XXXII.

SULLE FUNZIONI POLIARMONICHE (*).

«Atti Ist. Ven.», t. LVII, 1898-99, pp. 233-235.

...L'interessante principio della inversione per raggi vettori reciproci, che Ella ha trovato per le funzioni biarmoniche (funzioni, che soddisfano la equazione $\Delta^2 \Delta^2 = 0$) a due variabili [1], mi sembra estensibile a qualunque funzione poliarmonica (cioè, che verifica la equazione $\Delta^2 \Delta^2 \cdots \Delta^2 = 0$) con un numero qualsiasi di variabili.

La dimostrazione semplicissima è fondata sapra il teorema del dott. ALMANSI [2], il quale dice che *ogni funzione n-armonica φ_n delle variabili $x, y, z \cdots$ può esprimersi entro un campo conveniente mediante due funzioni $n-1$-armoniche φ_{n-1}, φ_{n-1} colla formula*:

$$\varphi_n = x\varphi_{n-1} + \psi_{n-1};$$

e, se φ_{n-1} è $n-1$-armonica, $x\varphi_{n-1}, r^2 \varphi_{n-1}$ sono n-armoniche $(r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \cdots)$.

Se eseguiamo una inversione di modulo 1, passando dalle variabili $x, y, z, \cdots$ alle variabili $\xi, \eta, \zeta, \cdots$, avremo:

$$\varphi_n = \frac{\xi}{\rho^2} \varphi_{n-1} + \psi_{n-1}, \quad (\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \cdots),$$

donde:

$$\rho^{m+2} \varphi_n = \xi (\rho^m \varphi_{n-1}) + \rho^2 (\rho^m \psi_{n-1}).$$

Se ora $\rho^m \varphi_{n-1}$ e $\rho^m \psi_{n-1}$ sono $n-1$-armoniche per rapporto a $\xi, \eta, \zeta, \cdots$, ne viene che $\rho^{m+2} \varphi_n$ è n-armonica rispetto alle stesse variabili.

Di qui possiamo concludere nel caso di due variabili (siccome φ_1 e ψ_1 sono armoniche rispetto a ξ, η) che $\rho^2 \varphi_2, \rho^4 \varphi_3, \cdots, \rho^{2(n-1)} \varphi_n, \cdots$ sono rispettivamente poliarmoniche rispetto a ξ, η di ordini $2, 3, \cdots, n, \cdots$; mentre nel caso di tre variabili (siccome φ_1/ρ, ψ_1/ρ sono armoniche rispetto a ξ, η, ζ) che $\rho\varphi_2, \rho^3 \varphi_3, \cdots, \rho^{2n-3} \varphi_n, \cdots$, sono poliarmoniche rispetto alle stesse variabili degli ordini $2, 3, \cdots, n, \cdots$; e così di seguito.

Ciò prova il principio della inversione.

(*) Estratto da una lettera al prof. TULLIO LEVI-CIVITA.

(1) *Sopra una trasformazione in sè stessa della equazione* $\Delta_2 \Delta_2 = 0$, «Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti». Tomo IX, serie VII, 1897-98.

(2) *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. «Annali di Matematica», ser. III, t. 2.

La dimostrazione può farsi anche ricorrendo all'altra rappresentazione del dott. ALMANSI

$$\varphi_n = r^2 \varphi_{n-1} + \psi_{n-1},$$

il che è sempre possibile scegliendo convenientemente il campo in cui si considera la φ_n.

Mi permetto anche di accennare un'altra applicazione, oltre quella da Lei data, del principio dell'inversione.

Per risolvere il problema di costruire una funzione armonica, dati i valori sul contorno di un cerchio, mi sono servito spesso in lezione di questo metodo. Ho stabilito direttamente il teorema che il valore nel centro è la media dei valori al contorno, quindi con una inversione ho trasportato un punto qualunque al centro e ho perciò potuto determinare il valore della funzione in quel punto.

Nel caso delle funzioni biarmoniche, il valore nel centro di un cerchio di raggio 1 è la metà della media dei valori al contorno della derivata normale più la media dei valori al contorno della funzione, come può dimostrarsi direttamente in maniera molto semplice. Trasportando un punto qualunque nel centro con una inversione, può ottenersi la formula nota del LAURICELLA (3).

In modo analogo può operarsi per ogni funzione poliarmonica anche nel caso della sfera . . . .

. . . .

Torino, 18 dicembre 1898.

(3) *Integrazione dell'equazione* $\Delta^2 (\Delta^2 u) = 0$ *in un campo di forma circolare*. «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. XXXI, 1896.