XXVII.

SULLA INTEGRAZIONE DI UNA CLASSE DI EQUAZIONI DINAMICHE

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXIII, 1898, pp. 542–558 (*)

In una Nota precedente avente il titolo: *Sopra una classe di equazioni dinamiche* [1], ho stabilito le equazioni differenziali dei *moti spontanei a caratteristiche indipendenti*.

Ci varremo ora dei risultati ivi trovati per approfondire l'esame dei moti stessi. Studieremo dapprima il caso dei moti del secondo ordine, cioè di quei moti che dipendono da due sole caratteristiche e mostreremo come queste si ottengono in funzione del tempo mediante funzioni esponenziali. Prenderemo poi ad esaminare un sistema *non olonomo* che può assumersi come il sistema tipico del secondo ordine e per questo sistema studieremo completamente l'andamento del moto, rilevando le particolarità che si osservano nel caso dei moti permanenti, e distinguendo il caso della stabilità da quello della instabilità.

In due paragrafi successivi tratteremo dei moti d'ordine ν, quando esistono $\nu - 2$ integrali lineari o $\nu - 3$ integrali lineari ed uno quadratico. In questo caso giovandoci di un risultato che abbiamo stabilito alcuni anni fa [2], mostreremo che allorquando la equazione determinante ha radici disuguali, le caratteristiche sono funzioni ellittiche del tempo.

Finalmente nell'ultimo paragrafo, applicando una geniale osservazione del POINCARÉ, già impiegata con successo dal PICARD [3] e dal PAINLEVÉ [4] in alcune questioni meccaniche, otterremo nel caso il più generale, le caratteristiche espresse mediante serie di funzioni del tempo, valide per tutti i valori del tempo, i cui coefficienti si ricavano mediante operazioni razionali dalle costanti note delle equazioni differenziali e dai valori iniziali delle caratteristiche.

Il problema della determinazione analitica delle caratteristiche in funzione del tempo, viene così completamente risoluto.

(*) Presentata nell'adunanza del 27 marzo 1898.

(1) «Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXIII, 1898, pp. 451–475 [in questo vol.: XXVI, pp. 336–355].

(2) *Sopra un sistema di equazioni differenziali*. «Atti Acc. Sc. Torino», vol. XXX, Vol. 1894–95, p. 445 [in questo vol.: VIII, pp. 122–128].

(3) PICARD, *Traité d'analyse*, T. III, chapitre X.

(4) P. PAINLEVÉ, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm*, p. 577.

§ 1. – Moti spontanei a caratteristiche indipendenti del secondo ordine.

1. Nel caso dei sistemi del secondo ordine le equazioni generali (Nota citata, § 7, form. (E')) divengono

$$p_1' = g_{12}^{(1)} p_2 p_1 + g_{12}^{(2)} p_2^2$$

$$p_2' = g_{21}^{(2)} p_1 p_2 + g_{21}^{(1)} p_1^2$$

ovvero, ponendo

$$g_{12}^{(1)} = -\alpha \quad , \quad g_{12}^{(2)} = -\beta ,$$

avremo

$$(1) \qquad \begin{cases} p_1' = -p_2(\alpha p_1 + \beta p_2) \\ p_2' = \quad p_1(\alpha p_1 + \beta p_2). \end{cases}$$

2. Mostriamo la effettiva esistenza di sistemi a caratteristiche indipendenti del secondo ordine, a cui corrispondono valori arbitrarii per le costanti α e β. Per ogni sistema di valori di queste quantità ne esistono infiniti. Noi in particolare ne esamineremo uno speciale che considereremo come tipico e che ci darà un'idea materiale dell'andamento del moto corrispondente.

Prendiamo un sistema di assi x_1, x_2, x_3 tali che i coseni degli angoli che essi formano originariamente con gli assi coordinati ξ_1, ξ_2, ξ_3 siano rappresentati dalla seguente tabella:

(2)

	ξ_1,	ξ_2,	ξ_3
x_1	α_1,	α_2,	α_3
x_2	β_1,	β_2,	β_3
x_3	γ_1,	γ_2,	γ_3

Se ruotiamo gli assi x_1, x_2, x_3 di un angolo θ intorno alla parallela a ξ_1 condotta per la loro origine, i coseni stessi diverranno

