XXVIII.

SUL FENOMENO DELLE « SEICHES »

Conferenza tenuta al Congresso della Società italiana di Fisica in Torino il 23 settembre 1898 (*).

Sono incaricato di rivolgere ai cultori della fisica in Italia un invito ed una preghiera da parte del prof. FOREL dell'Università di Losanna e non saprei trovare per ciò una occasione più propizia di questa riunione della nostra Società.

Sono ormai classiche le ricerche compiute da questo chiaro professore sul lago Lemano, che egli studiò sotto tutti gli aspetti con rara perseveranza e con larga dottrina (**).

Fra i fatti più curiosi e nello stesso tempo più oscuri che si presentarono nel corso dei suoi studii è da annoverare il fenomeno delle *seiches*. Gli abitanti delle rive del lago di Ginevra conoscono e chiamano da varii secoli con tale nome certe singolari variazioni di livello dell'acqua del lago. Senza una causa apparente essi vedono spesso elevarsi l'acqua sulla riva di vari centimetri, alcune volte di più decimetri con un moto lento che a secondo dei casi può durare cinque minuti, un quarto d'ora, una mezzora. . . Poi la vedono abbassarsi colla stessa lentezza al disotto del livello primitivo, poi nuovamente alzarsi e così di seguito. L'aspetto di questi movimenti è analogo a quello di una marea di debole ampiezza e di breve durata.

Essi fissarono l'attenzione dei fisici e diedero luogo a numerosi, varii e dirò anche ai più strani tentativi di spiegazione. Non ne starò ad esporre la storia, che è pure interessante, ma che mi condurrebbe troppo in lungo. Dirò soltanto che a questo studio, oltre il nome del FOREL sono legati quelli di altri fisici di grande valore, come DE SAUSSURE, VAUCHER, PLANTAMOUR, SARASIN, DUFOUR, ecc.

La spiegazione che fino dal 1873 il FOREL ha dato e che ha confortato con numerose e pazienti osservazioni consiste in ciò: nell'ammettere che le

(*) Di questa conferenza fu pubblicato soltanto un sunto, redatto o, quanto meno, corretto dallo stesso VOLTERRA, nel « Nuovo Cimento » (ser. IV, vol. VIII, 1898, pp. 270–272). Il testo completo fu trovato, dopo la scomparsa dell'Autore, fra i Suoi manoscritti, insieme con una Nota (redatta in francese, forse perché destinata al prof. FOREL) sulla trattazione matematica del problema. Poiché la conferenza del VOLTERRA ebbe al suo tempo larga risonanza e diede occasione a interessanti ricerche di altri matematici e fisici, si è ritenuto opportuno pubblicare tali manoscritti inediti. [N. d. R.]

(**) Nel sunto suaccennato del « Nuovo Cimento » si trova citato del FOREL il libro: *Le Léman. Monographie limnologique*. Losanna, vol. I, 1892; vol. II, 1895. [N. d. R.].

seiches siano dovute ad una oscillazione dell'acqua da una estremità all'altra del lago con un moto ritmico isocrono e di ampiezza decrescente paragonabile in tutto ad un moto pendolare o ad un moto dovuto alla sovrapposizione di più movimenti pendolari. La chiave di questa spiegazione è stata fornita dal suo scopritore dall'esame dei periodi di vibrazione dell'acqua, dalla loro costanza ed indipendenza dalla ampiezza delle vibrazioni, ossia dalla maggiore o minore grandezza delle *seiches*.

A questo proposito dirò che esse a Ginevra producono in media un dislivello di circa 40 cm, ma ve ne sono anche di molto più grandi come quella celebre del 3 ottobre 1841, in cui il dislivello ha raggiunto quasi i due metri.

Chi di voi ricorda una di quelle incantevoli gite sul Lemano o abbia semplicemente dinanzi la carta di esso, ricorderà che il senso longitudinale del lago va da Ginevra a Chillon, mentre quello trasversale va dalla costa Svizzera a quella Savoiarda, cioè da Morges ad Evian. Orbene le *seiches* si distinguono in due categorie: in quelle longitudinali ed in quelle trasversali. Le prime oscillano da Chillon a Ginevra; le seconde da Morges ad Evian.

In ciascuna di queste categorie il prof. FOREL ha poi distinto:

1° Le *seiches* uninodali che possiedono un sol nodo, e due ventri alle estremità. In esse l'acqua si eleva ad una estremità del lago, mentre si abbassa all'altra. Nel mezzo vi è un punto morto o un modo in cui l'acqua non cambia di livello.

