{\omega}_1 & \tilde{\omega}_2 & \tilde{\omega}_3\end{vmatrix}^2,$$

rappresenta il parametro.

In definitiva: *Il vettore costante* (ξ_1, ξ_2, ξ_3) *di lunghezza* $2k$ *ha la direzione dell'asse della parabola nel verso che va dal fuoco alla direttrice.*

Quanto ai parametri $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$, compendiati nel vettore $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, l'interpretazione risulta immediata dalle (11') e (12'), il cui confronto porge

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\xi} r\boldsymbol{v} = \frac{1}{2k} r\boldsymbol{v}\,. \tag{18}$$

5. - Forma risoluta della trasformazione canonica fra le due sestuple x_i, p_i; ξ_i, $\tilde{\omega}_i$.

Dalle (11), (12) segue l'identità

$$\sum_1^3{}_i\, p_i dx_i - \sum_1^3{}_i\, \tilde{\omega}_i d\xi_i = dW;$$

perciò le formule stesse definiscono una trasformazione canonica fra le primitive variabili x_i, p_i e gli argomenti ξ_i, $\tilde{\omega}_i$, purchè soltanto si possano effettivamente risolvere rispetto alle une e agli altri.

Le (11), isolando x_i, e scrivendo Y in luogo di $-\frac{1}{2}W$, porgono

$$x_i = \frac{r}{\xi}\xi_i - 2Y\tilde{\omega}_i\,.$$

Ma già abbiamo ricavato nel numero precedente [sostanzialmente come combinazione delle stesse (11), (12)] le espressioni di r e di W in termini delle ξ_i e $\tilde{\omega}_i$: esse sono offerte dalle (15), (16), la prima delle quali diviene $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi} = Y$.

Abbandonando la notazione vettoriale, ma conservando le abbreviazioni

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^2}, \tag{a}$$

$$Y = \sum_1^3{}_i\, \tilde{\omega}_i \xi_i$$

(coi valori aritmetici dei radicali), si ha il primo gruppo delle cercate formule risolute

$$x_i = \tilde{\omega}^2 \xi_i - 2 Y \tilde{\omega}_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{I}$$

cui giova associare l'espressione (16) di r, che ne è del resto una necessaria conseguenza e che riscrivo per raccogliere le varie formule da tener presenti in vista dell'applicazione, annunciata nell'introduzione (alla regolarizzazione del problema dei tre corpi),

$$r = \xi \tilde{\omega}^2 . \tag{b}$$

Le formule esprimenti le p_i risultano dal confronto delle (11) con le (12), confronto che già si è tradotto nella (18). Da questa, sostituendo per r il suo valore (b), si trae

$$p_i = \frac{\tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}^2} \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

Senza eseguire la detta sostituzione, si avrebbe

$$r p_i = \xi \tilde{\omega}_i \tag{c}$$

da cui [o dalle (II)], tenuto conto di (b), scende

$$r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi , \tag{d}$$

che giova fissare per la ragione testè indicata a proposito della (b).

6. - Inversione. Comportamento analitico.

La trasformazione (I), (II) si inverte senza alcun calcolo. Basta notare che l'espressione (9′) di W dipende in modo simmetrico dalle x_i e dalle ξ_i, talchè anche le formule (11), (12) risultano simmetriche rispetto alle due sestuple (x_i, p_i), $(\xi_i, -\tilde{\omega}_i)$.

Perciò, *ove si scambino materialmente, nelle* (I), (II) *le* x_i, p_i *con le corrispondenti* ξ_i, $-\tilde{\omega}_i$, *se ne traggono le espressioni delle nuove in termini delle antiche variabili. Giova aggiungere che, data la forma delle stesse* (I), (II), *si perviene al medesimo risultato scambiando addirittura gli elementi corrispondenti delle due sestuple* (x_i, p_i), $(\xi_i, \tilde{\omega}_i)$.

Questa osservazione, congiunta con la circostanza che i secondi membri delle (I) sono polinomi (di terzo grado), e quelli delle (II) funzioni razionali col denominatore $\tilde{\omega}^2$, consente di affermare che *la nostra trasformazione è birazionale e regolare per tutti i valori finiti degli argomenti, che non annullano il trinomio* $\tilde{\omega}_1^2+\tilde{\omega}_2^2+\tilde{\omega}_3^2$ *o, rispettivamente,* $p_1^2+p_2^2+p_3^2$.

Rispetto alla trasformazione diretta (I), (II), meritano particolare menzione le sestuple Γ costituite da valori tutti nulli delle $\tilde{\omega}_i$, ma non tutti nulli delle ξ_i, talchè $\xi > 0$. Si tratta manifestamente di sestuple (non regolari, per quanto si è testè osservato) le quali si trovano immerse nel campo di olomorfismo senza interromperne la continuità; esse formano infatti una varietà a sole tre dimensioni, mentre lo spazio ambiente ne ha sei.

