# XXXVII.

## SUL FLUSSO DI ENERGIA MECCANICA (*)

« Nuovo Cimento », ser. 4, vol. X, 1899, pp. 337-359.

Mi permetto di tener parola in questa riunione della nostra Società di uno studio che ha formato il soggetto di alcune mie ricerche in questo anno, cioè della propagazione e del flusso della energia meccanica.

Io prendo la libertà di intrattenere sopra esso i miei Colleghi non tanto per render loro conto del lieve contributo che ho apportato alla questione, quanto per far conoscere e divulgare la questione stessa, la quale, sebbene abbia formato l'oggetto di vari studi di più autori, pure è ben lungi dall'essere esaurita; e per le sue applicazioni, come per la sua importanza filosofica, è degna di formar l'oggetto di svariate ricerche e di profonde meditazioni: onde m'auguro che le poche parole che dirò possano eccitare altri ad occuparsi di questo argomento.

È evidentemente inutile che io ricordi qui che cosa sia il principio della conservazione dell'energia, quale il suo significato, o che io rilevi la sua enorme importanza in ogni ramo delle scienze fisiche e naturali. È pure inutile che io ricordi le difficoltà e le opposizioni che ha incontrato dapprima, e la critica sagace a cui fu sottomesso anche recentemente. Critica utile che ha rivelato la portata ed il vero significato di questo principio, il quale ha preso nella scienza il suo posto accanto a quello della conservazione della materia.

*Così la materia come la energia si conservano nelle loro varie trasformazioni.*

Ma al principio della conservazione dell'energia enunciato nella sua forma primitiva è venuto recentemente a sovrapporsene un altro, o per meglio dire il principio stesso è stato completato e la sua analogia col principio della conservazione della materia è divenuta in tal modo più stretta.

Tutti noi sentiamo continuamente dire che l'energia è qualche cosa che si acquista e che si distribuisce al pari delle varie sostanze. È naturale quindi che sia sorto il concetto che la energia debba essere, come la materia, localizzata in certe parti piuttostoché in certe altre dello spazio. Questo nuovo principio di cui parlo è quello che prende il nome di *principio della localiz-*

(*) Conferenza letta in Como nella Seduta del 21 settembre 1899 della Società Fisica Italiana.

www.rcin.org.pl

*zazione dell'energia* e ad esso si associa lo studio della maniera di cambiar luogo dell'energia, ossia del muoversi di essa, o, come si dice ordinariamente, del *flusso dell'energia*, giacché si ammette, al pari che per la materia, che la energia non possa sparire da una data regione dello spazio per apparire in un'altra, senza avere attraversato delle regioni intermedie. Precisamente il trasporto della energia avviene con continuità come il moto della materia.

Così, quando la energia calorifica solare passa dal sole alla terra, essa deve attraversare le regioni intermedie e quindi deve in questo passaggio localizzarsi successivamente nello spazio interposto fra l'astro del giorno ed il nostro pianeta.

Fu nel 1884 che il fisico inglese POYNTING pubblicò nelle *Phylosophical Transactions* di Londra la sua Memoria sul moto dell'energia nel campo elettromagnetico. Essa segna una data memorabile, giacché sotto una forma estremamente semplice egli espresse la legge con cui può ammettersi che l'energia elettromagnetica fluisca.

Le idee di FARADAY e di MAXWELL rovesciavano i vecchi concepimenti che facevano avvenire i fenomeni elettrici nei conduttori e ne trasportavano la sede nel dielettrico. Ora è nel dielettrico che, secondo la legge di POYNTING, la energia fluisce in ogni punto in senso normale alla forza elettrica ed a quella magnetica.

Non starò ad approfondire questo concetto ormai ben noto ad ogni fisico; non posso però tralasciare di ricordare a questo proposito la lucida e profonda esposizione di esso e di tutte le questioni affini che formò l'oggetto di uno splendido discorso inaugurale all'Accademia dei Lincei dell'illustre e compianto nostro collega FERRARIS.

Ma lo studio del flusso di energia non poteva mantenersi ristretto ai soli fenomeni elettromagnetici. Il WIEN in un lavoro del maggiore interesse che venne inserito negli « Annali » di WIEDEMANN ha trattato la questione in maniera sistematica, seguendo il localizzarsi ed il muoversi della energia non solo nel caso di POYNTING, ma in quelli della elasticità, della idrodinamica e del calore.

