XXXVI.

SOPRA ALCUNE APPLICAZIONI DELLE LEGGI DEL FLUSSO DI ENERGIA MECCANICA NEL MOTO DI CORPI CHE SI ATTRAGGONO COLLA LEGGE DI NEWTON

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXIV, 1898–1899, pp. 805–817.

1. In una Nota precedente (*) ho esposto le leggi secondo cui può ammettersi che fluisca la energia meccanica nel caso di un sistema di corpi qualsiasi che si attraggono colla legge di NEWTON.

Le leggi trovate assumono una forma più semplice allorché si considera il flusso di energia in quella regione dello spazio ove non si trova la materia attraente, anziché nella regione da essa occupata.

Ed infatti si comprende che nella prima regione il flusso di energia non è perturbato dal variare della energia cinetica e di quella elastica, le quali forme di energia sono localizzate negli elementi di spazio ove trovasi la materia attraente.

Nel dare alcune applicazioni delle leggi trovate noi ci occuperemo in questa Nota del flusso di energia nello spazio ove non si trova la materia attraente ed esamineremo alcuni casi particolari molto semplici. Ci siamo a bella posta limitati ai casi più elementari onde dare un'idea il più possibile chiara dei risultati a cui si giunge; ed a tal fine abbiamo aggiunto alcuni disegni i quali servono a rendere intuitivo e facilmente visibile quanto trovasi racchiuso nelle formule.

Abbiamo dapprima dati alcuni teoremi sul flusso di energia nel caso di n sfere che si attraggono colla legge di NEWTON (§§ 2, 3, 4). Abbiamo poi considerato il caso di due sole sfere che cadono l'una verso l'altra (§§ 5, 6) e il caso del moto non perturbato quando sia trascurabile l'eccentricità dell'orbita (§ 7). Finalmente (§ 8) abbiamo studiato l'ordine di infinitesimo del flusso a distanza infinita.

2. Supponiamo che i corpi mobili siano n sfere simmetricamente costituite rispetto ai loro centri e che si conservino tali molto approssimativamente durante tutto il movimento.

Denotando con $m_1, m_2, \cdots, m_n$ le loro masse e con $r_1, r_2, \cdots, r_n$ le distanze dei loro centri da un punto qualsiasi esterno ad esse, la funzione

(*) Adunanza del 26 febbraio 1899. [In questo vol.: XXXIV, pp. 583–590].

potenziale newtoniana di queste sfere sarà

$$U = \sum_{1}^{n}{}_{i} \frac{m_i}{r_i} + C$$

essendo C una costante arbitraria. Noi supporremo in tutto ciò che segue questa costante nulla, ossia prenderemo

$$U = \sum_{1}^{n}{}_{i} \frac{m_i}{r_i}$$

il che equivale a supporre U infinitesima a distanza infinita. È quindi da notare che i risultati seguenti sono relativi a questa ipotesi.

Siano ξ_i, η_i, ζ_i. le coordinate del centro della sfera m_i; x, y, z le coordinate del punto potenziato.

Se supponiamo le sfere mobili ed il punto potenziato fisso, avremo

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{1}^{\nu}{}_{i} \frac{m_i \frac{d\xi_i}{dt}(x-\xi_i) + m_i \frac{d\eta_i}{dt}(y-\eta_i) + m_i \frac{d\zeta_i}{dt}(z-\zeta_i)}{r_i^3}.$$

Ponendo:

$$m_i \frac{d\xi_i}{dt} = -A_i \quad , \quad m_i \frac{d\eta_i}{dt} = -B_i \quad , \quad m_i \frac{d\zeta_i}{dt} = -C_i$$

$$\frac{x-\xi_i}{r_i} = \alpha_i \quad , \quad \frac{y-\eta_i}{r_i} = \beta_i \quad , \quad \frac{z-\zeta_i}{r_i} = \gamma_i ,$$

risulterà

$$\text{(1)} \qquad \frac{dU}{dt} = -\sum_{1}^{n}{}_{i} \frac{A_i\alpha_i + B_i\beta_i + C_i\gamma_i}{r_i^2}.$$

cioè [1] dU/dt sarà la funzione potenziale di tanti elementi magnetici concentrati nei centri delle sfere ed aventi le componenti dei momenti magnetici rispettivamente eguali ad A_i, B_i, C_i.