Supponiamo di far variare la sestupla ξ_i, $\tilde{\omega}_i$ in detto spazio, avvicinandoci ad una Γ lungo una linea (regolare) L, per modo che, tendendo le $\tilde{\omega}_i$ a zero, i rapporti $\tilde{\omega}_i/\tilde{\omega}$ ammettano limiti ben determinati γ_i, soddisfacenti necessariamente alla condizione

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1\,.$$

Le (I), (*b*), (*c*) mostrano che *le coordinate* x_i, *il raggio vettore* r *e i prodotti* rp_i *rimangono, anche nell'intorno di una generica* Γ, *funzioni regolari delle* ξ_i, $\tilde{\omega}_i$, *che si annullano in* Γ; non così le p_i, le quali in generale tendono a diventare infinite.

Quando, lungo L, ci si avvicina indefinitamente a Γ, si ha dalle (I) e (*b*) [tenuto conto, si intende, delle posizioni (*a*)]

$$\lim\frac{x_i}{r}=\frac{\xi_i}{\xi}-2\gamma_i\sum_1^3{}_j\,\frac{1}{\xi}\,\xi_j\gamma_j\,; \tag{19}$$

e dalle (II) e (*b*),

$$\lim\sqrt{r}\,p_i=\sqrt{\xi}\,\gamma_i\,. \tag{20}$$

Se, in particolare, ogni γ_i coincide con $\pm\,\xi_i/\xi$, come avviene [in base alla (14), per $\boldsymbol{c}=0$] quando il moto parabolico degenera in rettilineo, risulta

$$\lim\frac{x_i}{v}=-\frac{\xi_i}{\xi}\,. \tag{19'}$$

Osservazione. – Nei riguardi delle coordinate x_i la nostra trasformazione canonica (I), (II) non è puntuale, poichè nei secondi membri delle (I) appariscono variabili trasformate di entrambe le serie (ξ_i e $\tilde{\omega}_i$). Si tratta quindi di una trasformazione di contatto. Intrinsecamente, per altro, essa rientra nel tipo delle trasformazioni puntuali estese (nel senso di LIE). Infatti le (II) rappresentano una inversione per raggi vettori reciproci fra le p_i e le $\tilde{\omega}_i$, e le (I) ne rimangono subordinate dalla condizione di canonicità.

7. - Moto parabolico tangente ad un movimento generico. Interpretazione delle variabili trasformate ξ_i, $\tilde{\omega}_i$.

Dal n. 4 risulta agevolmente quale significato si possa attribuire alle variabili $(\xi_i, \tilde{\omega}_i)$, quando le (x_i, p_i) si considerano come coordinate e componenti di velocità di un punto mobile con legge qualsiasi.

Basta considerare un ipotetico moto parabolico (*moto tangente*) dello stesso punto, dovuto ad attrazione newtoniana verso l'origine delle coordinate, per cui:

1) il coefficiente d'attrazione abbia il valore

$$k = \tfrac{1}{2}r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\,,$$

corrispondente alla sestupla (x_i, p_i) che si prende in considerazione;

2) la parabola traiettoria passi per il punto (x_1, x_2, x_3), toccandovi il vettore (p_1, p_2, p_3).

Le nuove variabili ξ_i, $\tilde{\omega}_i$ sono espressivamente collegate a tale moto tangente: ξ_1, ξ_2, ξ_3 definiscono un vettore di lunghezza $2k$ che ha la direzione dell'asse della parabola (vòlto dal fuoco alla direttrice); $\dfrac{1}{\xi}\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \tilde{\omega}_1 & \tilde{\omega}_2 & \tilde{\omega}_3 \end{Vmatrix}^2$ ne è il semiparametro; ecc.

Quando eventualmente, nel corso del moto, le ξ_i, $\tilde{\omega}_i$ convergono verso una delle sestuple Γ di cui al n. prec. ($\tilde{\omega}_i = 0$, $\xi > 0$), la parabola osculatrice tende a schiacciarsi indefinitamente, convergendo a zero il relativo parametro; l'orientazione dell'asse ha però un limite ben determinato. Il mobile tende ad avvicinarsi all'origine secondo una direzione pur determinata [cfr. formula (19)]. Se, in particolare,

$$\lim \frac{\tilde{\omega}_i}{\omega} = \pm \frac{\xi_i}{\xi}\,, \qquad (i = 1, 2, 3)\,,$$

l'avvicinamento suddetto segue nella direzione dell'asse [formula (19')].

8. - Integrale completo a variabili separate. Elementi parabolici.