Un caso però era lasciato fuori, anzi ritenuto come non suscettibile di esser trattato: quello delle forze newtoniane e dei sistemi discontinui. Consideriamo, per fissare le idee, il sistema solare come sottratto ad azioni esterne. Si ha in questo caso un moto di materia consistente nel movimento degli astri che lo costituiscono i quali subiscono nel tempo stesso delle alterazioni nella loro costituzione, mentre le forze attrattive che agiscono su di essi variano in ogni istante.

Il sistema quindi considerato è discontinuo e le diverse parti hanno stato d'aggregazione diverso.

Alcuni corpi, o parti dei corpi costituenti il sistema, sono solidi, altri liquidi ed altri aeriformi. Alcuni di questi si trovano a contatto fra loro, altri possono concepirsi separati da porzioni di spazio non riempito di ma-

www.rcin.org.pl

teria. La densità della distribuzione di materia è per conseguenza discontinua, come le velocità dei punti possono essere discontinue lungo le superficie che formano i limiti di separazione delle varie parti fra loro eterogenee del sistema. Le forze agenti sono le forze newtoniane di attrazione fra i vari elementi di materia e le forze elastiche interne.

È possibile stabilire in questo caso delle leggi atte a rappresentare come fluisce l'energia meccanica corrispondente in tutto lo spazio, ammesso che essa non si trasformi in altre energie e per conseguenza si conservi costante?

È fuor di dubbio che il caso esaminato è così fondamentale che il sapere se è possibile dare o no una risposta alla precedente domanda è una questione che è necessario affrontare. Se alla domanda che ci siamo fatta fosse impossibile dare una risposta, ciò costituirebbe non solo una enorme lacuna, ma noi saremmo costretti a cambiare totalmente il modo di concepire l'andamento di tutti i fenomeni della natura, ossia l'intero sistema di filosofia naturale che si basa sul concetto di trasporto dell'energia dovrebbe essere abbandonato.

Ci proponiamo ora di provare come la domanda fatta sia suscettibile di una risposta affermativa e nello stesso tempo indicheremo quali sono le difficoltà che si incontrano. Mostreremo come sia possibile esprimere il flusso di energia in ogni punto mediante il potenziale, la variazione della forza newtoniana col tempo, la velocità del moto della materia e le tensioni che si esercitano in quel punto, con *elementi* cioè *relativi tutti al solo punto considerato*.

Prima ancora di attaccare il problema è necessario peraltro fare una osservazione preliminare sopra un punto che abbiamo lasciato finora da parte, sebbene si riferisca alla questione del flusso di energia esaminata in tutta la sua generalità.

È la questione di trovare il flusso di energia corrispondente ad un fenomeno naturale qualsiasi una questione determinata?

È facile riconoscere che, anche dopo ammessa una legge che localizzi l'energia, il problema è di per sé indeterminato. Infatti immaginiamo, per esempio, un flusso qualsiasi il quale non alteri in ogni luogo la quantità della materia fluente (come sarebbe il flusso di un fluido incompressibile) e riguardiamolo come un flusso di energia. Ciò premesso supponiamo di aver determinato il flusso di energia corrispondente ad un certo fenomeno. Se lo componiamo con quello precedente, evidentemente il nuovo flusso potrà sempre farsi corrispondere allo stesso fenomeno. Vediamo dunque che, se il problema è suscettibile di esser risoluto, si avranno infinite soluzioni.

Una tale indeterminazione non deve portarci però a ritenere che la soluzione della questione sia illusoria. Una analoga indeterminazione è la sorte di tutte le interpretazioni meccaniche dei fenomeni naturali.

Un'acuta e geniale osservazione del POINCARÉ mostra per esempio che ogni qual volta esiste una spiegazione meccanica di una questione fisica

www.rcin.org.pl

ne sussistono pure infinite altre. Ricordiamo ancora che la soluzione giustamente famosa data dal MAXWELL del problema di determinare le tensioni di un mezzo elastico capaci di spiegare le azioni elettrostatiche non è che una delle infinite soluzioni che la questione stessa comporta. Eppure la indeterminazione di quest'ultima questione, come di quelle di dare dei modelli meccanici dei fenomeni elettrici o calorifici non ha trattenuto dal cercare di risolverle, dal discuterne le soluzioni e, quello che preme di più, non impedì di ottenere delle preziose ed utili conseguenze dalle soluzioni stesse.