	ξ_1,	ξ_2,	ξ_3
x_1	ξ_{11},	ξ_{21},	ξ_{31}
x_2	ξ_{12},	ξ_{22},	ξ_{32}
x_3	ξ_{13},	ξ_{23},	ξ_{33}

in cui

$$\xi_{11} = \alpha_1 \quad , \quad \xi_{21} = \alpha_2 \cos\theta - \alpha_3 \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \xi_{31} = \alpha_3 \cos\theta + \alpha_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\xi_{12} = \beta_1 \quad , \quad \xi_{22} = \beta_2 \cos\theta - \beta_3 \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \xi_{32} = \beta_3 \cos\theta + \beta_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\xi_{13} = \gamma_1 \quad , \quad \xi_{23} = \gamma_2 \cos\theta - \gamma_3 \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \xi_{33} = \gamma_3 \cos\theta + \gamma_2 \operatorname{sen}\theta .$$

Denotiamo con ξ_1, ξ_2, ξ_3 le coordinate dell'origine degli assi x_1, x_2, x_3 e poniamo

$$\theta = D\xi_1, \tag{3}$$

in cui D denota una costante. Avremo allora che ad ogni punto dello spazio, preso come origine degli assi x_1, x_2, x_3, corrisponderà una orientazione degli assi stessi.

Per ottenere queste diverse orientazioni osserviamo che gli assi x_1, x_2, x_3 le cui origini appartengono ad uno stesso piano parallelo a $\xi_2 \xi_3$ sono paralleli fra loro e se le origini sono scelte sul piano coordinato $\xi_2 \xi_3$ la loro comune orientazione corrisponde a quella primitiva rappresentata dalla tabella (2). Immaginiamo dunque condotto per ogni punto di questo piano coordinato gli assi x_1, x_2, x_3 nella orientazione primitiva, quindi facciamo muovere il piano stesso di un movimento a vite attorno all'asse ξ_1 in modo che il passo della vite sia $2\pi/D$. Se il piano trascinerà nel suo moto gli assi x_1, x_2, x_3 supposti condotti per ogni punto di esso e ammettendoli rigidamente collegati al piano stesso, questi prenderanno le orientazioni corrispondenti alle varie posizioni che assumono le loro origini.

3. Per ciò che abbiamo ora veduto, ad ogni punto A dello spazio corrisponde un piano $x_1 x_2$ passante per A che denoteremo con σ_A. Supponiamo che si abbia un punto mobile, tale che in ogni posizione che occupa nello spazio, esso non possa muoversi che tangenzialmente al piano σ_A corrispondente al punto stesso. Il sistema sarà *non olonomo* (5) e l'equazione del vincolo sarà

$$\xi_{13}\, d\xi_1 + \xi_{23}\, d\xi_2 + \xi_{33}\, d\xi_3 = 0 .$$

Potremo dunque porre

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_{11} p_1 + \xi_{12} p_2 \\ \xi_2' &= \xi_{21} p_1 + \xi_{22} p_2 \\ \xi_3' &= \xi_{31} p_1 + \xi_{32} p_2 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ove p_1 e p_2 sono le caratteristiche del moto.

Supponendo la massa del punto eguale ad 1, la sua forza viva sarà

$$T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) .$$

Per calcolare i coefficienti $g_{12}^{(1)}$, $g_{12}^{(2)}$ faremo uso delle formule (vedi Nota citata, § 1):

$$g_{12}^{(1)} = \xi_{11}\left(\xi_{11}\frac{\partial \xi_{12}}{\partial \xi_1} + \xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \xi_1} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \xi_1}\right) + \xi_{21}\left(\xi_{11}\frac{\partial \xi_{12}}{\partial \xi_2} + \xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \xi_2} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \xi_2}\right)$$
$$+ \xi_{31}\left(\xi_{11}\frac{\partial \xi_{12}}{\partial \xi_3} + \xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \xi_3} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \xi_3}\right),$$

(5) Infatti

$$\xi_{13}\left(\frac{\partial \xi_{23}}{\partial \xi_3} - \frac{\partial \xi_{33}}{\partial \xi_2}\right) + \xi_{23}\left(\frac{\partial \xi_{33}}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \xi_{13}}{\partial \xi_3}\right) + \xi_{33}\left(\frac{\partial \xi_{13}}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \xi_{23}}{\partial \xi_1}\right) = (1 - \gamma_1^2)\, D \gtrless 0 .$$

