

## XXXIV.

## SUL FLUSSO DI ENERGIA MECCANICA

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXIV, 1898-1899, pp. 366-375.

1. È noto come il POYNTING in una sua celebre Memoria<sup>(1)</sup> ha determinato la legge con cui fluisce l'energia in un campo elettromagnetico, giungendo ad un risultato altrettanto semplice quanto importante, sia dal punto di vista teorico che da quello delle applicazioni. Varii studii furono fatti in seguito per ricercare, non nei soli fenomeni elettromagnetici, ma anche negli altri fenomeni naturali le leggi che esprimono come procede con continuità la energia da punto a punto nello spazio.

Noi ci limiteremo in questa Nota allo studio del flusso di energia meccanica in un caso che crediamo non ancora contemplato.

2. Consideriamo, per fissare le idee, il sistema solare come sottratto ad azioni esterne. Si ha in questo caso un moto di materia consistente nel movimento degli astri che lo costituiscono, i quali subiscono nel tempo stesso delle alterazioni nella loro costituzione, mentre le forze attrattive che agiscono su di essi variano pure in ogni istante.

È possibile stabilire in questo caso delle leggi atte a rappresentare come fluisce l'energia meccanica corrispondente in tutto lo spazio, ammesso che essa non si trasformi in altre energie e per conseguenza si conservi costante?

Il sistema dunque che noi immaginiamo è discontinuo, e le diverse parti hanno stato di aggregazione diverso. Alcuni corpi o parti dei corpi costituenti il sistema sono solidi, altri liquidi ed altri aeriformi. Alcuni di questi si trovano a contatto fra loro, altri possono concepirsi separati da porzioni di spazio non riempito da materia. La densità della distribuzione di materia è per conseguenza discontinua, come le velocità dei punti possono essere discontinue lungo le superficie che costituiscono i limiti di separazione delle varie parti fra loro eterogenee del sistema. Le forze agenti sono le forze newtoniane di attrazione fra i vari elementi di materia, e le forze elastiche interne.

Onde esaminare la questione propostaci è necessario localizzare in ogni punto dello spazio ed in ogni istante l'energia.

Per riguardo alla energia cinetica la cosa non presenta evidentemente alcuna difficoltà; così pure per riguardo alla energia elastica delle varie parti; ma è necessario anche localizzare l'energia potenziale delle forze newtoniane

(1) «Philosophical Transactions», vol. 175.



che agiscono fra i vari punti del sistema. Ora all'energia potenziale di un sistema materiale le cui particelle si attraggono colla legge di NEWTON si sa dare varie espressioni, una delle quali consiste nell'integrale esteso a tutto lo spazio del quadrato della forza unitaria agente in ogni punto divisa per  $-8\pi$ . Mediante questa espressione noi abbiamo un modo di localizzare in ogni elemento dello spazio la energia newtoniana, stabilendo che ogni elemento contribuisca nella energia newtoniana per una quantità eguale al volume dell'elemento diviso per  $-8\pi$  e moltiplicato pel quadrato della forza unitaria agente in quel punto.

Non deve recare meraviglia se colla ipotesi fatta la quantità, con cui contribuisce ogni elemento di spazio nella energia potenziale, è negativa.

Siccome noi studiamo il flusso di energia, così ciò che preme di considerare, anziché il valore effettivo della quantità di energia è la sua variazione. La energia potenziale è d'altra parte individuata a meno di una costante addittiva arbitraria; noi potremmo dunque supporre, per esempio, aggiunta in ogni elemento una quantità *costante* di energia senza che perciò il flusso di essa venisse alterato. Con una conveniente aggiunta potrebbe concepirsi concentrata in ogni elemento una quantità positiva di energia<sup>(2)</sup>.

A questo modo di distribuire nello spazio la energia potenziale newtoniana si potrebbe far corrispondere un meccanismo speciale sostituibile alle azioni a distanza, atto cioè a spiegarci le attrazioni newtoniane; ma noi possiamo anche prescindere da qualsiasi ipotesi a questo proposito; come del resto si fa ordinariamente allorché si definisce l'energia in un campo elettromagnetico.