D'altra parte per il problema che a noi preme di esaminare possiamo osservare che esso è indeterminato, ma che è sufficiente trovare una soluzione, perché tutte le altre possano immediatamente dedursene; riguardata sotto questo aspetto la questione assume un carattere del tutto positivo.

Sgombrata così la via da questa difficoltà di indole generale, veniamo a discutere più davvicino il nostro problema; quello cioè del flusso di energia in un sistema meccanico analogo al sistema planetario.

La energia meccanica che noi dobbiamo seguire nelle sue varie trasformazioni consta della *energia cinetica*, di quella *elastica* e della *energia potenziale* delle forze newtoniane che agiscono fra le varie parti del sistema. Il localizzare le due prime specie di energia è cosa che non presenta alcuna difficoltà, giacché la forza viva e la energia elastica avranno sede nelle particelle mobili o deformate; ma la difficoltà nasce allorché si deve localizzare la energia potenziale newtoniana.

Sarà sufficiente lo spazio ove si trova la materia attraente, oppure dovremo localizzarla anche esteriormente ad essa?

Possiamo senz'altro rispondere che dovremo attenerci a quest'ultima ipotesi.

È vero che in alcuni casi particolari, come per esempio in quello di due sfere invariabili che cadono l'una sull'altra in virtù della loro attrazione, si potrebbe immaginare distribuita l'energia di posizione entro le due sfere in modo che quella contenuta entro ognuna venisse man mano a trasformarsi in energia cinetica relativa alla sfera stessa. Ma si ingannerebbe chi credesse che ciò fosse suscettibile di essere esteso al caso generale.

Basterebbe esaminare tre anziché due sfere, per convincersi della impossibilità di distribuire la energia potenziale entro di esse dipendentemente dalle loro masse e posizioni in modo che avvenisse entro ogni sfera la trasformazione della energia potenziale in cinetica o viceversa. Infatti, se ciò fosse possibile, dovrebbe esistere una relazione generale fra la velocità di ogni sfera e la sua posizione, relazione che toglierebbe al così detto problema dei tre corpi le sue ben note difficoltà. Ora questa relazione di fatto non esiste.

Volendo dunque abbracciare il sistema più generale è necessario immaginare in tutti i casi distribuita la energia potenziale in tutto lo spazio; anche nelle parti di esso ove non si trova la materia attraente.

www.rcin.org.pl

Una tal cosa non deve maravigliarci, e tanto meno riescirci nuova; ed infatti che la energia possa trovarsi anche ove si ritiene che la materia non esiste deve pure ammettersi nello studio della energia calorifica e di quella luminosa od elettrica.

Mi sforzerò ora di mostrare in una maniera del tutto elementare come la detta distribuzione di energia possa ottenersi.

La energia potenziale newtoniana si misura sommando tutti gli elementi di massa moltiplicati per la metà del potenziale a cui ciascuno di essi si trova, e attribuendo quindi alla somma il segno negativo.

Supponiamo ora di percorrere un tubo sottilissimo di forza nel verso di questa. Il prodotto della sua sezione per la intensità della forza unitaria (cioè agente sull'unità di massa) si mantiene costante finché il tubo attraversa una regione esterna alle masse; ma se si attraversa una regione ove si trova materia, il detto prodotto decresce proporzionalmente alla massa attraversata, per modo che prese due sezioni vicinissime (fig. 1) $\omega_1$ e $\omega_2$, ove la forza è rispettivamente $F_1$ e $F_2$, la differenza $F_2\,\omega_2 - F_1\,\omega_1$ è eguale a $-4\,\pi m$, essendo $m$ la massa contenuta fra $\omega_1$ e $\omega_2$. Dunque se U è il potenziale nel punto medio O, converrà fare la somma dei termini

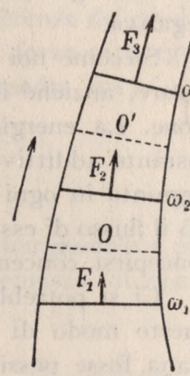

Fig. 1.

$$\frac{F_2\,\omega_2 - F_1\,\omega_1}{4\,\pi}\,\frac{U}{2},$$

estendendola a tutti gli elementi dello spazio.