$$g_{12}^{(2)} = \xi_{12}\left(\xi_{11}\frac{\partial\xi_{12}}{\partial\xi_1} + \xi_{21}\frac{\partial\xi_{22}}{\partial\xi_1} + \xi_{31}\frac{\partial\xi_{32}}{\partial\xi_1}\right) + \xi_{22}\left(\xi_{11}\frac{\partial\xi_{12}}{\partial\xi_2} + \xi_{21}\frac{\partial\xi_{22}}{\partial\xi_2} + \xi_{31}\frac{\partial\xi_{32}}{\partial\xi_2}\right)$$
$$+ \xi_{32}\left(\xi_{11}\frac{\partial\xi_{12}}{\partial\xi_3} + \xi_{21}\frac{\partial\xi_{22}}{\partial\xi_3} + \xi_{32}\frac{\partial\xi_{32}}{\partial\xi_3}\right)$$

e otterremo

$$g_{12}^{(1)} = \alpha_1\left(\xi_{21}\frac{\partial\xi_{22}}{\partial\theta} + \xi_{31}\frac{\partial\xi_{32}}{\partial\theta}\right)\frac{d\theta}{d\xi_1} = \alpha_1(\xi_{31}\xi_{22} - \xi_{21}\xi_{32})\,\mathrm{D} = -\mathrm{D}\alpha_1\gamma_1$$

$$g_{12}^{(2)} = \beta_1\left(\xi_{21}\frac{\partial\xi_{22}}{\partial\theta} + \xi_{31}\frac{\partial\xi_{32}}{\partial\theta}\right)\frac{d\theta}{d\xi_1} = \beta_1(\xi_{31}\xi_{22} - \xi_{21}\xi_{32})\,\mathrm{D} = -\mathrm{D}\beta_1\gamma_1,$$

quindi

$$\alpha = \mathrm{D}\alpha_1\sqrt{1-\alpha_1^2-\beta_1^2} \quad , \quad \beta = \mathrm{D}\beta_1\sqrt{1-\alpha_1^2-\beta_1^2}.$$

Poiché D , α_1 , β_1 sono arbitrarie (purché queste due ultime quantità abbiano la somma dei quadrati minore di 1), così potremo far sì che α e β abbiano valori arbitrarii.

In tutto ciò che segue noi supporremo di prendere D , γ_1 , e il radicale $\sqrt{1-\gamma_1^2}$ sempre *positivi*.

Riassumendo ciò che abbiamo fin qui trovato, possiamo dire che *il moto di un punto di coordinate* ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 *non soggetto ad alcuna forza e i cui vincoli sono rappresentabili mediante la equazione*

$$\xi_{13}\,d\xi_1 + \xi_{23}\,d\xi_2 + \xi_{33}\,d\xi_3 = 0$$

costituisce il tipo dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti del 2° ordine i più generali.

4. Per un punto qualunque A dello spazio conduciamo il piano σ_A corrispondente ed il piano parallelo al piano coordinato $\xi_2\,\xi_3$. La loro intersezione l_A formerà cogli assi ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 angoli i cui coseni saranno rispettivamente

$$\text{(A)} \qquad 0\,, \quad \frac{\pm\,\xi_{33}}{\sqrt{1-\gamma_1^2}} \quad , \quad \frac{\mp\,\xi_{23}}{\sqrt{1-\gamma_1^2}}.$$

Prenderemo come direzione positiva di l_A quella i cui coseni corrispondono ai segni superiori.

Ad ogni punto A dello spazio corrisponde una retta l_A, ed evidentemente tutte le l_A relative a punti equidistanti dal piano $\xi_2\,\xi_3$ sono parallele ed hanno lo stesso verso.

Se prendiamo due punti A , B le cui distanze dal piano $\xi_2\,\xi_3$ differiscono per ε, avremo che l'angolo

$$\widehat{l_A l_B} = \mathrm{D}\varepsilon,$$

quindi se $\varepsilon = (2h+1)\,\pi/\mathrm{D}$, ($h$ essendo intero) le rette l_A e l_B saranno parallele e avranno verso opposto, mentre se $\varepsilon = 2h\pi/\mathrm{D}$, esse saranno parallele e dello stesso verso.

Le rette l_A, al pari dei piani σ_A, hanno una notevole importanza in tutta la questione del moto.

§ 2. – Integrazione delle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti del secondo ordine.