3. Teniamo ora presente che nello spazio esterno alle sfere, allorché esse sono libere e si muovono sotto l'azione delle loro attrazioni newtoniane, le componenti del flusso di energia sono date da [2]

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{aligned} E_x &= \frac{U}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dU}{dt} \\ E_y &= \frac{U}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \frac{dU}{dt} \\ E_z &= \frac{U}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{dU}{dt} \; ^{(3)}. \end{aligned} \right.$$

(1) BETTI, *Teorica delle forze newtoniane*, p. 293.

(2) Ved. Nota citata, § 10.

(3) Se si attribuisse alla costante C un valore diverso da zero, le E_x, E_y, E_z verrebbero alterate di quantità e_x, e_y, e_z, le quali verificherebbero tanto nello spazio esterno

Potremo dunque enunciare il teorema seguente: *Se più corpi sferici liberi si muovono sotto l'azione delle loro mutue attrazioni newtoniane, le linee di flusso della energia meccanica nello spazio esterno alle masse attraenti coincideranno colle linee di forza magnetiche che si otterrebbero situando al centro di ogni sfera un elemento magnetico il cui momento fosse eguale e contrario alla quantità di moto di ogni sfera.*

4. Il precedente teorema ci dà una prima immagine del flusso di energia; ma possiamo anche ottenerne una migliore ricorrendo ad alcune leggi della idrodinamica.

È noto infatti che se si hanno più sfere mobili immerse in un fluido indefinito senza vortici ed in quiete a distanza infinita, e se i raggi delle sfere sono infinitamente piccoli rispetto alle loro distanze, il potenziale di velocità del fluido sarà eguale (trascurando infinitesimi d'ordine superiore) al potenziale di tanti elementi magnetici supposti situati nei centri delle sfere moltiplicati per la metà dei cubi dei loro raggi [4].

Tenendo dunque presente le formule (1) e (A) avremo che *per ottenere il flusso di energia nel caso considerato basterà supporre sostituita ad ogni corpo mobile una sfera infinitamente piccola e concentrica avente un volume proporzionale alla massa del corpo ed immaginare che in ogni istante tutto lo spazio sia riempito da un fluido incompressibile, senza vortici ed in quiete a distanza infinita, avente per densità* U. *Il flusso di energia sarà proporzionale ed opposto al flusso del fluido indotto dal moto delle sfere infinitesime.*

In particolare se ci vogliamo limitare solo alle direzioni e al verso delle linee di flusso della energia, potremo prescindere dalla densità del fluido e supporlo per esempio omogeneo.

5. Veniamo a specializzare i risultati ottenuti al caso di due sole sfere ed immaginiamo dapprima che esse cadano l'una verso l'altra in virtù della loro mutua attrazione newtoniana.

Pel principio della conservazione del baricentro le quantità di moto delle due sfere saranno eguali ed opposte, quindi, a cagione del teorema del § 3, i momenti degli elementi magnetici che si debbono immaginare situati nei centri delle due sfere, onde ottenere le linee di flusso della energia, saranno eguali ed opposti ed i loro assi coincideranno colla retta dei centri delle sfere. Ne viene dunque che *le linee di flusso dell'energia saranno situate*

che in quello interno alle masse alla equazione solenoidale

$$\frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} + \frac{\partial e_z}{\partial z} = 0,$$

ossia al flusso se ne sovrapporrebbe un nuovo che non altererebbe la distribuzione della energia. Nello spazio esterno *le linee di flusso* non si altererebbero dando alla costante C un valore diverso da zero; ma il *verso* del flusso verrebbe in tutto o in parte alterato, dando a C un valore negativo.

(4) Cfr. colla mia Nota: *Sopra alcuni problemi di idrodinamica* inserita nel T. XII della ser. 3ª del «Nuovo Cimento». [In queste «Opere»: vol. primo, VI, pp. 100-123].

in piani passanti per la linea dei centri, saranno simmetriche rispetto a questa retta e saranno pure simmetriche rispetto al piano normale alla retta dei centri che divide per metà la loro distanza.

