XXXVIII.

SUR LA RÉGULARISATION DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CLXII (1916),

pp. 1-4.

Les équations différentielles du problème des trois corps, dans une quelconque de leurs formes classiques, présentent des singularités au voisinage d'un choc. J'ai montré, il y a déjà quelques années (1), que, dans le cas particulier du problème restreint, on peut faire disparaître toute singularité par un changement tout à fait élémentaire de paramètres, et cela sans altérer la forme canonique des équations.

M. Sundman a découvert ensuite (2) une régularisation du problème général, d'où la conclusion, mémorable au point de vue de l'analyse, que toute solution (quelles que soient les données initiales) peut être représentée par des développements en série toujours convergents. Cependant le but a pu être atteint seulement d'une manière indirecte, par l'introduction d'un nombre assez grand d'auxiliaires et en sortant du cadre des équations de la Dynamique: circonstance assez gênante, puisqu'il n'est plus permis (du moins sans discussions préalables) d'appliquer au système régularisé ni les résultats théoriques, ni les méthodes de calcul de la Mécanique analytique.

Pour le problème plan je suis parvenu tout récemment (3) à une véritable régularisation dynamique, en généralisant (avec traitement symétrique des trois corps) la transformation employée pour le problème restreint).

Le problème dans l'espace a longtemps résisté à mes efforts, tant que j'essayais de l'aborder par de semblables changements de coordon-

(1) « Acta mathematica », t. 30, 1906, pp. 305-327 [in queste «Opere»: vol. secondo, XXIII, pp. 419-439].

(2) Ibidem, t. 36, 1912, pp. 105-179.

(3) « Rendiconti dei Lincei », t. 24 (2° semestre 1915), pp. 61-75, 235-248, 421-433, 485-501, 553-569, [in questo vol.: XXXIII, pp. 477-493; XXXIV, pp. 495-509; XXXV, pp. 511-564].

nées. Les transformations canoniques usuelles, se rattachant au mouvement elliptique, ne régularisent pas non plus. Mais on peut en trouver d'analogues: une notamment bien simple, suggérée par le mouvement parabolique, rendant tout holomorphe au voisinage d'un choc binaire. C'est ce que je vais exposer ici, si l'Académie veut bien le permettre.

1. – Soient O, P, P' les trois corps; m_0, m, m' leurs masses; x_i, x_i' $(i=1,2,3)$ les coordonnées de P et de P' par rapport à O (c'est-à-dire par rapport à trois axes rectangulaires d'orientation fixe ayant l'origine en O); p_i, p_i' les composantes de la quantité de mouvement *absolue* de P et de P' respectivement; r, r', Δ les trois distances $\overline{OP}$, $\overline{OP'}$, $\overline{PP'}$; f la constante de l'attraction; $\mathfrak{O}$ la fonction des forces; $\mathfrak{T}$ l'énergie cinétique du système. On a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{O} &= f\left(\frac{m_0 m}{r}+\frac{m_0 m'}{r'}+\frac{mm'}{\Delta}\right), \\ \mathfrak{T} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m_0}\right)(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m'}+\frac{1}{m_0}\right)(p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2) \\ &\quad +\frac{1}{m_0}(p_1p_1'+p_2p_2'+p_3p_3')\,. \end{aligned}\right.$$

Les équations du mouvement relatif sous la forme canonique de Poincaré dérivent de la fonction caractéristique

$$(2)\qquad H=\mathfrak{T}-\mathfrak{O}\,.$$

Elles s'écrivent par conséquent

$$(3)\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\,,\qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i};\qquad \frac{dp_i'}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i'}\,,\qquad \frac{dx_i'}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i'}\,,$$
$$(i=1,2,3),$$

et donnent lieu à l'intégrale (des forces vives)

$$(4)\qquad H=\mathfrak{E}\qquad\qquad (\mathfrak{E}=\text{const.}).$$

2. – Envisageons les mouvements pour lesquels la constante $\mathfrak{E}$ a une valeur fixée d'avance, et posons avec M. Sundman

$$(5)\qquad dt=r\,du\,.$$

Les ∞^{11} solutions du système (3) satisfaisant à la condition $H = \mathfrak{E}$ vérifient également le système

$$\frac{dp_i}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial p_i}; \quad \frac{dp'_i}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial x'_i}, \quad \frac{dx'_i}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial p'_i}, \tag{6}$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

où

$$H^* = r(H - \mathfrak{E}). \tag{7}$$

Elles correspondent à la valeur zéro de H^*.