Prendiamo una sezione $\omega_3$ che disti da $\omega_2$ quanto questa dista da $\omega_1$, ed in essa la forza sia $F_3$; avremo un nuovo termine

$$\frac{F_3\,\omega_3 - F_2\,\omega_2}{4\,\pi}\,\frac{U'}{2},$$

essendo U' il valore del potenziale nel punto medio O' situato fra $\omega_2$ e $\omega_3$.

Riunendo le due parti contenenti $\omega_2$, otterremo il termine

$$\frac{F_2\,\omega_2}{8\,\pi}\,(U - U').$$

Ora se la distanza piccolissima OO' si chiama $\delta$, avremo che

$$\frac{U' - U}{\delta} = F_2$$

e perciò l'espressione precedente diverrà

$$-\frac{F_2^2}{8\,\pi}\,\omega_2\,\delta.$$

Se conduciamo per O ed O' le sezioni normali al tubo di forza, $\omega_2\delta$ ci rappresenterà il volume S compreso fra esse, e quindi il termine precedente

www.rcin.org.pl

si scriverà

$$(1) \qquad -\frac{F_2^2}{8\pi} S.$$

La somma di tutti i termini analoghi a questo ci misurerà l'energia potenziale newtoniana.

Vediamo dunque che si ha un modo di localizzare in ogni elemento dello spazio la energia newtoniana dipendentemente soltanto dalla forza che agisce in quel punto, stabilendo che ogni elemento contribuisca per una quantità eguale al proprio volume diviso per $-8\pi$ e moltiplicato pel quadrato della forza stessa.

Non deve recarci sorpresa se otteniamo il risultato che la quantità con cui ogni elemento di spazio contribuisce nella energia potenziale è negativa.

Siccome noi studiamo il flusso di energia, così ciò che preme di considerare, anziché il valore effettivo della quantità di energia, è la sua variazione. La energia potenziale è d'altra parte individuata a meno di una costante additiva arbitraria; noi potremmo dunque supporre, per esempio, aggiunta in ogni elemento una quantità costante di energia senza che perciò il flusso di essa venisse alterato. Con una conveniente aggiunta potrebbe concepirsi concentrata in ogni elemento una quantità positiva di energia.

Ci si potrebbe a questo punto proporre una questione: di vedere se a questo modo di distribuzione nello spazio della energia potenziale newtoniana fosse possibile far corrispondere un meccanismo speciale, sostituibile alle azioni a distanza, atto quindi a spiegarci le attrazioni newtoniane. Ma noi possiamo anche prescindere da qualsiasi ipotesi a questo proposito, come del resto si fa ordinariamente allorché si studia la energia distribuita in un campo elettromagnetico. Non già che la questione non presenti un altissimo interesse, ma la sua discussione ci porterebbe troppo lontani. D'altra parte essa offre una grande difficoltà non ancora, a mia conoscenza, completamente superata.

Ciò premesso, per ottenere la legge del flusso di energia sarà necessario considerare un nuovo vettore, oltre la forza unitaria.

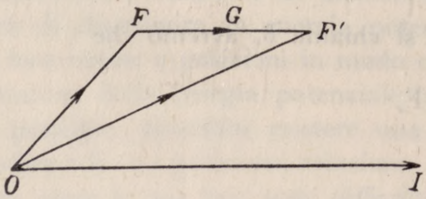

Fig. 2.