1. Riprendiamo le equazioni generali (1).

Esse ammettono l'integrale delle forze vive

$$p_1^2 + p_2^2 = \text{cost.} = C^2.$$

Posto

$$p_1 = C \cos \varphi \quad , \quad p_2 = C \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad C > 0 ,$$

$$\alpha = -A \operatorname{sen} \varphi_0 \quad , \quad \beta = A \cos \varphi_0 \quad , \quad A = \left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right| = D\gamma_1 \sqrt{1 - \gamma_1^2}$$

le (1) si ridurranno alla sola equazione

$$\varphi' = AC \operatorname{sen} (\varphi - \varphi_0)$$

e integrando

$$AC (t - t_0) = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0)$$

t_0 essendo una costante arbitraria. Quindi

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) = e^{AC(t-t_0)}$$

$$\cos \varphi = - \frac{\cos \varphi_0 \operatorname{senh} AC (t - t_0) + \operatorname{sen} \varphi_0}{\cosh AC (t - t_0)}$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{- \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{senh} AC (t - t_0) + \cos \varphi_0}{\cosh AC (t - t_0)}$$

e finalmente

$$(5) \qquad \begin{cases} p_1 = - \dfrac{C}{A} \, \dfrac{\beta \operatorname{senh} AC (t - t_0) - \alpha}{\cosh AC (t - t_0)} \\[2ex] p_2 = \dfrac{C}{A} \, \dfrac{\alpha \operatorname{senh} AC (t - t_0) + \beta}{\cosh AC (t - t_0)} . \end{cases}$$

Abbiamo così le formule risolutive per tutti i moti del secondo ordine.

2. Passiamo ai moti del secondo ordine *permanenti*.

Otterremo le equazioni (cfr. Nota citata, § 7)

$$p_2 (\alpha p_1 + \beta p_2) = 0$$

$$p_1 (\alpha p_1 + \beta p_2) = 0$$

quindi

$$\alpha p_1 + \beta p_2 = 0$$

ovvero denotando con λ una quantità costante

$$(6) \qquad p_1 = -\lambda\beta \quad , \quad p_2 = \lambda\alpha .$$

Si hanno così tutti i moti permanenti del secondo ordine.

Per ricavare queste formule dalle formule generali (5) basterà in queste fare $t_0 = \pm \infty$.

Se facciamo $t_0 = + \infty$, avremo

$$\lim_{t_0=\infty} \frac{C}{A} \frac{\operatorname{senh} AC(t - t_0)}{\cosh AC(t - t_0)} = - \frac{C}{A};$$

invece facendo $t_0 = - \infty$ si avrà

$$\lim_{t_0=-\infty} \frac{C}{A} \frac{\operatorname{senh} AC(t - t_0)}{\cosh AC(t - t_0)} = \frac{C}{A}.$$

Quindi nel primo caso si trova

$$p_1 = -\lambda\beta \quad , \quad p_2 = \lambda\alpha \quad , \quad \lambda = - \frac{C}{A} < 0,$$

e nel secondo caso

$$p_1 = -\lambda\beta \quad , \quad p_2 = \lambda\alpha \quad , \quad \lambda = \frac{C}{A} > 0.$$

Mostreremo ora che le formule (6) corrispondono ai moti permanenti stabili quando si abbia $\lambda > 0$, e a moti permanenti instabili quando sia $\lambda < 0$.

3. A tal fine dimostreremo il teorema seguente:

Ogni moto spontaneo a caratteristiche indipendenti del secondo ordine tende indefinitamente a divenire un moto permanente individuato dalle formole

$$p_1 = - \frac{C}{A} \beta \quad , \quad p_2 = \frac{C}{A} \alpha.$$

Infatti dalle (5) segue

$$\lim_{t=\infty} p_1 = - \frac{C}{A} \beta \quad , \quad \lim_{t=\infty} p_2 = \frac{C}{A} \alpha.$$

È facile di qui dedurre che, dato un moto stazionario corrispondente a λ positivo, sarà sempre possibile peturbarlo in modo che p_1 e p_2 differiscano durante tutto il moto, dai valori costanti che queste quantità hanno nel moto stazionario, meno di numeri tanto piccoli quanto si vuole; e perciò basterà che le alterazioni fatte subire inizialmente ai valori di p_1 e p_2 siano inferiori ad un dato limite. Al contrario se consideriamo un moto stazionario corrispondente a λ negativo, la detta proprietà non si verificherà, perché per quanto poco si alterino in un istante qualunque i valori di p_1 e di p_2, purché non si mantengano proporzionali a $-\beta$ e ad α, il moto cesserà di essere stazionario ed i valori di p_1 e p_2 tenderanno indefinitamente verso $-C\beta/A$ e $C\alpha/A$.

Questa diversa proprietà che si verifica per i moti stazionarii secondoché λ è positivo o negativo, costituisce appunto ciò che assumeremo come *proprietà caratteristica delle loro stabilità ed instabilità* (6).