Osserviamo infine che stabilita una legge del flusso di energia, altre infinite *equivalenti* possono, come è ben noto, trovarsene.

3. Mostriamo ora quale è il risultato che si ottiene per il flusso di energia. In ogni punto dello spazio si possono considerare tre vettori; il primo dei quali  $\mathfrak{F}$  rappresenta la forza newtoniana unitaria in quel punto, il secondo  $\mathfrak{B}$  la velocità del moto della materia, il terzo  $\mathfrak{Z}$  la tensione elastica unitaria che viene esercitata sull'elemento normale alla direzione del moto dalla parte opposta a quella secondo cui la materia stessa si sposta. Del primo  $\mathfrak{F}$  si potrà fare la derivata rapporto al tempo e si otterrà così un vettore  $\mathfrak{J}$  che esprimerà la legge con cui varia col tempo la forza unitaria. Consideriamo poi la funzione potenziale newtoniana  $U$ , la densità  $\rho$  e la grandezza  $V$  della velocità della materia.

*Il flusso di energia sarà risultante di tre vettori, e cioè del vettore  $\mathfrak{J}$  moltiplicato per  $U/4\pi$ , del vettore  $\mathfrak{B}$  moltiplicato per  $\rho(V^2/2 - U)$  e del vettore  $\mathfrak{Z}$  mol-*

(2) WILLY WIEN nella sua bella ed importante Memoria sopra il concetto della localizzazione dell'energia del Tomo XLV degli « Annali di Wiedemann », esclude *a priori*, come non suscettibile di essere trattato, il caso dei corpi discontinui e della gravitazione universale; ma noi riteniamo che le precedenti considerazioni che abbiamo esposto ed i calcoli che seguono, giustifichino l'aver preso in esame e svolto questo caso che ci sembra di precipuo interesse.



tiplicato per  $V$ . Questa legge vale per tutti i punti dello spazio. Nei punti dove non vi è materia  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{I}$  si annullano e resta il flusso di energia rappresentato dal solo vettore  $\mathfrak{J}$  moltiplicato per  $U/4\pi$ .

La via seguita per ottenere questo risultato è la seguente. Una volta che sia localizzata l'energia in ogni elemento dello spazio, consideriamo una porzione fissa qualsiasi di esso e calcoliamo la energia ivi contenuta. La derivata rapporto al tempo di questa quantità si potrà esprimere mediante un integrale esteso a tutto lo spazio ed una somma di integrali estesi a tutte le superficie ove la materia e il moto sono discontinui. Ma l'insieme di tutti questi integrali può trasformarsi in un solo integrale esteso al contorno dell'intero spazio considerato, e questa espressione ci rivela immediatamente la legge del flusso di energia.

Consacreremo i paragrafi seguenti allo sviluppo del calcolo che abbiamo ora accennato.

In una Nota successiva particolarizzeremo le formule generali per lo studio del flusso di energia corrispondente al così detto moto non perturbato dei corpi celesti.

4. Denotiamo con  $U$  la funzione potenziale, con  $\rho$  la densità della materia, con  $u, v, w$  le componenti della velocità di questa nelle direzioni degli assi coordinati. I punti ove non vi è materia saranno caratterizzati dal valore  $\rho = 0$ .

La energia cinetica contenuta in uno spazio  $S$  sarà

$$E_c = \frac{1}{2} \int_S \rho (u^2 + v^2 + w^2) dS.$$

La energia potenziale newtoniana contenuta in  $S$  sarà

$$E_p = -\frac{1}{8\pi} \int_S \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right\} dS.$$

Chiamiamo con  $E_e$  la energia elastica entro  $S$ .

Allora la energia meccanica totale contenuta entro  $S$  sarà

$$E = E_c + E_p + E_e.$$

Bisognerà calcolare la variazione della energia contenuta in  $S$ , che ha luogo nel tempo  $dt$ .

Noi supporremo che il contorno  $\sigma$  di  $S$  non coincida, lungo nessun tratto di area finita, con una superficie ove il moto o la materia siano discontinui.