Accanto alle (I), (II) è degna di interesse un'altra trasformazione canonica la quale collega le x_i, p_i ad elementi osculatori parabolici, assai affini agli ordinari elementi ellittici. Vi si perviene nel modo più rapido, partendo da un integrale completo della (7′) del tipo classico

$$W = R + Gw , \tag{21}$$

con G costante ed R funzione della sola r. Si può assumere

$$R = \int_q^r dr \sqrt{\frac{Z^2}{4r} - \frac{G^2}{r^2}} , \tag{22}$$

dove

$$\tfrac{1}{8}Z^2 = k \tag{23}$$

è la costante del secondo membro di (7′), e

$$q = \frac{4G^2}{Z^2} \tag{24}$$

designa il valore di r (unico nel campo finito) che annulla il radicale. Riferendosi, con ragionamento classico, al modo di variare del raggio vettore lungo l'orbita (parabolica nel caso presente), si constata chè q rappresenta la minima distanza del mobile dal fuoco, ossia il semiparametro.

Come retta fissa, a partire dalla quale è contato l'angolo w, intenderemo assunta, seguendo POINCARÉ [6], la linea dei nodi (intersezione, debitamente precisata quanto al verso, del piano della parabola col piano Ox_1x_2); con che, detta al solito θ la longitudine del nodo, si ha

$$\cos w = \frac{x}{r}\cos\theta + \frac{y}{r}\sin\theta ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = -\cos I , \tag{25}$$

I designando l'inclinazione (del piano della parabola sul piano Ox_1x_2).

---

[6] Loc. cit., pp. 48-51.

Dopo ciò, W viene a contenere le tre costanti Z, G, θ caratterizzabili come segue:

Z dipende esclusivamente dal coefficiente di attrazione, a norma della (23);

$G = \frac{1}{2}Z\sqrt{q}$ individua (subordinatamente a Z) il semiparametro q della parabola;

θ rappresenta la longitudine del nodo.

Le (3), adattate alla nostra W in cui Z, G, θ fungono da ξ_i, ove si scriva $-\zeta$, $-g$, Θ al posto di $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$ dànno

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial Z} = \zeta\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial G} = g\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial \theta} = -\Theta\,, \\ &\frac{\partial W}{\partial x_i} = p_i\,, \qquad (i = 1, 2, 3)\,. \end{aligned} \right.$$

In base alle (21), (22), (24) e (25), il primo gruppo si scrive

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \sqrt{r - q} = \zeta\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial G} = \frac{\partial R}{\partial G} + w = g\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial \theta} = -G\cos I = -\Theta\,,$$

e consente di rilevare il significato degli altri tre parametri ζ, g, Θ.

Per nota proprietà della parabola:

$\zeta^2 = r - q$ rappresenta l'ascissa della generica posizione del mobile, contata lungo l'asse a partire dal vertice;

dalla seconda equazione, applicata al vertice, segue che

g rappresenta l'angolo che la direzione dell'asse (vôlta dal fuoco verso il vertice) forma con la linea dei nodi;

Infine la terza equazione mostra che:

$\Theta = G\cos I$ individua l'inclinazione.

Le (26) implicano

$$\textstyle\sum_i p_i\,dx_i - (Z\,d\zeta + G\,dg + \Theta\,d\theta) = d(W - Z\zeta - Gg)\,,$$

definendo perciò una trasformazione canonica fra la sestupla p_i, x_i e le due terne coniugate

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{pmatrix} Z\,, & G\,, & \Theta \\ \zeta\,, & g\,, & \theta \end{pmatrix}.$$

Le espressioni esplicite delle x_i, p_i in termini della nuova sestupla (P) si stabiliscono subito, sia per materiale risoluzione delle (26), sia anche più semplicemente (come si suol fare nel caso degli elementi ellittici) ricorrendo a formule elementari di trasformazione di coordinate e sfruttando il significato dei sei parametri.

Tralascio ogni sviluppo, limitandomi ad avvertire che questa trasformazione fra le x_i, p_i e le (P) *non* ha le prerogative regolarizzanti della (I), (II) nell'intorno dell'origine ($x_i = 0$, cui fanno riscontro valori nulli di ζ, G e Θ).

Terminerò osservando che la sestupla canonica (P) si può risguardare come un caso limite (corrispondente al valore zero dell'energia) di quegli elementi ellittici che ho denominato *isoenergetici* ([7]) e che, sotto alcuni rapporti, sono preferibili agli ordinari elementi *isodinamici*, in quanto vi comparisce direttamente (per individuare la fase del moto tangente) la anomalia eccentrica, anzichè la media. Analoghi servigi possono rendere gli elementi (P) nello studio delle perturbazioni cometarie.

([7]) Nella già citata Memoria del tomo XX degli « Annali di Matematica » [in questo volume: XXIV, pp. 341-356]. Cfr. altresì H. ANDOYER, *Sur l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie comme éléments canoniques d'après MM. T. Levi-Civita et G.-W. Hill*, in « Bulletin Astronomique », tome XXX, 1913, pp. 425-429; *Sur les problèmes fondamentaux de la mécanique céleste*, ibidem, tome XXXII, 1915, pp. 5-18.