(6) Nella Nota che seguirà la presente daremo la definizione di stabilità ed instabilità dei moti stazionarii nel caso generale ed essa sarà informata allo stesso concetto (cfr. intanto *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii.* «Annali di Mat.», ser. 2, vol. XXIII, 1895, pp. 269–285; [in questo vol.: XV, pp. 173–186]).

4. Possiamo facilmente studiare l'andamento di un moto in prossimità di ridursi ad un moto stabile.

Perciò poniamo nelle (1)

$$p_1 = -\lambda\beta + \omega_1 \quad , \quad p_2 = \lambda\alpha + \omega_2 \qquad (\lambda > 0)$$

e consideriamo ω_1 e ω_2 come piccolissimi, in modo da poterne trascurare le potenze superiori alla prima per rapporto a queste quantità.

Le (1) diverranno allora

$$\omega_1' = -\lambda\alpha(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)$$
$$\omega_2' = -\lambda\beta(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)$$

e ponendo

$$\omega_1 = \psi_1 e^{\varrho t} \quad , \quad \omega_2 = \psi_2 e^{\varrho t} ,$$

avremo

$$\psi_1(\lambda\alpha^2 + \rho) + \psi_2(\lambda\alpha\beta) = 0$$
$$\psi_1(\lambda\alpha\beta) + \psi_2(\lambda\beta^2 + \rho) = 0$$

d'onde

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha^2 + \rho \,, & \lambda\alpha\beta \\ \lambda\alpha\beta \,, & \lambda\beta^2 + \rho \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\rho^2 + \lambda\rho(\alpha^2 + \beta^2) = 0 ,$$

da cui segue

$$\rho = \begin{cases} 0 \\ -\lambda(\alpha^2 + \beta^2) = -\lambda A^2 \end{cases}$$

quindi trascurando la radice nulla

$$\omega_1 = K\alpha e^{-\lambda A^2 t} \quad , \quad \omega_2 = K\beta e^{-\lambda A^2 t}$$

essendo K una costante arbitraria.

§ 3. - Caso tipico dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti del secondo ordine.

1. Riprendiamo in esame quel sistema il cui moto nel § 1 abbiamo assunto come il tipo dei moti spontanei del secondo ordine a caratteristiche indipendenti, e mostriamo come si possa compiere la integrazione ed ottenere un'immagine dell'andamento del moto stesso.

2. Dalle (3) e (4) segue

$$\theta' = D\xi_1' = D(\alpha_1 p_1 + \beta_1 p_2) . \tag{7}$$

Cominciamo dapprima a supporre che il moto sia permanente. Dalle (6) si dedurrà

$$\theta' = 0$$

onde $\theta = \text{cost}$. E le (4) diverranno

$$\xi'_1 = 0$$
$$\xi'_2 = \lambda D \gamma_1 \xi_{33}$$
$$\xi'_3 = -\lambda D \gamma_1 \xi_{23}$$

e integrando

$$\xi_1 - \xi_1^0 = 0 \quad , \quad \xi_2 - \xi_2^0 = \lambda D \gamma_1 \xi_{33} t \quad , \quad \xi_3 - \xi_3^0 = -\lambda D \gamma_1 \xi_{23} t$$

ove $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ rappresentano le coordinate della posizione A occupata dal mobile al tempo $t = 0$. Il moto è dunque uniforme ed avviene sopra una retta l_A.

Esso avrà luogo nel verso positivo o in quello negativo, secondoché λ è positivo o negativo.

Possiamo dunque concludere:

I moti permanenti stabili sono moti uniformi nel verso positivo delle l_A e i moti permanenti instabili sono quelli nel verso negativo delle rette stesse.

3. Supponiamo che il moto non sia permanente, allora tenendo conto delle (5) si deduce dalla (7)

$$\theta' = \frac{AC}{\gamma_1 \cosh AC (t - t_0)} .$$

Con una quadratura avremo dunque θ in funzione del tempo; quindi mediante tre nuove quadrature otterremo per mezzo delle (4) ξ_1, ξ_2, ξ_3 espresse pure in funzione del tempo.

