XXXIII.

SOPRA UNA CLASSE DI MOTI PERMANENTI STABILI

« Atti Acc. Scienze Torino », vol. XXXIV, 1898–99, pp. 247–255 (*)

1. Mi propongo di estendere in questa breve Nota alcune proprietà che ho dimostrato riguardo alla stabilità delle rotazioni di sistemi che hanno moti interni stazionari (1) ad un caso generale di quei *moti a caratteristiche indipendenti* che ho esaminati in alcune comunicazioni che ebbi l'onore di fare l'anno scorso (2).

2. Riferendomi alle notazioni stesse che ho usato nelle comunicazioni suddette, si può dire che un moto qualsiasi a caratteristiche indipendenti darà luogo alle equazioni

$$p_s' = \Sigma_{kr}\, e_{skr} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_k, p_r)} \tag{A}$$

ogniqualvolta esisteranno degli integrali di primo ed uno di secondo grado F = cost., la cui equazione determinante sia diversa da zero (vedi il § 10 della prima delle due comunicazioni citate). Il moto si dirà permanente allorché le caratteristiche $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ saranno costanti, quindi i moti permanenti verranno individuati dalle equazioni

$$\Sigma_{kr}\, e_{skr} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_k, p_r)} = 0$$

le quali saranno evidentemente verificate quando avremo

$$\frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_k, p_r)} = 0,$$

vale a dire

$$\frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_1}} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_2}} = \cdots = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_\nu}}{\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_\nu}}. \tag{1}$$

(*) Presentata nell'adunanza del 15 gennaio 1899.

(1) « Annali di Matematica », ser. 2ª, vol. XXIII, 1895, pp. 269–285. [In questo vol.: XV, pp. 173–186].

(2) *Sopra una classe di equazioni dinamiche. Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche*. « Atti. Acc. Sc. Torino », vol. XXXIII, 1897-98, pp. 451-475 e pp. 542-558. [In questo vol.: XXVI, pp. 336–355 e XXVII, pp. 350–369].

Noi otteniamo dunque infiniti moti permanenti determinando le p_1, $p_2, \cdots, p_\nu$ *in modo da soddisfare le precedenti equazioni* [3].

3. Supponiamo ora di aver scelto le caratteristiche in modo che la forza viva sia ridotta alla semisomma dei loro quadrati e la funzione F non contenga i rettangoli delle variabili. Si otterrà allora

$$(2)\quad \begin{cases} T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_\nu^2), \\ F = \frac{1}{2}(\lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2 + \cdots + \lambda_\nu p_\nu^2) + \mu_1 p_1 + \cdots + \mu_\nu p_\nu \end{cases}$$

in cui $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu$ si supporranno diverse fra loro.

Quindi le (1) diverranno

$$\frac{\lambda_1 p_1 + \mu_1}{p_1} = \frac{\lambda_2 p_2 + \mu_2}{p_2} = \cdots = \frac{\lambda_\nu p_\nu + \mu_\nu}{p_\nu}$$

e chiamando ρ questo rapporto, avremo

$$(3)\quad p_1 = \frac{\mu_1}{\rho - \lambda_1}\ ,\quad p_2 = \frac{\mu_2}{\rho - \lambda_2}, \cdots, p_\nu = \frac{\mu_\nu}{\rho - \lambda_\nu}$$

e perciò tutti gli infiniti moti permanenti considerati si avranno dalle formole precedenti dando a ρ tutti i possibili valori.

Nel caso in cui tutte le $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\nu$ siano nulle, allora le condizioni dei moti permanenti si verificheranno scegliendo nulle tutte le caratteristiche, una eccettuata, per esempio p_i il che corrisponderà nelle formule precedenti a prendere ρ eguale a λ_i.

4. Se noi cerchiamo i massimi e minimi di F compatibilmente colla condizione $T =$ cost. dovremo annullare le derivate parziali della differenza

$$F - \rho T$$

in cui ρ denota una costante. Si troveranno dunque le condizioni (3) ossia quelle sufficienti alla permanenza del movimento.

5. Un moto permanente si dirà *stabile*, quando preso un numero σ piccolo a piacere, si potrà trovare un numero ε tale che perturbando il moto in modo da alterare le caratteristiche $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$, meno di ε, nel moto perturbato le caratteristiche differiscano in ogni istante dai valori corrispondenti che esse hanno nel moto permanente meno di σ.

Possiamo ora dimostrare il teorema:

Ai massimi e ai minimi effettivi di F, *compatibilmente colla condizione* $T =$ cost., *corrispondono dei moti permanenti stabili del sistema* [4].