5. Cominciamo dal calcolare la variazione di  $E_c$ .

A tal fine seguiamo la materia contenuta in  $S$  nel suo moto. Nel tempo  $t + dt$  essa verrà in generale ad occupare un nuovo spazio  $S'$  e la variazione di forza viva da essa subita sarà eguale al lavoro eseguito dalle forze applicate



ai suoi elementi. Ora il lavoro eseguito dalle attrazioni newtoniane verrà dato da

$$\int_S \left( \rho \frac{\partial U}{\partial x} u dt + \rho \frac{\partial U}{\partial y} v dt + \rho \frac{\partial U}{\partial z} w dt \right) dS$$

ed il lavoro delle forze elastiche sarà eguale alla diminuzione della energia elastica  $E_e$  cioè  $-dE_e$  aggiuntovi il lavoro delle tensioni agenti in superficie. Se le componenti della tensione unitaria agente dall'esterno verso l'interno sopra un elemento qualunque del contorno sono  $t_x, t_y, t_z$ , il lavoro delle tensioni al contorno sarà

$$\int_{\sigma} (t_x u dt + t_y v dt + t_z w dt) d\sigma.$$

Il lavoro totale sarà dunque:

$$L = \int_S \rho \left( \frac{\partial U}{\partial x} u + \frac{\partial U}{\partial y} v + \frac{\partial U}{\partial z} w \right) dS \cdot dt - dE_e + \int_{\sigma} (t_x u + t_y v + t_z w) d\sigma \cdot dt.$$

6. Se ora noi vogliamo la variazione che ha subito nel tempo  $dt$  la energia cinetica contenuta nella regione fissa  $S$  dello spazio, dovremo aggiungere ad  $L$  la forza viva della materia penetrata in  $S$  attraverso il contorno  $\sigma$  durante questo intervallo di tempo, e togliere quella della materia uscita, il cui insieme contribuisce colla quantità di energia

$$e_c = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \rho (u^2 + v^2 + w^2) (u dt \cdot \cos nx + v dt \cdot \cos ny + w dt \cdot \cos nz) d\sigma$$

denotando con  $n$  la normale a  $\sigma$  diretta verso l'interno di  $S$ . Avremo dunque che la variazione di  $E_c$  richiesta si esprimerà con

$$dE_c = L + e_c$$

onde ponendo

$$I = \int_S \rho \left( \frac{\partial U}{\partial x} u + \frac{\partial U}{\partial y} v + \frac{\partial U}{\partial z} w \right) dS$$

risulterà

$$(1) \quad \frac{\partial (E_c + E_e)}{\partial t} = I + \int_{\sigma} (t_x u + t_y v + t_z w) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\sigma} \rho (u^2 + v^2 + w^2) (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) d\sigma.$$

7. Calcoliamo ora la variazione di  $E_p$ . Questa sarà

$$(2) \quad dE_p = - \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial dU}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial dU}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial dU}{\partial z} \right) dS$$

denotando con  $dU$  la variazione subita dalla funzione potenziale nel tempo  $dt$ . Ma  $dU$  si può considerare come la funzione potenziale di una massa a tre



dimensioni che abbia in ogni punto la densità  $d\rho$  e di una massa a due dimensioni distribuita lungo la superficie  $\sigma_h$  ove la materia o il moto sono discontinui, colla densità  $\rho_1 V_{v,1} - \rho_2 V_{v,2}$ , essendo  $\nu$  la normale alla superficie di discontinuità, e  $\rho_2$  la densità della materia dalla parte positiva di  $\nu$  e  $\rho_1$  la densità della parte negativa; mentre  $V_{v,2}, V_{v,1}$  sono le componenti della velocità della materia nel verso  $\nu$  dalle due parti della superficie (3).

Avremo dunque lungo queste superficie  $\sigma_h$

$$\left(\frac{\partial dU}{\partial \nu}\right)_2 - \left(\frac{\partial dU}{\partial \nu}\right)_1 = -4\pi(\rho_1 V_{v,1} - \rho_2 V_{v,2})$$

ove  $(\partial dU/\partial \nu)_2, (\partial dU/\partial \nu)_1$  significano i valori della derivata normale dalle due parti, positiva e negativa, della superficie  $\sigma_h$ .