2° Le *seiches* binodali con due nodi e tre ventri. In esse l'acqua si eleva contemporaneamente alle due estremità, mentre si abbassa nel mezzo o viceversa. Sono questi i tre ventri. Fra essi stanno in posizioni intermedie i due nodi.

3° Le *seiches* miste o *dicrote* nelle quali si ha la sovrapposizione dei due moti dovuti a quelli uninodali e binodali.

È indubitato che altre, anzi infiniti altri tipi di moti debbono sussistere, ma essi sfuggono in generale alla osservazione.

Per ricordare i successi ottenuti in proposito, dirò che il periodo di vibrazione di una *seiche* longitudinale uninodale è di 73 minuti, di una *seiche* longitudinale binodale è di 35 minuti, di una *seiche* trasversale uninodale è di 10 minuti.

Quali sono ora le cause di tali vibrazioni? In altri termini, donde proviene il primitivo impulso che produce le vibrazioni che per l'inerzia poi si conservano e solo si smorzano lentamente in virtù dell'attrito?

Esso si ha nei moti dell'atmosfera. Il principiare di una *seiche* coincide col rompersi dell'equilibrio dell'aria sovrastante il lago. Un uragano cagiona il primitivo dislivello locale dell'acqua susseguito dalle oscillazioni di essa che posson durare fin tre, quattro o cinque giorni.

È in generale una nuova *seiche* che nasconde le ultime oscillazioni di quella che l'ha preceduta.

Ma il fenomeno non è proprio del solo lago di Ginevra.

Un esame attento fece riconoscere al FOREL e ad altri fisici e geografi dei moti perfettamente analoghi in tutti i laghi, in tutti gli stagni, qualunque ne fossero le dimensioni. Dei moti analoghi a quelli delle *seiches* si poterono anche riscontrare nelle acque del mare e si poterono sceverare dai moti dovuti alle maree.

Uno studio sistematico delle *seiches* dei laghi svizzeri è stato compiuto dal FOREL coll'aiuto di altri scienziati. Ogni lago ha i propri periodi di vibrazione ben definiti e determinati; dai grandi laghi di Costanza e di Zurigo al piccolo lago di Joux nascosto fra le foreste del Giura. La grandezza dei periodi è intimamente legata alla forma delle rive dei laghi, àlla loro profondità, alle singolarità del fondo.

È ora uno studio sistematico dei laghi italiani o di uno o di alcuni di essi che il FOREL invita e prega i fisici italiani di fare. Quali sono le particolarità delle vibrazioni che si hanno nel lago di Como la cui forma presenta la singolarità di dividersi in due rami? quali le vibrazioni dei piccoli laghi dell'Italia centrale? Come restano verificati o preveduti dai dati del calcolo quelli dell'osservazione? In che relazione stanno questi coi risultati sperimentali che possono ottenersi con opportune ricerche di laboratorio?

Le difficoltà di un tale studio per le cui particolarità è da rimandare alla grande opera del FOREL sul Lemano non sono molte. Gli apparecchi necessari sono semplicemente dei limnografi, analoghi a quelli di WEBER e di GUTHRIE.

Vuole ora la nostra Società promuovere questo studio od incoraggiare qualcheduno ad intraprenderli? Se la Società credesse di emettere un voto in questo senso potrebbe colla sua autorità e col suo aiuto, riunendo pure l'Ufficio centrale di Metereologia e Geodinamica di cui fa parte il nostro illustre presidente, sia agevolare il compito di quelli che se ne occuperebbero, sia coordinarne i risultati.

E giacché poco fa ho parlato del confronto del calcolo colla osservazione mi si permettano poche parole a questo proposito.

La questione dal punto di vista dell'idrodinamica teorica presenta molto interesse.

È facile porre in equazione il problema, sia partendo dalle equazioni dell'idrodinamica del tipo di LAGRANGE, sia di quello di EULERO. Il problema delle vibrazioni di un liquido pesante ha formato l'oggetto di una antica ricerca di RODOLFO MERIAN pubblicata a Basilea nel 1828. Questa ricerca à stata riprodotta nel 1886 nei «Math. Annalen» dal VON DER MÜHL di Lipsia, nipote del MERIAN, ed esposta in forma moderna e facilmente accessibile. Il caso però a cui il metodo del MERIAN si presta è quello in cui le pareti del recipiente contenente il liquido sono verticali, mentre il fondo ne è orizzontale; anzi il caso che più particolarmente svolge il VON DER MÜHL è quello in cui il fondo oltre a ciò sia rettangolare.