(3) Le condizioni (1) sono evidentemente condizioni *sufficienti*, non necessarie affinché il moto sia permanente.

(4) Secondo la definizione che molti autori dànno di massimo di F compatibilmente colla condizione $T =$ cost. dovremo intendere che F avrà un massimo corrispondente a $p_1 = \overset{0}{p}_1, p_2 = \overset{0}{p}_2, \cdots, p_\nu = \overset{0}{p}_\nu$ quando per tutti i valori di $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ compresi rispetti-

Per dimostrare questo teorema denotiamo con $p_1^\circ, p_2^\circ, \cdots, p_\nu^\circ$ uno di questi massimi o minimi, e poniamo

$$T(p_1^\circ, p_2^\circ, \cdots, p_\nu^\circ) = T_o,$$
$$F(p_1^\circ, p_2^\circ, \cdots, p_\nu^\circ) = F_o,$$
$$\Phi = (T - T_o)^2 + (F - F_o)^2.$$

Per la definizione di massimo e di minimo effettivo, avremo che, allorquando

$$T(p_1, p_2, \cdots, p_\nu) = T_o,$$

sarà

$$|F(p_1, p_2, \cdots, p_\nu) - F_o| > o$$

purché siano le

$$(4) \qquad |p_i - p_i^\circ| \leq \delta,$$

senza che tutte queste differenze siano nulle.

Ciò premesso, prendiamo un numero positivo σ qualsiasi minore di δ, e consideriamo Φ per tutti i valori di $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ che soddisfano le diseguaglianze (4), ma tali che una almeno delle differenze

$$|p_i - p_i^\circ| = \sigma.$$

Nessuno dei valori corrispondenti di Φ sarà nullo, perché per quei valori pei quali si annullerà il termine $(T - T_o)^2$, non potrà annullarsi l'altro termine $(F - F_o)^2$, onde per la continuità di Φ, potremo concludere che il limite inferiore di questi valori sarà un numero m diverso da zero e positivo.

Ora potremo prendere $\varepsilon < \sigma$ tale che, se sono tutte le

$$(5) \qquad |p_i - p_i^\circ| < \varepsilon,$$

si abbia

$$\Phi < m.$$

vamente fra $p_1^\circ - \delta, p_1^\circ + \delta$; $p_2^\circ - \delta, p_2^\circ + \delta$; $\cdots, p_\nu^\circ - \delta, p_\nu^\circ + \delta$, i quali verificano la condizione $T = \text{cost.}$, si abbia:

$$F(p_1, p_2, \cdots, p_\nu) \leq F(p_1^\circ, p_2^\circ, \cdots, p_\nu^\circ).$$

A noi preme invece di considerare il caso che si presenta quando (purché $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ non siano tutti eguali a $p_1^\circ, p_2^\circ, \cdots, p_\nu^\circ$) vale la diseguaglianza

$$F(p_1, p_2, \cdots, p_\nu) < F(p_1^\circ, p_2^\circ, \cdots, p_\nu^\circ),$$

essendo sempre le $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ comprese entro i limiti suddetti e tali che sia $T = \text{cost.}$

A scanso di equivoci per distinguere questo caso speciale di massimo noi lo designeremo col nome di *massimo effettivo*. In modo perfettamente analogo noi intenderemo il significato di *minimo effettivo*. Senza la specificazione fatta il teorema enunciato non sarebbe esatto. A questo proposito notiamo che allorquando DIRICHLET dimostra il teorema che le configurazioni in cui il potenziale è massimo sono configurazioni di equilibrio stabile egli sottintende che si tratta di un *massimo effettivo* come il contesto della dimostrazione lo prova (vedi Nota II, al 1° vol. delle *Mecan. Anal.* di LAGRANGE, IV ediz.), altrimenti il teorema fondamentale della stabilità dell'equilibrio non sarebbe rigoroso.

Si prenda uno stato iniziale di moto in cui le $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ verificano le diseguaglianze (5), allora poiché durante tutto il movimento T ed F si conservano costanti, anche Φ sarà costante e quindi sempre inferiore ad m. Ne segue che nessuna delle differenze $p_i - p_i^0$ potrà in valore assoluto raggiungere il valore σ, e perciò tutte si conserveranno inferiori a questo limite. Le condizioni per la stabilità del moto saranno dunque verificate.