In tutti gli altri punti avremo

$$\Delta^2(dU) = -4\pi d\rho.$$

Trasformiamo ora la espressione (2) con delle integrazioni per parti. Otterremo (4)

$$dE_p = \frac{1}{4\pi} \int_S U \Delta^2(dU) dS + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} U \frac{\partial dU}{\partial n} d\sigma - \sum_h \int_{\sigma_h} (\rho_1 V_{v,1} - \rho_2 V_{v,2}) d\sigma_h dt$$

quindi

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = - \int_S U \frac{\partial \rho}{\partial t} dS + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} U \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial dU}{\partial t} d\sigma - \sum_h \int_{\sigma_h} (\rho_1 V_{v,1} - \rho_2 V_{v,2}) d\sigma_h.$$

8. In modo analogo possiamo trasformare l'integrale I.

Se teniamo conto delle discontinuità del moto e della materia si avrà

$$I = - \int_S U \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dS - \int_{\sigma} \rho U (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) d\sigma + \sum_h \int_{\sigma_h} U (\rho_1 V_{v,1} - \rho_2 V_{v,2}) d\sigma_h$$

(3) Se lungo la superficie di discontinuità i due corpi che si trovano a contatto si conservano a contatto, sarà  $V_{v,1} = V_{v,2}$ ; ma se i due corpi si staccassero, sarebbero  $V_{v,1}$  e  $V_{v,2}$  diversi fra loro.

(4) Quando noi scriviamo  $\int_S U \Delta^2(dU) dS$  intendiamo diviso tutto lo spazio in tante parti  $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_l$ , quante se ne ottengono prendendo le  $\sigma_h$  come superficie di separazione. Per ognuna di queste parti ha un significato  $\int_{S_i} U \Delta^2(dU) dS_i$ , e allora noi abbiamo

$$\int_S U \Delta^2(dU) dS = \sum_i \int_{S_i} U \Delta^2(dU) dS_i.$$

La cosa analoga deve intendersi allorché nel paragrafo seguente trasformando I si trova l'integrale  $\int_S U \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dS$ .



quindi

$$I + \frac{\partial E_p}{\partial t} = - \int_S U \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right\} \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} U \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial U}{\partial t} d\sigma - \int_{\sigma} \rho U (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) d\sigma.$$

Ma teniamo conto che pel principio della conservazione della quantità di materia si ha

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0;$$

si avrà dunque

$$I + \frac{\partial E_p}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} U \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial U}{\partial t} d\sigma - \int_{\sigma} \rho U (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) d\sigma$$

e per conseguenza in virtù delle (1), posto  $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$ ,

$$(3) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial (E_c + E_e + E_p)}{\partial t} = \int_{\sigma} \left\{ \frac{1}{4\pi} U \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial U}{\partial t} \right. \\ \left. + \rho \left( \frac{V^2}{2} - U \right) (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) + t_x u + t_y v + t_z w \right\} d\sigma.$$

9. Cerchiamo ora di trasformare il trinomio

$$t_x u + t_y v + t_z w$$

che potremo anche scrivere  $VT_v$ , ove  $T_v$  è la proiezione sulla direzione della velocità della tensione unitaria che viene esercitata, dall'esterno verso l'interno, sull'elemento del contorno  $d\sigma$ .