Per calcolare le equazioni delle linee di flusso dell'energia e procedere quindi alla loro effettiva costruzione geometrica, prendiamo per asse z la linea dei centri e poniamo l'origine nel baricentro delle due sfere. Chiamiamo m_1 e m_2 le due masse, a_1 e a_2 le distanze dei due centri dall'origine.

La funzione potenziale newtoniana nel punto potenziato x, y, z, sarà

$$U = \frac{m_1}{((z-a_1)^2+u^2)^{1/2}} + \frac{m_2}{((z-a_2)^2+u^2)^{1/2}}$$

essendo $u = \sqrt{x^2+y^2}$.

Quindi

$$\frac{dU}{dt} = \frac{m_1(z-a_1)\frac{da_1}{dt}}{((z-a_1)^2+u^2)^{3/2}} + \frac{m_2(z-a_2)\frac{da_2}{dt}}{((z-a_2)^2+u^2)^{3/2}}.$$

Ma per la conservazione del baricentro

$$m_1\frac{da_1}{dt} + m_2\frac{da_2}{dt} = 0$$

onde, posto

$$m_1\frac{da_1}{dt} = \mu,$$

avremo

$$\frac{dU}{dt} = \mu\left(\frac{z-a_1}{((z-a_1)^2+u^2)^{3/2}} - \frac{z-a_2}{((z-a_2)^2+u^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-1}{((z-a_1)^2+u^2)^{1/2}} + \frac{1}{((z-a_2)^2+u^2)^{1/2}}\right).$$

Noi possiamo considerare dU/dt come un potenziale simmetrico. Ne segue che la funzione associata sarà [5]

$$W = \mu u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{((z-a_1)^2+u^2)^{1/2}} - \frac{1}{((z-a_2)^2+u^2)^{1/2}}\right)$$

$$= \mu\left(\frac{-u^2}{((z-a_1)^2+u^2)^{3/2}} + \frac{u^2}{((z-a_2)^2+u^2)^{3/2}}\right)$$

onde *le equazioni delle linee di flusso dell'energia saranno*

$$\frac{u^2}{((z-a_1)^2+u^2)^{3/3}} - \frac{u^2}{((z-a_2)^2+u^2)^{3/2}} = \text{cost.}, \tag{2}$$

il che prova ancora una volta la simmetria che sopra abbiamo riconosciuto.

(5) Vedi BELTRAMI, *Sulle funzioni associate e più specialmente su quelle della calotta sferica*, § 2. Ser. IV, t. IV, delle «Memorie dell'Accad. delle Scienze dell'Ist. di Bologna».

6. Volendo effettivamente tracciare queste linee di flusso basterà che noi consideriamo quelle giacenti in un piano passante per l'asse z, nel quale possiamo considerare u e z come coordinate cartesiane.

Ponendo

$$r_1 = ((z - a_1)^2 + u^2)^{1/2} \quad , \quad r_2 = ((z - a_2)^2 + u^2)^{1/2}$$

potremo scrivere la (2)

$$\frac{u^2}{r_1^3} - \frac{u^2}{r_2^3} = \text{cost.}$$

Siano A_1 e A_2 (fig. 1) i due centri ed M un punto qualunque. Posto $MA_1 = r_1$, $MA_2 = r_2$, $M\widehat{A_1}A_2 = \theta_1$, $M\widehat{A_2}A_1 = \theta_2$, avremo

$$\frac{u^2}{r_1^3} - \frac{u^2}{r_2^3} = \frac{\text{sen}^2\,\theta_1}{r_1} - \frac{\text{sen}^2\,\theta_2}{r_2}.$$

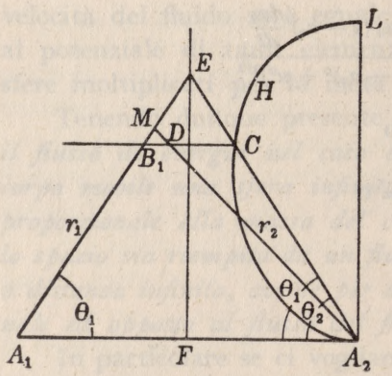

Fig. 1.