È evidente che nella dimostrazione precedente si possono invertire le due funzioni F e T, e perciò potremo anche enunciare il teorema:

Ai massimi e minimi effettivi della forza viva compatibilmente colla condizione F = cost. *corrispondono dei moti permanenti stabili del sistema.*

6. Facciamo subito un'applicazione delle precedenti proposizioni al caso in cui F sia omogenea e di secondo grado. Supponiamo che il massimo dei coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu$ (che supponiamo diversi fra loro) sia λ_i ed il minimo λ_s. Allora

$$\lambda_i \mathrm{T} - \mathrm{F} = \sum_{1}^{\nu}{}_h (\lambda_i - \lambda_h)\, p_h^2, \tag{6}$$

$$\lambda_s \mathrm{T} - \mathrm{F} = \sum_{1}^{\nu}{}_h (\lambda_s - \lambda_h)\, p_h^2. \tag{7}$$

Il secondo membro della (6) è sempre positivo e si annulla solo quando tutte le p_h sono nulle, eccettuata p_i, mentre il secondo membro della (7) è sempre negativo e si annulla quando le p_h sono nulle, eccettuata p_s.

Possiamo dunque concludere.

I moti del sistema corrispondenti all'annullarsi di tutte le caratteristiche, eccettuata la p_i oppure la p_s, sono moti permanenti stabili.

7. Mostriamo ora come nel caso più generale esistano sempre dei moti stabili del sistema. Differenziando le (2) avremo

$$d\mathrm{T} = \sum_{1}^{\nu}{}_i\, p_i\, dp_i \quad , \quad d\mathrm{F} = \sum_{1}^{\nu} (\lambda_i p_i + \mu_i)\, dp_i$$

donde

$$\rho\, d\mathrm{T} - d\mathrm{F} = \sum_{1}^{\nu}{}_i ((\rho - \lambda_i)\, p_i - \mu_i)\, dp_i$$

e prendendo le p_i in modo che siano verificate le (3) otterremo

$$\rho\, d\mathrm{T} - d\mathrm{F} = 0.$$

Differenziando le (2) una seconda volta si avrà

$$d^2\mathrm{T} = \sum_{1}^{\nu}{}_i\, dp_i^2 + \sum_{1}^{\nu}{}_i\, p_i\, d^2 p_i$$

$$d^2\mathrm{F} = \sum_{1}^{\nu} \lambda_i\, dp_i^2 + \sum_{1}^{\nu}{}_i (\lambda_i p_i + \mu_i)\, d^2 p_i.$$

Da cui segue

$$\rho\, d^2T - d^2F = \sum_{1}^{\nu}{}_i (\rho - \lambda_i)\, dp_i^2 + \sum_{1}^{\nu}{}_i ((\rho - \lambda_i)\, p_i - \mu_i)\, d^2 p_i$$

e per le (3)

$$\rho\, d^2T - d^2F = \sum_{1}^{\nu}{}_i (\rho - \lambda_i)\, dp_i^2.$$

Applicando le proposizioni del § 5 potremo dunque dire che *i moti stabili si avranno allorché la forma quadratica precedente sarà una forma definita, essendo*

$$\sum_{1}^{\nu}{}_i\, p_i\, dp_i = 0.$$

Di qui risulta facilmente che si avranno sempre dei moti stabili quando ρ sarà maggiore della più grande delle λ_i, oppure sarà più piccola della minore delle λ_i, il che prova la esistenza dei moti stabili in ogni caso. Evidentemente però non saranno in generale questi soli i valori di p corrispondenti a moti stabili.

8. Dimostrata così la esistenza dei moti permanenti stabili, si possono studiare le piccole perturbazioni dei moti stessi. A tal fine poniamo nelle equazioni (A) in luogo delle p_i, $p_i^0 + \omega_i$, in cui le p_i^0 corrispondono ad un moto stabile della specie sopra esaminata e le ω_i vengono considerate come quantità infinitesime del primo ordine.

Nell'ipotesi che T ed F abbiano la forma (2), e trascurando infinitesimi del 2° ordine, le (A) divengono:

$$\omega_s' = \Sigma_{kr}\, e_{skr} \begin{vmatrix} \omega_k, & \omega_r \\ \dfrac{\mu_k(\rho - \lambda_r)}{\rho - \lambda_k}, & \dfrac{\mu_r(\rho - \lambda_k)}{\rho - \lambda_r} \end{vmatrix}.$$

E ponendo

$$\sum_{1}^{\nu}{}_r \frac{\mu_r(\rho - \lambda_s)(\rho - \lambda_k)}{(\rho - \lambda_r)}\, e_{skr} = G_{sk},$$

si trova

$$(8) \qquad (\rho - \lambda_s)\, \omega_s' = \sum_{1}^{\nu}{}_k\, G_{sk}\, \omega_k.$$