Ma, per un noto teorema di reciprocità relativo alle tensioni elastiche in un mezzo continuo qualsiasi,  $T_v$  è eguale alla proiezione sulla normale  $n$  della tensione unitaria che viene ad esercitarsi sull'elemento normale alla direzione della velocità dalla parte opposta a quella secondo cui la materia si sposta<sup>(5)</sup>. Se chiamiamo dunque  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  le componenti di quest'ultima tensione, avremo

$$VT_v = V (\tau_x \cos nx + \tau_y \cos ny + \tau_z \cos nz).$$

Siano  $X, Y, Z$  le componenti della forza unitaria newtoniana; si avrà

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial U}{\partial t} = X' \cos nx + Y' \cos ny + Z' \cos nz,$$

(5) Questo teorema pel caso dei solidi elastici si trova enunciato in LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (Paris, 1852), p. 21.



in cui l'apice denota la derivazione fatta rapporto al tempo. La (3) diventa perciò

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_{\sigma} \left\{ \left( \frac{U}{4\pi} X' + \rho \left( \frac{V^2}{2} - U \right) u + V \tau_x \right) \cos nx \right. \\ \left. + \left( \frac{U}{4\pi} Y' + \rho \left( \frac{V^2}{2} - U \right) v + V \tau_y \right) \cos ny \right. \\ \left. + \left( \frac{U}{4\pi} Z' + \rho \left( \frac{V^2}{2} - U \right) w + V \tau_z \right) \cos nz \right\} d\sigma.$$

Dunque le componenti del flusso unitario di energia saranno

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{U}{4\pi} X' + \rho \left( \frac{V^2}{2} - U \right) u + \tau_x V \\ E_y = \frac{U}{4\pi} Y' + \rho \left( \frac{V^2}{2} - U \right) v + \tau_y V \\ E_z = \frac{U}{4\pi} Z' + \rho \left( \frac{V^2}{2} - U \right) w + \tau_z V \end{array} \right.$$

le quali provano la legge sul flusso di energia enunciata nel § 3.

10. In una regione in cui manchi la materia,  $u, v, w$  sono nulli, quindi le componenti del flusso di energia divengono

$$E_x = \frac{U}{4\pi} X'$$

$$E_y = \frac{U}{4\pi} Y'$$

$$E_z = \frac{U}{4\pi} Z'.$$

Consideriamo una superficie di livello  $\omega$  esterna alle masse la cui normale diretta verso l'interno di essa sia  $n$ . La quantità di energia penetrata nel tempo  $dt$  sarà

$$dE = \frac{dt}{4\pi} \int_{\omega} U (X' \cos nx + Y' \cos ny + Z' \cos nz) d\omega$$

e, poiché  $U$  è costante, avremo

$$dE = \frac{U dt}{4\pi} \int_{\omega} (X' \cos nx + Y' \cos ny + Z' \cos nz) d\omega = \frac{U dt}{4\pi} \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial n} d\omega \\ = \frac{U dt}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} \frac{\partial U}{\partial n} d\omega.$$

Ora  $\int_{\omega} \frac{\partial U}{\partial n} d\omega$  è eguale al prodotto di  $4\pi$  per la massa  $M_{\omega}$  contenuta internamente ad  $\omega$ . Siccome  $\omega$  è esterna alle masse, così  $M_{\omega}$  nel tempo  $dt$  non cambia e perciò  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega} \frac{\partial U}{\partial n} d\omega$  è eguale a zero, onde si avrà

$$dE = 0.$$



Dunque *la quantità totale di energia che penetra in ogni istante attraverso una superficie di livello esterna alle masse è nulla, ossia, la quantità di energia che entra in ogni istante è eguale a quella che nello stesso istante esce attraverso la superficie di livello.*

(\*) Per rapporto alle superficie di livello può farsi ancora un'altra osservazione. Tracciamo tutte le superficie stesse, e supponiamo che ciascuna si muova insieme al sistema in modo da conservarsi superficie di livello e da conservare costante il valore che su di esse ha la funzione potenziale. Consideriamo una superficie  $\sigma$  di livello che racchiuda tutte le masse. La energia potenziale che è localizzata esternamente ad essa sarà

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma,$$

essendo  $n$  la normale diretta verso l'esterno di  $\sigma$ . Ossia essa sarà  $= -U_0 M$ , essendo  $U_0$  il valore costante che ha la funzione potenziale sopra  $\sigma$  ed  $M$  la massa totale.

(\*) Le righe seguenti riproducono una postilla autografa dell'Autore, che si è trovata su di una copia del lavoro, da lui conservata nella Sua biblioteca personale. [N. d. R.]