Sia F la detta forza agente in O (fig. 2) in un dato istante; dopo decorso un tempo piccolissimo $t$ la forza stessa sarà cambiata in virtù del moto che hanno le varie parti del sistema e sarà divenuta F′. Il vettore $FF' = G$ ci misurerà il mutamento in grandezza e direzione, ossia l'incremento subìto dalla forza durante il tempo $t$, e se dividiamo $FF'$ per $t$ avremo un nuovo vettore che esprimerà *l'incremento unitario della forza* per rapporto al tempo e che potremo tirare a partire dal punto O. Noi lo indicheremo con

$$I = \frac{G}{t}. \tag{2}$$

Possiamo dunque immaginare condotto per ogni punto dello spazio questo vettore I, che sarà diverso da punto a punto, e considerando delle linee aventi per tangente in ogni punto questo vettore otterremo un sistema di linee passanti per tutti i punti dello spazio analoghe alle linee di forza, che potremo chiamare le *linee di incremento di forza*, e mediante le quali potremo costruire, anziché dei tubi di forza, dei *tubi di incremento di forza*. Evidentemente anche per questi tubi il prodotto della sezione per l'incremento unitario di forza sarà costante nelle regioni esterne alle masse, mentre in una parte dello spazio riempita di materia (vedi la fig. 4), prese due sezioni $\omega'$, $\omega''$ di un tubo sottilissimo d'incremento di forza, la differenza dei prodotti delle due sezioni per i relativi valori dell'incremento di forza sarà eguale alla quantità di materia $\mu$ che penetra nella regione intermedia fra $\omega'$ e $\omega''$ per unità di tempo moltiplicata per $-4\pi$, cioè

$$I_2\,\omega'' - I_1\,\omega' = -4\pi\mu. \tag{3}$$

Stabilito ciò, misuriamo l'incremento subìto in un tempuscolo $t$ dalla quantità di energia potenziale contenuta in un dato elemento di spazio. Basterà perciò che riferendoci alla formula (1) noi calcoliamo l'incremento subìto dal quadrato della forza unitaria nel tempo $t$. Dal triangolo OFF' (fig. 3) segue che

$$F'^2 - F^2 = 2\,FG\cos(\widehat{FG}) + G^2$$

e, trascurando il secondo termine, che è infinitamente piccolo rispetto al primo, avremo

$$F'^2 - F^2 = 2\,FG\cos(FG) = 2fG,$$

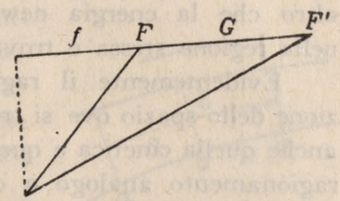

Fig. 3.

chiamando $f$ la proiezione della forza F sopra la direzione G.

Dunque l'incremento subìto nel tempo $t$ dalla quantità di energia potenziale contenuta in un elemento S di volume dello spazio sarà

$$-\frac{1}{4\pi}fG\cdot S$$

e l'incremento unitario $e_p$ per rapporto al tempo si otterrà dividendo per $t$, e quindi siccome [vedi (2)] $G/t = I$, risulterà

$$e_p = -\frac{1}{4\pi}fI\cdot S.$$

Prendiamo per elemento S una porzione di tubo d'incremento di forza compresa fra due sezioni ortogonali $\omega'$ e $\omega''$ situate a una distanza $\delta$ pic-



www.rcin.org.pl

colissima fra loro. Il volume S sarà il prodotto della sezione media $\omega$ per $\delta$, quindi la espressione precedente si scriverà

$$e_p = -\frac{1}{4\pi} f I \omega \delta .$$

Ma $f\delta$ è eguale alla differenza del potenziale $U_2$ in $\omega''$, e del potenziale $U_1$ in $\omega'$, perciò avremo

$$(4) \qquad e_p = \frac{1}{4\pi}(U_1 - U_2)\, I\omega.$$

Supponiamo ora di trovarci in una regione dello spazio esterna alle masse attraenti. Il prodotto $I\omega$ sarà costante lungo il tubo e in conseguenza potremo sostituirlo con $I_1\omega'$ o con $I_2\omega''$ essendo $I_1$ e $I_2$ i valori corrispondenti alle due sezioni e otterremo

$$(5) \qquad e_p = \frac{1}{4\pi} U_1 I_1 \omega' - \frac{1}{4\pi} U_2 I_2 \omega''.$$

Potremo dunque immaginare che attraverso $\omega'$ entri la quantità di energia $U_1 I_1 \omega'/4\pi$, e attraverso $\omega''$ esca la quantità $U_2 I_2 \omega''/4\pi$, ossia che l'energia fluisca lungo i tubi di incremento di forza con una intensità per unità di area eguale al prodotto dell'incremento unitario di forza pel potenziale diviso per $4\pi$.