4. Risparmiamoci però queste operazioni e riconosciamo l'andamento del moto nella maniera seguente:

Denotiamo con g l'angolo che in ogni istante la direzione del moto del punto forma colla direzione positiva della retta l_A che passa pel punto A occupato nell'istante stesso dal mobile. Avremo (vedi (A))

$$\cos g = \frac{\xi'_2}{\sqrt{\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2}} \frac{\xi_{33}}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}} - \frac{\xi'_3}{\sqrt{\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2}} \frac{\xi_{23}}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}}$$

$$= \frac{(\xi_{21}\xi_{33} - \xi_{31}\xi_{23}) p_1 + (\xi_{22}\xi_{23} - \xi_{32}\xi_{33}) p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\sqrt{1 - \gamma_1^2}} = \frac{\alpha_1 p_2 - \beta_1 p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\sqrt{1 - \gamma_1^2}}$$

e applicando le (5)

$$\cos g = \frac{\operatorname{senh} AC (t - t_0)}{\cosh AC (t - t_0)}$$

e quindi

$$\operatorname{sen} g = \frac{1}{\cosh AC (t - t_0)} . \tag{8}$$

Da queste formole si deduce

$$dg = - \frac{AC\, dt}{\cosh AC (t - t_0)} = - \gamma_1 d\theta$$

onde integrando

$$\theta - \theta_0 = -\frac{1}{\gamma_1}(g - g_0)$$

chiamando θ_0 e g_0 i valori di θ e g al tempo $t = 0$.

Ne segue

$$\xi_1 - \xi_1^0 = \frac{1}{D\gamma_1}(g_0 - g). \tag{9}$$

5. Serviamoci ora delle due formule trovate (8) e (9). La prima mostra che *l'angolo g va indefinitamente decrescendo*, la seconda dà la proiezione sull'asse ξ_1 del cammino percorso dal punto mobile. *Il limite verso cui tenderà questa proiezione col crescere indefinito del tempo sarà*

$$\frac{g_0}{D\gamma_1}.$$

6. La minima distanza fra l'asse z e la retta l_A su cui si trova il punto mobile al tempo t, sarà (vedi (A))

$$r = \frac{\xi_{23}\,\xi_2 + \xi_{33}\,\xi_3}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}}$$

quindi

$$r' = \frac{\xi_{23}\,\xi_2' + \xi_{33}\,\xi_3' + \xi_2\,\xi_{23}' + \xi_3\,\xi_{33}'}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}}$$

e con facili calcoli

$$r' = -\frac{\gamma_1^2}{A}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}}(\xi_{23}\,\xi_3 - \xi_{33}\,\xi_2)\frac{d\theta}{dt}$$

onde integrando

$$r - r_0 = -\frac{\gamma_1^2}{A}(\theta - \theta_0) + \int_0^t \frac{\xi_{23}\,\xi_3 - \xi_{33}\,\xi_2}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}} \cdot \frac{AC}{\gamma_1}\,\frac{1}{\cosh AC\,(t - t_0)}\,dt$$

essendo r_0 il valore di r per $t = 0$.

Osserviamo ora che ξ_{23} e ξ_{33} sono minori di 1 e $|\xi_2'|$ e $|\xi_3'|$ sono quantità sempre inferiori ad un valore finito. Potremo dunque porre

$$\frac{\xi_{23}\,\xi_3 - \xi_{33}\,\xi_2}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}}\,\frac{AC}{\gamma_1} = Mt$$

essendo M una quantità inferiore ad un numero finito.

Ne segue che

$$\int_0^t Mt\,\frac{1}{\cosh AC\,(t - t_0)}\,dt \tag{10}$$

sarà sempre inferiore ad un numero finito qualunque sia il valore di t.

Potremo dunque concludere che *il punto mobile non potrà mai raggiungere delle rette l_λ che distano dall'asse z al di là di un certo limite.* Evidentemente col crescere indefinito di t_0 l'integrale (10) e quindi $r - r_0$ decresceranno indefinitamente.

7. Dalle fatte considerazioni si possono dedurre facilmente altre proprietà, oltre quelle già stabilite (§ 2), relative alle perturbazioni dei moti permanenti stabili ed instabili. Così nel caso dei moti stabili, purché la perturbazione iniziale sia inferiore ad un limite convenientemente scelto, il moto perturbato subirà durante tutto il tempo una deviazione dalla direzione del moto permanente, inferiore ad un numero tanto piccolo quanto si vuole, e il moto avrà luogo secondo una traiettoria che si avvicina indefinitamente ad una retta l_λ la cui distanza dalla traiettoria del moto non perturbato sarà inferiore ad un numero piccolo ad arbitrio.

Infine nel caso di un moto instabile le dette particolarità pel moto perturbato non si verificheranno.