È delle formule relative a questo caso che il FOREL si è valso principalmente più che delle altre soluzioni, fra le quali è da ricordare quella del KIRCHHOFF.

Però è evidente che le forme dei laghi non sono mai tali che le loro sezioni verticali siano dei rettangoli. Esse si scostano sempre più o meno da questo tipo, ed è quindi interessante di ricercare una soluzione per quanto è possibile generale.

Quali sono le difficoltà analitiche che si incontrano ed i mezzi atti a superarli? È possibile spiegarsi con un piccolo numero di formule che mettano del resto in evidenza le relazioni fra il fenomeno delle *seiches* e quello di vibrazione dei corpi elastici. Si rappresenti con S lo spazio occupato dall'acqua nello stato di equilibrio, il quale è limitato dal fondo σ e dalla superficie libera orizzontale ω. Il problema si riduce a trovare una funzione $\mathfrak{U}$, la quale soddisfi in S alla equazione differenziale

$$\Delta^2 \mathfrak{U} = 0,$$

sopra σ alla condizione

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} = 0$$

essendo n la normale; e sopra σ alla relazione

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} = k \mathfrak{U},$$

in cui z rappresenta la verticale. Dando a k un valore arbitrario, in generale queste condizioni non ammettono altra soluzione che $\mathfrak{U} = 0$; ma per certi valori particolari di k, che possono chiamarsi i *valori eccezionali*, esistono delle soluzioni diverse da zero. Sono questi valori eccezionali di k che forniscono i periodi di vibrazione dell'acqua, giacché essi si ottengono mediante la formula

$$T = \pi \sqrt{\frac{k}{g}}.$$

Chiunque abbia presente la teoria delle vibrazioni delle membrane elastiche ne riconosce immediatamente l'analogia con questo problema.

Nella teoria delle membrane elastiche infatti si tratta di trovare una funzione che soddisfi l'equazione.

$$\Delta_2 \varphi + k^2 \varphi = 0$$

e che si annulli al contorno. I valori di k, per cui esistono delle soluzioni non nulle, sono i valori eccezionali da cui si ricavano i periodi di vibrazione della membrana. Ora la ricerca, lo studio e la dimostrazione dell'esistenza di questi valori eccezionali per la membrana ha costituito fino a pochi anni fa una delle questioni più oscure, più intricate e più ardue della fisica matematica, in cui si sono esercitati molti dei più abili geometri viventi. Esisteva un così detto principio di RAYLEIGH per la esistenza dei valori eccezionali, ma era ben lungi dall'esser rigoroso. La dimostrazione esatta dell'esistenza del periodo più lungo si deve a SCHWARZ con un metodo ingegnosissimo che ha creato un nuovo ramo di ricerche analitiche. Ma la trattazione completa si deve al POINCARÉ, che la ottenne dopo vari tentativi in più direzioni.

La ragione del successo del suo metodo consiste in ciò: nel considerare k come una variabile complessa e studiare φ come una funzione della variabile complessa k. La funzione è uniforme; i poli di essa sono reali e corrispondono ai valori eccezionali. Ora è in via analoga che, nel caso generale, può studiarsi il problema corrispondente delle vibrazioni del liquido pesante. Così ho dimostrato, e lo si vede del resto facilmente, che se $\mathfrak{U}$ si considera come funzione della variabile complessa k, i poli di $\mathfrak{U}$ sono valori eccezionali.

NOTE

Le problème qu'il faut chercher de résoudre est de déterminer toutes les possibles périodes de vibration de l'eau du lac en connaissant la forme du bassin. On peut résoudre cette question d'une manière tout à fait rigoureuse et simple, comme on peut déterminer toutes les périodes de vibration d'une membrane élastique. Voici de quelle manière.

I.

Commençons par écrire les équations différentielles de l'hydrodynamique de LAGRANGE

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial x_0}+\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{\partial y}{\partial x_0}+\dfrac{d^2z}{dt^2}\dfrac{\partial z}{\partial x_0}=\dfrac{\partial\left(V-\dfrac{P}{\rho}\right)}{\partial x_0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Supposons que les déplacements des molécules de l'eau soient très petites et désignons ces déplacements par ξ, η, ζ. On aura

$$x = x_0 + \xi \quad , \quad y = y_0 + \eta \quad , \quad z = z_0 + \zeta\,;$$

et si on suppose de négliger les termes de 2^d ordre, les équations de LAGRANGE déviendront

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial\left(V-\dfrac{P}{\rho}\right)}{\partial x},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\partial\left(V-\dfrac{P}{\rho}\right)}{\partial y},$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\partial\left(V-\dfrac{P}{\rho}\right)}{\partial z}.$$

Posons $V - P/\rho = \varphi$, on aura

$$(1) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad , \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad , \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

et, à cause de l'incompressibilité du liquide,

$$(2) \qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0\,.$$

Sur la surface où le liquide est en contact avec la paroi fixe on aura

$$(3) \qquad \xi\cos\nu x + \eta\cos\nu y + \zeta\cos\nu z = 0\,,$$

ν étant la normale à la paroi.