Immaginiamo tracciata la curva A_2 HL tale che ogni raggio vettore r che esce da A_2 incontri la curva ad una distanza eguale al quadrato del seno dell'angolo θ che il raggio vettore forma con $A_2 A_1$, la curva cioè che ha per equazione

$$r = \text{sen}^2\,\theta.$$

Prolunghiamo A_1M finché non incontri in E la FE perpendicolare nel mezzo di A_1A_2. Tiriamo EA_2 ed immaginiamo che A_2M e A_2E incontrino rispettivamente la curva in B_2 e C. Per questo punto conduciamo CB_1 parallelo a A_2A_1 che incontra A_1M e A_2M rispettivamente in B_1 e D. Avremo

$$\frac{B_2 D}{A_2 M} = \frac{A_2 D - A_2 B_2}{A_2 M} = \frac{A_2 D}{A_2 M} - \frac{A_2 B_2}{A_2 M} = \frac{A_1 B_1}{A_1 M} - \frac{A_2 B_2}{A_2 M} = \frac{A_2 C}{A_1 M} - \frac{A_2 B_2}{A_2 M}.$$

Ma

$$A_2 C = \text{sen}^2\,\theta_1 \quad , \quad A_2 B_2 = \text{sen}^2\,\theta_2$$

quindi

$$\frac{B_2 D}{A_2 M} = \frac{\text{sen}^2\,\theta_1}{r_1} - \frac{\text{sen}^2\,\theta_2}{r_2}.$$

Una linea qualunque di flusso dell'energia sarà dunque il luogo dei punti M *pei quali il rapporto* B_2D/A_2M *è costante.*

La costruzione di questo luogo si ottiene molto facilmente cambiando la direzione del raggio vettore A_1M, mentre con un compasso di proporzione in cui si conserva costante la riduzione e con una squadra che si fa girare attorno ad A_2 si cerca con tentativi successivi di mantenere costante il rapporto B_2D/A_2M.

È in questo modo che nella fig. 2 sono state costruite effettivamente alcune linee di flusso dell'energia nelle quali ricorrendo al teorema del § 4 è stato anche indicato con delle freccie il verso secondo cui il flusso stesso ha luogo.

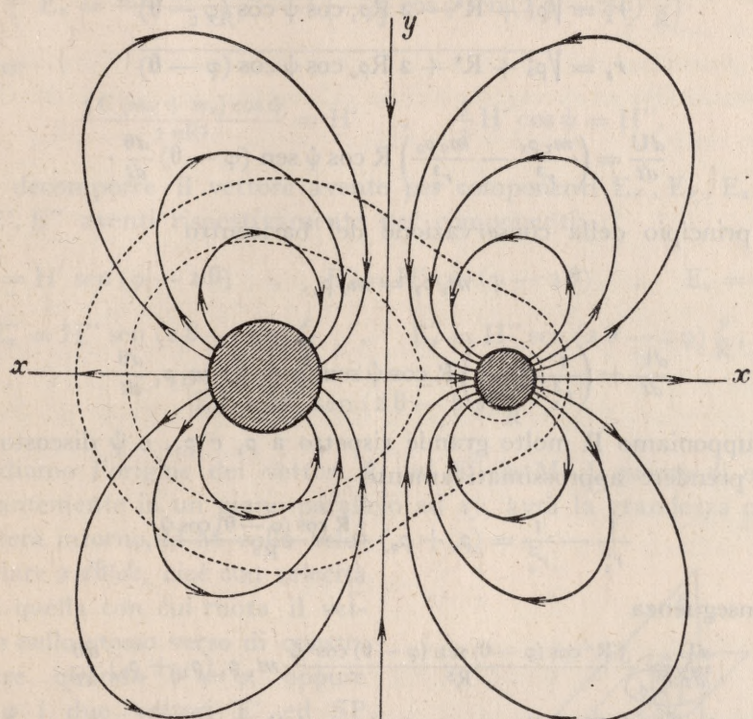

Fig. 2. – Linee di flusso dell'energia nel caso di due sfere che cadono l'una sull'altra per la gravitazione universale.