Si riconosce immediatamente per le proprietà dei coefficienti e_{skr} che

$$G_{sk} + G_{ks} = 0,$$

$$\Sigma_s\, G_{sk} \frac{\mu_s}{(\rho - \lambda_s)^2} = 0;$$

quindi le equazioni precedenti ammettono gl'integrali

$$\sum_{1}^{\nu}{}_s (\rho - \lambda_s)\, \omega_s^2 = \text{cost.},$$

$$\sum_{1}^{\nu}{}_s \frac{\mu_s}{\rho - \lambda_s} \omega_s = \text{cost.}$$

Per integrare le (8), osservando che esse sono lineari, basterà porre

$$\omega_s = P_s e^{zt}$$

e determinare le P_s e z in modo da verificare le equazioni

$$(\rho - \lambda_s) P_s z = \sum_{1}^{\nu}{}_k G_{sk} P_k . \tag{9}$$

Eliminando le P_s troviamo per z l'equazione:

$$\begin{vmatrix} (\lambda_1 - \rho) z , & G_{12} , & G_{13} , & \cdots, & G_{1\nu} \\ G_{21} , & (\lambda_2 - \rho) z , & G_{23} , & \cdots, & G_{2\nu} \\ G_{31} , & G_{32} , & (\lambda_3 - \rho) z , & \cdots, & G_{3\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{\nu 1} , & G_{\nu 2} , & G_{\nu 3} , & \cdots, & (\lambda_\nu - \rho) z \end{vmatrix} = 0 . \tag{10}$$

Questa equazione ammette la radice $z = 0$. Per riconoscerlo basta osservare che le (9) sono soddisfatte prendendo $z = 0$ e $P_k = \mu_k/(\rho - \lambda_k)^2$. Mostriamo ora che tutte le altre radici della (10) sono puramente immaginarie. Infatti se esistesse una radice reale z si potrebbero trovare dei valori reali delle P_k tali da verificare le (9). Moltiplicando queste equazioni per P_s e sommando, e poi moltiplicandole per $\mu_s/(\rho - \lambda_s)^2$ e pure sommando si otterrebbe contemporaneamente

$$\Sigma_s (\rho - \lambda_s) P_s^2 = 0 \tag{11}$$

$$\Sigma_s \frac{\mu_s}{\rho - \lambda_s} P_s = 0 \tag{12}$$

il che è in contradizione col fatto che la forma (11) è definita allorché è soddisfatta la (12) (vedi il § 7).

Proviamo che non esistono nemmeno radici complesse. Infatti se si avesse una radice complessa $\alpha + i\beta$, si avrebbe anche una radice coniugata $\alpha - i\beta$, e se corrispondentemente alla prima si avessero per le P_s che soddisfano le (9) i valori $Q_s + iR_s$, alla seconda corrisponderebbero i valori $Q_s - iR_s$, onde

$$(\rho - \lambda_s)(Q_s + iR_s)(\alpha + i\beta) = \sum_{1}^{\nu}{}_k G_{sk} (Q_k + iR_k)$$

$$(\rho - \lambda_s)(Q_s - iR_s)(\alpha - i\beta) = \sum_{1}^{\nu}{}_k G_{sk} (Q_k - iR_k).$$

Moltiplicando la prima di queste equazioni per $Q_s - iR_s$ e la seconda per $Q_s + iR_s$, sommando membro a membro, e poi per tutti i valori dell'indice s, si otterrebbe

$$\sum_{1}^{\nu}{}_k (\rho - \lambda_s)(Q_s^2 + R_s^2) = 0$$

mentre d'altra parte dovrebbe aversi

$$\sum_{1}^{\nu}{}_s \frac{\mu_s}{\rho-\lambda_s} Q_s = \sum_{1}^{\nu}{}_s \frac{\mu_s}{\rho-\lambda_s} R_s = 0$$

risultato che offrirebbe la stessa contradizione precedentemente esaminata.

Essendo le radici della (10) puramente immaginarie, scriviamole sotto la forma

$$\frac{2\pi}{T_1} i \quad , \quad \frac{2\pi}{T_2} i \quad , \quad \frac{2\pi}{T_3} i, \cdots$$

avremo allora che i periodi delle perturbazioni saranno dati dalle quantità reali $T_1, T_2, T_3, \cdots$, e le ω_s saranno date dalle formule

$$\omega_s = \Sigma A_h \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T_h} + \alpha_h\right),$$

ove le A_h e α_h sono costanti, giacché con un semplice ragionamento può riconoscersi che termini non periodici non possono sussistere nelle ω_s.

Le perturbazioni essendo periodiche e non smorzandosi, sono quindi di natura essenzialmente diversa da quelle perturbazioni che abbiamo esaminate pei moti a caratteristiche indipendenti del 2° ordine nella seconda Nota sopra citata.