§ 4. – Moti spontanei a caratteristiche indipendenti d'ordine ν con $\nu - 2$ integrali lineari.

1. Se il moto è di ordine ν e si conoscono $\nu - 2$ integrali lineari indipendenti, le equazioni differenziali si riconducono alla forma (vedi Nota citata, § 8, equaz. (H'))

$$(11) \qquad \begin{cases} z_1' = z_2(M_{12}^{(1)} z_1 + M_{12}^{(2)} z_2 + N_{12}) \\ z_2' = z_1(M_{21}^{(1)} z_1 + M_{21}^{(2)} z_2 + N_{21}) \end{cases}$$

quindi ponendo

$$M_{12}^{(1)} = -\alpha \quad , \quad M_{12}^{(2)} = -\beta \quad , \quad N_{12} = -\gamma$$

avremo

$$z_1' = -z_2(\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma)$$
$$z_2' = z_1(\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma).$$

2. Ci limiteremo a mostrare come il sistema si riconduca alle quadrature, giacché l'effettivo calcolo non presenta alcuna difficoltà analitica.

Dall'integrale delle forze vive segue

$$z_1^2 + z_2^2 = \text{cost.} = C^2,$$

onde potremo porre

$$z_1 = C \cos \varphi \quad , \quad z_2 = C \operatorname{sen} \varphi$$

onde le (11) si ridurranno alla sola equazione

$$\varphi' = C(\alpha \cos \varphi + \beta \operatorname{sen} \varphi) + \gamma$$

e ponendo

$$\alpha = -A \operatorname{sen} \varphi_0 \quad , \quad \beta = A \cos \varphi_0 \quad , \quad A = \left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right|$$

avremo

$$\varphi' = \mathrm{CA}\,\mathrm{sen}\,(\varphi - \varphi_0) + \gamma$$

d'onde

$$t - t_0 = \int \frac{d\varphi}{\mathrm{CA}\,\mathrm{sen}\,(\varphi - \varphi_0) + \gamma}$$

denotando con t_0 una costante arbitraria.

Possiamo quindi concludere: *Se si conoscono* $\nu - 2$ *integrali lineari, le* ν *caratteristiche si esprimeranno mediante funzioni trigonometriche o esponenziali del tempo.*

È notevole osservare che il presentarsi delle une o delle altre funzioni dipenderà dall'essere $C^2A^2 - \gamma^2$ minore o maggiore di zero; *l'andamento del moto risulterà quindi di natura del tutto diversa secondo il segno del binomio* $C^2A^2 - \gamma^2$.

§ 5. – Moti spontanei a caratteristiche indipendenti d'ordine ν con $\nu - 3$ integrali lineari ed un integrale quadratico.

1. Se per un sistema d'ordine ν si conoscono $\nu - 3$ integrali indipendenti di primo grado ed uno di secondo grado e se questo ha l'equazione caratteristica con radici semplici, potremo scrivere le equazioni del moto sotto la forma (vedi Nota citata, § 10)

$$p_1' = e_{123} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_2, p_3)}$$

$$p_2' = e_{231} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_3, p_1)}$$

$$p_3' = e_{312} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_1, p_2)},$$

in cui

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{3}{}_r \sum_{1}^{3}{}_s \mathrm{E}_{rs}\, p_r\, p_s + \mathrm{cost.}$$

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{3}{}_r \sum_{1}^{3}{}_s \Lambda_{rs}\, p_r\, p_s + \Sigma_h \Lambda_h p_h$$

o anche scrivendo

$$f_1 = \frac{1}{2} \sum_{1}^{3}{}_r \sum_{1}^{3}{}_s \mathrm{E}_{rs}\, p_r\, p_s \quad , \quad f_2 = e_{123}\,\mathrm{F},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p_2, p_3)}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p_3, p_1)}$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p_1, p_2)}.$$

2. Tenendo presente un risultato che abbiamo stabilito nella Nota: *Sopra un sistema di equazioni differenziali* (7), possiamo concludere che gl'integrali delle equazioni precedenti sono funzioni ellittiche di t, quindi poiché le ν caratteristiche sono funzioni lineari delle p_1, p_2, p_3, così avremo il teorema: *Allorché si conoscono* $\nu - 3$ *integrali lineari ed un integrale quadratico la cui equazione caratteristica ha radici diseguali, le* ν *caratteristiche si potranno esprimere come funzioni ellittiche del tempo.*

Per la effettiva determinazione delle funzioni incognite rimandiamo alla Nota che abbiamo ora citata.