La figura rappresenta le sezioni delle due sfere di masse 1 e 8 con un piano passante pei centri. Le linee continue munite di frecce rappresentano le linee ed il verso secondo cui fluisce la energia. – Le linee tratteggiate rappresentano profili di superficie di livello, attraverso le quali la quantità di energia che entra è eguale a quella che esce.

7. Consideriamo ora il caso di due sfere che si attraggano colla legge di NEWTON e si muovano in modo tale che siano trascurabili le eccentricità delle orbite.

Poniamo l'origine O nel baricentro e prendiamo per piano xy il piano invariabile. Denotiamo con m_1 e m_2 le due masse, con ρ_1 e ρ_2 le distanze costanti dei centri P ed S delle due sfere dall'origine, con θ l'angolo che il raggio vettore SP forma coll'asse x. Chiamiamo R, ψ, φ le coordinate polari del punto potenziato M, cioè poniamo

$$x = \text{R} \cos \psi \cos \varphi$$

$$y = \text{R} \cos \psi \,\text{sen}\, \varphi$$

$$z = \text{R} \,\text{sen}\, \psi .$$

La funzione potenziale sarà

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}$$

ove

$$r_1 = \sqrt{\rho_1^2 + R^2 - 2 R\rho_1 \cos\psi \cos(\varphi - \theta)}$$

$$r_2 = \sqrt{\rho_2^2 + R^2 + 2 R\rho_2 \cos\psi \cos(\varphi - \theta)}$$

onde

$$\frac{dU}{dt} = \left(\frac{m_1 \rho_1}{r_1^3} - \frac{m_2 \rho_2}{r_2^3}\right) R \cos\psi \operatorname{sen}(\varphi - \theta) \frac{d\theta}{dt} \cdot$$

Ma pel principio della conservazione del baricentro

$$m_1 \rho_1 = m_2 \rho_2,$$

quindi

$$\frac{dU}{dt} = \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) R \cos\psi \operatorname{sen}(\varphi - \theta) \cdot m_1 \rho_1 \frac{d\theta}{dt} \cdot$$

Se supponiamo R molto grande rispetto a ρ_1 e ρ_2, e ψ discosto da $\pi/2$ potremo prendere approssimativamente

$$\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} = (\rho_1 + \rho_2) \frac{3 R \cos(\varphi - \theta) \cos\psi}{R^5},$$

e per conseguenza

$$\frac{dU}{dt} = \frac{3 R^2 \cos(\varphi - \theta) \operatorname{sen}(\varphi - \theta) \cos^2\psi}{R^5} m_1 \rho_1 (\rho_1 + \rho_2) \frac{d\theta}{dt} \cdot$$

Ora pel principio della conservazione delle aree

$$m_1 \rho_1 (\rho_1 + \rho_2) \frac{d\theta}{dt} = (m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2) \frac{d\theta}{dt} = 2 C,$$

denotando con C la costante delle aree. Avremo dunque

$$\frac{dU}{dt} = 6 C \frac{R^2 \cos(\varphi - \theta) \operatorname{sen}(\varphi - \theta) \cos^2\psi}{R^5} = 6 C \frac{(x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta)(y \cos\theta - x \operatorname{sen}\theta)}{R^5} \cdot$$

Da cui segue

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{dU}{dt} = 6 C \frac{\operatorname{sen}(\varphi - 2\theta) \cos\psi}{R^4} - 15 C \frac{\operatorname{sen}(2\varphi - 2\theta) \cos^2\psi}{R^4} \frac{x}{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{dU}{dt} = 6 C \frac{\cos(\varphi - 2\theta) \cos\psi}{R^4} - 15 C \frac{\operatorname{sen}(2\varphi - 2\theta) \cos^2\psi}{R^4} \frac{y}{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{dU}{dt} = - 15 C \frac{\operatorname{sen}(2\varphi - 2\theta) \cos^2\psi}{R^4} \frac{z}{R} \cdot$$