Sur la surface libre, en y supposant la pression constante on aura

$$V - \frac{P}{\rho} = -g\zeta, \tag{4}$$

z étant l'axe vertical et g étant la constante de la gravité.

II.

Considérons maintenant les vibrations harmoniques du fluide. Il faudra poser

$$\xi = X\cos nt \quad , \quad \eta = Y\cos nt \quad , \quad \zeta = Z\cos nt \quad , \quad \varphi = \psi\cos nt$$

où X, Y, Z, ψ sont des fonctions indépendantes du temps.

Les équations (1), (2), (3), (4) deviendront

$$-n^2 X = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad , \quad -n^2 Y = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad , \quad -n^2 Z = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{1 a}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \tag{2 a}$$

$$X\cos \nu x + Y\cos \nu y + Z\cos \nu z = 0, \tag{3 a}$$

$$\psi = -gZ; \tag{4 a}$$

d'où l'on tire, en posant $k = g/n^2$,

$$\Delta^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0, \tag{2 b}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos \nu x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos \nu y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cos \nu z = 0, \tag{3 b}$$

$$\psi = a\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{4 b}$$

La fonction ψ doit donc satisfaire aux trois équations précédentes.

Soit S le domaine occupé par l'eau, σ la paroi fixe, ω la surface libre. En négligeant les perturbations de la surface dues aux vibrations du liquide, il faudra la supposer horizontale, c'est pourquoi il faudra chercher une fonction ψ qui satisfait en S à l'équation (2 *b*), sur σ à l'équation (3 *b*), sur le plan ω à l'équation (4 *b*).

Le nombre k ne peut pas être quelconque; mais il y aura un ensemble infini de valeurs

$$k_0, k_1, k_2, \ldots$$

pour lesquels les équations (2 *b*), (3 *b*), (4 *b*) pourront être vérifiées.

Ce sont les *valeurs exceptionnelles de k*. Soit k_i une de ces valeurs; alors à cause de l'équation (5) on aura la période correspondante de la vibration de la masse fluide donnée par la formule

$$T_i = \pi\sqrt{\frac{k_i}{g}}.$$

III.

Le théorème que nous venons de démontrer est le suivant:

Toutes les périodes de vibration de la masse fluide pourront s'obtenir en cherchant toutes les valeurs de k (valeurs exceptionnelles) pour lesquelles on a simultanément les trois équations suivantes

$$
(6) \qquad \left\{
\begin{array}{ll}
\Delta^2 \psi = 0 & \text{sur } S \\
\dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \sigma \\
\psi = k \dfrac{\partial \psi}{\partial z} & \text{sur } \omega \, ,
\end{array}
\right.
$$

et en écrivant après la période T *par la formule*

$$
(7) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{k}{g}} \, .
$$

Nous allons démontrer là-dessus quelques théorèmes:

1) *Les valeurs exceptionnelles ne peuvent pas être des nombres négatifs.*

En effet des équations (6)

$$
0 = \int_S \psi \Delta^2 \psi dS = \int_\sigma \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma + \int_\omega \psi \frac{\partial \psi}{\partial z} d\omega - \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \right\} dS
$$

$$
= k \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 d\omega - \int_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \right] dS
$$

et cette équation serait absurde si k était négatif.