3. – Le dernier pas en vue de la régularisation consiste à remplacer les x_i, p_i par six combinaisons canoniques ξ_i, $\tilde{\omega}_i$ moyennant la transformation suivante [4]:

$$x_i = \tilde{\omega}^2\xi_i - 2U\tilde{\omega}_i, \qquad p_i = \frac{\tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}^2}, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{8}$$

où

$$\tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^2, \qquad U = \tilde{\omega}_1\xi_1 + \tilde{\omega}_2\xi_2 + \tilde{\omega}_3\xi_3.$$

C'est une transformation canonique, puisqu'elle entraîne

$$\sum_1^3{}_i\, p_i\, dx_i - \sum_1^3{}_i\, \tilde{\omega}_i\, d\xi_i = -2\,dU.$$

Elle entraîne aussi

$$\left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \xi\tilde{\omega}^2, && (\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}),\\ rp_i &= \xi\tilde{\omega}_i, && (i = 1, 2, 3),\\ r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) &= \xi. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

4. – Ceci posé, plaçons-nous au voisinage d'un choc entre P et O, dans l'hypothèse où le moment résultant des quantités de mouvement du système ne s'annule pas. On est assuré, d'après M. SUNDMAN, que P'

---

(4) On y est conduit tout naturellement en intégrant par la méthode de JACOBI les équations du mouvement parabolique (d'un point soumis à l'attraction newtonienne d'un centre fixe, dans le cas particulier où s'annule la constante des forces vives). Voir, pour cette déduction et pour les propriétés géométriques de ladite transformation, une Note actuellement sous presse aux « Rendiconti dei Lincei » [in questo vol.: XXXVII, pp. 573-587].

reste à une distance finie soit de O que de P, la vitesse de P' restant finie. La vitesse de P croît au contraire indéfiniment, lorsqu'on s'approche d'un choc, de façon toutefois que le produit $r(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$ tende vers une limite positive (dépendant exclusivement des masses).

Pour notre but suffit d'ailleurs la remarque, découlant immédiatement des formules (8) et (9), que, par rapport aux nouvelles variables ξ_i, $\bar{\omega}_i$, *un choc est caractérisé par des valeurs nulles de* $\bar{\omega}_i$, *non toutes nulles à la fois des* ξ_i: bien entendu, on doit y associer des valeurs finies quelconques des x_i', p_i' soumises à la seule restriction $r' > 0$ (ce qui implique, à cause de $r = 0$, $\Delta = r' > 0$). *Les formules* (8) *et* (9) *montrent au surplus que, dans le domaine d'un tel système de valeurs, les ancienne coordonnées* x_i, *ainsi que* r, rp_i, $r(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$ *sont des fonctions holomorphes des arguments* ξ_i, $\bar{\omega}_i$. *On en déduit immédiatement, ayant égard à* (1), (2) *et* (7), *qu'il en est de même pour la fonction caractéristique* H^*; c. q. f. d.

5. – Considérons en particulier (parmi les termes qui figurent dans H^*) le produit

$$r\mathfrak{D} = f\left(m_0 m + m_0 m' \frac{r}{r'} + mm' \frac{r}{\Delta}\right).$$

Par rapport aux nouvelles variables, c'est évidemment une fonction holomorphe au voisinage d'un choc P, O, qui ne s'annule pas pour $r = 0$.

Il s'ensuit que le paramètre τ, défini par la relation différentielle

$$d\tau = \mathfrak{D}\, dt = r\mathfrak{D}\, du\,, \tag{10}$$

peut rendre les mêmes services que u, dans le domaine susdit, avec l'avantage, évident à cause de sa structure symétrique, de s'appliquer également aux autres chocs éventuels: partout ailleurs, cela va sans dire, la substitution de τ à t comme variable indépendante est parfaitement légitime, puisque $\mathfrak{D}$ demeure fini et > 0.

Par une telle substitution, la fonction caractéristique H^* du système différentiel (6) devient

$$F = \frac{1}{r\mathfrak{D}} H^* = \frac{1}{\mathfrak{D}} (H - \mathfrak{E})\,. \tag{11}$$

C'est une fonction régulière des variables primitives x_i, p_i, x_i', p_i', tant que les positions des trois corps sont distinctes; au voisinage d'un choc binaire, des transformations canoniques analogues à (8) suffisent à rétablir la régularité.

On peut évidemment (d'une infinité de manières) choisir 12 paramètres canoniques

$$y_h\,,\quad q_h \qquad (h = 1, 2, ..., 6)$$

définissant l'état de mouvement des trois corps, doués de la propriété que $F(y_h, q_h)$ se comporte régulièrement *toujours* (chocs éventuels compris), c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de ces paramètres qu'on peut effectivement atteindre pendant le cours du mouvement (à partir d'un état quelconque).

Il resterait à indiquer un choix approprié de tels paramètres. Je me borne à signaler la question. Pour le problème plan, la question analogue a été traitée avec tous les développements qu'elle comporte dans les Notes citées au début.