Prendendo dunque approssimativamente

$$U = \frac{m_1 + m_2}{R},$$

le componenti del flusso di energia saranno

$$
(B) \quad \begin{cases}
E_x = \dfrac{3\,C\,(m_1+m_2)\cos\psi}{2\,\pi R^5}\left(\operatorname{sen}(\varphi - 2\,\theta) - \dfrac{5}{2}\cos\psi \operatorname{sen}(2\,\varphi - 2\,\theta)\dfrac{x}{R}\right) \\
E_y = \dfrac{3\,C\,(m_1+m_2)\cos\psi}{2\,\pi R^5}\left(\cos(\varphi - 2\,\theta) - \dfrac{5}{2}\cos\psi \operatorname{sen}(2\,\varphi - 2\,\theta)\dfrac{y}{R}\right) \\
E_z = \dfrac{3\,C\,(m_1+m_2)\cos\psi}{2\,\pi R^5}\left(-\dfrac{5}{2}\cos\psi \operatorname{sen}(2\,\varphi - 2\,\theta)\dfrac{z}{R}\right).
\end{cases}
$$

Posto:

$$
\frac{3\,C\,(m_1+m_2)\cos\psi}{2\,\pi R^5} = H' \quad , \quad \frac{5}{2} H' \cos\psi = H'',
$$

potremo decomporre il vettore avente per componenti E_x, E_y, E_z in due vettori E', E'' aventi rispettivamente per componenti:

$$
E'_x = H' \operatorname{sen}(\varphi - 2\,\theta) \quad , \quad E'_y = H' \cos(\varphi - 2\,\theta) \quad , \quad E'_z = 0
$$

$$
E''_x = H'' \operatorname{sen}(2\,\theta - 2\,\varphi)\frac{x}{R} \quad , \quad E''_y = H'' \operatorname{sen}(2\,\theta - 2\,\varphi)\frac{y}{R},
$$

$$
E''_z = H'' \operatorname{sen}(2\,\theta - 2\,\varphi)\frac{z}{R}.
$$

Prendiamo l'origine dei vettori E' ed E'' in M. Il primo di essi giacerà costantemente in un piano parallelo ad xy, avrà la grandezza costante H' e ruoterà intorno ad M colla velocità angolare $2\,d\theta/dt$, cioè con velocità doppia di quella con cui ruota il vettore SP, e nello stesso verso di questo.

Inoltre quando $\theta = \varphi$, oppure $\theta = \pi + \varphi$ i due vettori E' ed SP saranno fra loro ortogonali.

Il secondo vettore E'' avrà costantemente la direzione OM e cambierà armonicamente di grandezza e di verso con il periodo stesso con cui avviene la rotazione di E'. Esso sarà nullo quando $\theta = \varphi$, oppure $\theta = \pi + \varphi$.

Come è facile riconoscere, potremo quindi riguardare E'' come risultante di due vettori di grandezza costante eguali ad $H''/2$ ruotanti in verso opposto in un piano passante per OM. Questo piano potrà prendersi il piano normale ad xy condotto per OM.

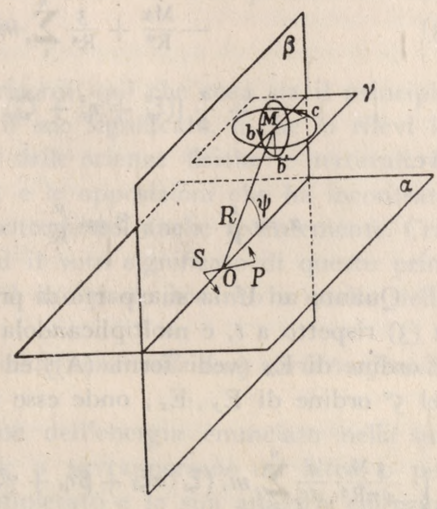

Fig. 3.

Dalle formule (B) può dunque dedursi la legge seguente del flusso di energia in un punto M qualunque dello spazio tale che R sia grande rispetto a ρ_1 e ρ_2, mentre ψ sia sufficientemente discosto da $\pi/2$ (ved. fig. 3).