§ 6. – Teorema generale sulla integrazione per serie delle equazioni del moto spontaneo di un sistema a caratteristiche indipendenti.

1. Cominciamo dallo stabilire il seguente

Lemma I. – *Se*

$$|a_{sk}^{(r)}| < \mathrm{A}$$

e i valori p_i° *delle* p_i *per* $t = t_0$ *sono tali che*

$$|p_i^\circ| \leq \mathrm{P}$$

gl'integrali delle equazioni differenziali

$$p'_s = \sum_{1\,r}^{\nu} \sum_{1\,k}^{\nu} a_{sk}^{(r)} p_r p_k \qquad (s = 1, 2, \cdots, \nu) \tag{12}$$

sono funzioni analitiche olomorfe nel piano della variabile complessa t entro il cerchio di raggio

$$r = \frac{1}{4\nu^2 \mathrm{AP}}$$

avente per centro il punto $t = t_0$.

Infatti osserviamo che i secondi membri delle (12) sono funzioni olomorfe per tutti i valori delle p_i tali che

$$|p_i - p_i^\circ| < b$$

essendo b un numero qualsiasi. I valori che assumono i moduli dei secondi membri, mentre le p_i soddisfano alle diseguaglianze precedenti saranno evidentemente inferiori a

$$\mathrm{M} = \nu^2 \mathrm{A} (\mathrm{P} + b)^2.$$

(7) « Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXX, 1895, pp. 445–454 [in questo vol.: VIII, pp. 122–128].

Teniamo ora conto che i secondi membri delle (12) sono indipendenti da t, quindi per un ben noto teorema [8] avremo che gl'integrali p_i saranno funzioni olomorfe della variabile complessa t entro un cerchio di raggio

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{\nu^2 A (P + b)^2} .$$

Il valore massimo di questo rapporto si avrà per $b = P$, onde potremo assumere come raggio del cerchio entro cui le p_i sono olomorfe

$$r = \frac{1}{4 \nu^2 AP} .$$

2. Lemma II. – *Se i numeri reali* $p_1^0, p_2^0, \cdots, p_\nu^0$, *sono i valori di* $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ *per il valore reale* $t = t_0$, *gl'integrali delle* (12) *saranno funzioni olomorfe in tutta la striscia indefinita del piano complesso t compresa fra le due parallele all'asse reale distanti da questo di*

$$\frac{1}{4 \nu^2 A \sqrt{p_1^{0^2} + p_2^{0^2} + \cdots + p_\nu^{0^2}}} .$$

Infatti siccome le (12) ammettono l'integrale

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_\nu^2 = \text{cost.},$$

così per ogni valore reale di t, avremo

$$| p_i | \leq \sqrt{p_1^{0^2} + p_2^{0^2} + \cdots + p_\nu^{0^2}}$$

onde applicando il lemma precedente, si avrà, facendo percorrere a t tutto l'asse reale, che le p_i si manterranno olomorfe entro tutti i cerchi aventi il centro sull'asse reale e aventi il raggio eguale a

$$r = \frac{1}{4 \nu^2 A \sqrt{p_1^{0^2} + p_2^{0^2} + \cdots + p_\nu^{0^2}}}$$

il che dimostra la proposizione.

3. Dai due lemmi stabiliti si deduce mediante una osservazione del POINCARÉ che le p_i saranno sviluppabili in serie ordinate per le potenze di

$$z = \frac{e^{\pi t / 2r} - 1}{e^{\pi t / 2r} + 1}$$

e lo sviluppo sarà valido per tutti i valori di t fra $-\infty$ e $+\infty$; da cui segue il teorema:

(8) E. PICARD, *Traité d'analyse*, T. II, p. 312.

Se la forza viva iniziale, nel moto spontaneo di un sistema a caratteristiche indipendenti d'ordine ν *è* $T_0/2$ *le caratteristiche potranno esprimersi in funzione del tempo mediante serie di potenze di*

$$z = \frac{e^{2\pi\nu^2 A \sqrt{T_0}\, t} - 1}{e^{2\pi\nu^2 A \sqrt{T_0}\, t} + 1},$$

essendo A *una quantità più grande delle* $|a_{sk}^{(r)}|$.

I coefficienti si calcoleranno con operazioni razionali da eseguirsi sui valori iniziali delle p_i *e sui coefficienti* $a_{sk}^{(r)}$.

Questo teorema mostra che la questione della determinazione effettiva delle caratteristiche per ogni valore del tempo è completamente risoluta.