2) *Si* ψ_1 *et* ψ_2 *sont deux fonctions correspondantes aux valeurs exceptionnelles* k_1 *et* k_2, *on aura*

$$
\int_\omega \psi_1 \, \psi_2 \, d\omega = 0 \, .
$$

En effet on aura

$$
\Delta_2 \psi_1 = 0 \, , \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} = 0 \quad , \quad \psi_1 = k_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z}
$$

et relations analogues pour ψ_2, d'où, par le théorème de GREEN,

$$
\int_\sigma \left(\psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} - \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_\omega \left(\psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right) d\sigma = 0
$$

c'est à dire

$$
0 = \int_\omega \left(\psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right) d\omega = \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \int_\omega \psi_1 \, \psi_2 \, d\omega \, ,
$$

d'où l'on tire, k_1 n'étant pas égale à k_2,

$$
\int_\omega \psi_1 \, \psi_2 \, d\omega = 0 .
$$

3) *Les valeurs exceptionnelles ne peuvent pas être des nombres imaginaires ni complexes.*

En effet si $k_1 = k' + ik''$ était une valeur exceptionnelle complexe il y aurait aussi la valeur exceptionnelle conjugueé $k_2 = k' - ik''$ et si $\psi_1 = \psi' + i\psi''$ était la fonction correspondante à k_1, alors $\psi_2 = \psi' - i\psi''$ serait la fonction correspondante à k_2. On aurait donc à cause du théorème précédent

$$
0 = \int (\psi' + i\psi'') (\psi' - i\psi'') \, d\omega = \int (\psi'^2 + \psi''^2) \, \omega \, ,
$$

équation qui est absurde.

On peut donc conclure

Toutes les valeurs exceptionnelles sont des nombres réels et positifs.

IV.

Par le premier thécrème du paragraphe précédent on a reduit la question de la vibration de la masse fluide à une question tout à fait analogue à celle de la vibration d'une membrane. Rappelons la théorie de la membrane élastique. Il faut chercher les nombres k tels que l'on ait sur la surface de la membrane

$$\Delta^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

et au contour $\psi = 0$.

Les périodes de vibration se déduisent du nombre k.

La méthode de POINCARÉ por obtenir les nombres k consiste à intégrer l'équation différentielle

$$\Delta^2 \psi + k\psi + \mathfrak{F} = 0,$$

ψ étant nul au contour et $\mathfrak{F}$ étant une fonction arbitraire.

Si on appelle l'intégrale $[k, \mathfrak{F}]$ et on la regarde comme une fonction de la variable complexe k, les pôles de cette fonction sont les valeurs de k qu'on cherche.

Nous pouvons chercher d'employer la méthode de POINCARÉ dans le cas de la vibration de la masse fluide.

Intégrons l'équation

$$\Delta^2 \theta = 0 \qquad \text{sur } S,$$

avec les conditions au contour

$$\frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{sur } \sigma,$$

$$\theta - k \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mathfrak{F} = 0 \qquad \text{sur } \omega,$$

$\mathfrak{F}$ étant une fonction arbitraire, et envisageons l'intégrale comme une fonction de la variable complexe k.

Nous allons démontrer le théoréme: *Si l'intégrale a un pôle k', ce pôle est une valeur exceptionnelle de k.*

En effet si k' est pôle on pourra écrire

$$\theta = \frac{\Theta(k, x, y, z)}{(k - k')^h}$$

h étant un nombre entier. On aura donc

$$\Delta^2 \Theta = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \nu} = 0,$$

$$\Theta - k \frac{\partial \Theta}{\partial z} + (k - k')^h \mathfrak{F} = 0.$$

Or on pourra toujours s'arranger de manière que Θ ne s'annulle pas pour $k = k'$. En faisant $k = k'$ il viendra

$$\Delta^2 \Theta = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \nu} = 0,$$

$$\Theta - k' \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0,$$

ce qui prouve que k' est une valeur exceptionnelle.

On voit par là la *liaison entre la recherche des pôles de la fonction* θ *et les périodes de vibration de la masse fluide.*

On pourra chercher les pôles par la méthode des approximations successives SCHWARZ–PICARD–POINCARÉ.

V.

Comme vérification des formules (6) on peut retrouver la formula (3) de la page 75 du second volume du livre de M. FOREL. Supposons le bassin rectangulaire et cherchons les vibrations perpendiculaires au côté y du bassin.

Posons

$$\psi = \cos \lambda x e^{\mu z}.$$

La première des équations (6) nous donne $\lambda^2 = \mu^2$; c'est pourquoi

$$\psi = \cos \lambda x e^{\lambda z}$$

et la seconde équation (6), si la largeur du bassin est l, donne

$$\sin \lambda l = 0,$$

d'où pour les vibrations les plus lentes

$$\lambda = \frac{\pi}{l}.$$

La troisième des équations (6) nous donne alors

$$1 = k\lambda,$$

d'où

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{l}{\pi}$$

et la formule (7)

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{\pi g}} = \sqrt{\frac{\pi l}{g}}.$$

Morges, 12 Août 1898.