Conduciamo un piano β *per* MO *normale al piano invariabile* α, *ed un piano* γ *parallelo al piano invariabile. Il flusso di energia in* M *potrà considerarsi come risultante di tre vettori di grandezza costante di cui due eguali*

Mb, Mb', *ruotano in senso inverso nel piano* β *con velocità angolare doppia di quella con cui* P *ed* S *ruotano intorno ad* O, *mantenendosi simmetrici rispetto ad* OM, *mentre uno* Mc *ruota colla stessa velocità angolare degli altri due vettori nel piano* γ *nel verso secondo cui ruota la retta* PS.

I tre vettori sono normali ad OM *ogniqualvolta i punti* P *ed* S *attraversano il piano* β.

La grandezza del vettore Mc *è in ragione inversa della quinta potenza della distanza* OM *ed in ragione diretta del coseno dell'angolo* ψ *che* OM *forma col piano invariabile, mentre il rapporto dei vettori* Mb *e* Mb' *a* Mc *è* $\frac{5}{4}\cos\psi$.

8. La legge che il flusso di energia è a distanza infinita infinitesimo del 5° ordine rispetto alla distanza dalla origine fissa, vale in tutti i casi ed è facile ottenere, nello sviluppo delle componenti del flusso di energia per le potenze dell'inversa della distanza dall'origine, le parti del 5° ordine.

Riprendiamo a tal fine le notazioni dell'Art. 2, e sviluppiamo $\partial U/\partial x$ per le potenze di $1/R$, denotando con R la distanza del punto potenziato dall'origine, che supporremo essere il baricentro del sistema. Se tralasciamo i termini di grado superiore al 2° in ξ_i, η_i, ζ_i, e osserviamo che i termini di 1° grado si annullano, perché $\Sigma m_i\,\xi_i = \Sigma m_i\,\eta_i = \Sigma m_i\,\zeta_i = 0$, otterremo l'espressione:

$$(3)\qquad -\frac{M\alpha}{R^2}+\frac{3}{R^4}\sum_1^n{}_i\, m_i\Big\{\xi_i(\alpha\xi_i+\beta\eta_i+\gamma\zeta_i)$$
$$+\frac{\alpha}{2}\left[(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2)-5(\alpha\xi_i+\beta\eta_i+\gamma\zeta_i)^2\right]\Big\}$$

ove:

$$\alpha=\frac{x}{R}\quad,\quad\beta=\frac{y}{R}\quad,\quad\gamma=\frac{z}{R}\quad\text{e}\quad M=\sum_1^n{}_i\, m_i.$$

Quanto ad U la sua parte di primo ordine sarà M/R, quindi derivando la (3) rispetto a t, e moltiplicandola per $M/4\pi R$, avremo subito la parte del 5° ordine di E_x (vedi form. (A)) ed in modo analogo si otterranno le parti del 5° ordine di E_y, E_z, onde esse saranno espresse dalle formule seguenti:

$$(C)\quad\begin{cases}\dfrac{3M}{4\pi R^5}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\sum_1^n{}_i\, m_i\Big\{\xi_i(\alpha\xi_i+\beta\eta_i+\gamma\zeta_i)+\frac{\alpha}{2}\left[(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2)-5(\alpha\zeta_i+\beta\eta_i+\gamma\zeta_i)^2\right]\Big\}\\[2ex]\dfrac{3M}{4\pi R^5}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\sum_1^n{}_i\, m_i\Big\{\eta_i(\alpha\xi_i+\beta\eta_i+\gamma\zeta_i)+\frac{\beta}{2}\left[(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2)-5(\alpha\xi_i+\beta\eta_i+\gamma\zeta_i)^2\right]\Big\}\\[2ex]\dfrac{3M}{4\pi R^5}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\sum_1^n{}_i\, m_i\Big\{\zeta_i(\alpha\xi_i+\beta\eta_i+\gamma\zeta_i)+\frac{\gamma}{2}\left[(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2)-5(\alpha\xi_i+\beta\eta_i+\gamma\zeta_i)^2\right]\Big\}.\end{cases}$$

Da queste formule potrebbero anche facilmente ricavarsi le (B).