Ora, nella regione esterna alle masse, che abbiamo esaminata, non esiste altro che la energia newtoniana. La legge dunque del flusso di energia nella regione stessa è trovata.

Evidentemente il ragionamento fatto non è più valido per una porzione dello spazio ove si trova materia. Ivi esiste, oltre l'energia potenziale, anche quella cinetica e quella elastica; ma come vedremo ora, ripetendo un ragionamento analogo a quello che abbiamo fatto, colle necessarie modificazioni, si trova che il flusso totale di energia è risultante di tre flussi uno dei quali è quello precedentemente trovato e che chiameremo il *primo flusso* e gli altri due (*secondo* e *terzo flusso*) avvengono rispettivamente lungo le linee di moto della materia e lungo altre linee dipendenti dalle tensioni elastiche.

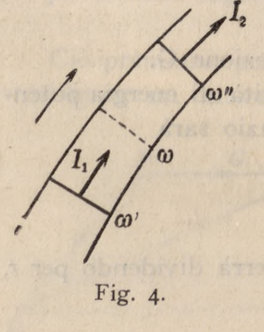

Fig. 4.

Riprendiamo perciò la formula (4); se noi consideriamo una regione ove si trova materia il prodotto $I\omega$ non si conserva più costante lungo il tubo di incremento di forza (ved. fig. 4) onde la espressione (4) non potrà più assumere la forma (5); però sarà facile trovare i termini che si dovranno aggiungere al secondo membro di questa equazione affinché essa possa sussistere. Potremo infatti scrivere

$$e_p = \frac{1}{4\pi} U_1 I_1 \omega' - \frac{1}{4\pi} U_2 I_2 \omega'' - \frac{1}{4\pi} U_1 (I_1\omega' - I\omega) - \frac{1}{4\pi} U_2 (I\omega - I_2\omega''),$$

www.rcin.org.pl

come si può verificare subito osservando che, dopo sviluppate le parentesi, il primo termine si elimina col terzo ed il secondo coll'ultimo.

Se nei due ultimi termini ad $U_1$ e $U_2$, sostituiamo il valore medio U del potenziale nello spazio compreso fra $\omega'$ e $\omega''$ altereremo l'espressione precedente di quantità trascurabili, giacché $U_1$ e $U_2$ sono moltiplicati per quantità infinitamente piccole; per conseguenza si potrà scrivere

$$e_p = \frac{1}{4\pi} U_1 I_1 \omega' - \frac{1}{4\pi} U_2 I_2 \omega'' - \frac{1}{4\pi} U [I_1 \omega' - I\omega + I\omega - I_2 \omega'']$$

ed, eliminando i termini simili entro l'ultime parentesi, avremo

$$e_p = \frac{1}{4\pi} U_1 I_1 \omega' - \frac{1}{4\pi} U_2 I_2 \omega'' - \frac{1}{4\pi} U (I_1 \omega' - I_2 \omega'') .$$

Ma [vedi (3)] $\dfrac{I_1 \omega' - I_2 \omega''}{4\pi} = \mu$, quindi

$$e_p = \frac{1}{4\pi} U_1 I_1 \omega' - \frac{1}{4\pi} U_2 I_2 \omega'' - U\mu .$$

Vale a dire

$$\frac{1}{4\pi} U_1 I_1 \omega' - \frac{1}{4\pi} U_2 I_2 \omega'' = e_p + U\mu .$$

Questa formula prova che quel flusso di energia che abbiamo chiamato il *primo flusso di energia*, allorché attraversa una regione ove si trova la materia, non determina solo la variazione della energia potenziale in ogni elemento, ma lascia ancora un residuo che è misurato dalla quantità $U\mu$, cioè dal valore del potenziale in ogni elemento moltiplicato per l'incremento, di massa relativo all'unità di tempo. Vedremo fra poco come questo residuo venga eliminato dagli altri flussi di energia.

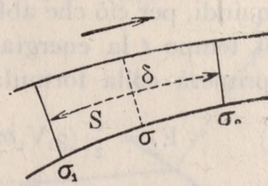

Fig. 5.

Consideriamo ora le *linee di moto* della materia, quelle cioè che hanno in ogni punto per tangente la velocità della particella che attraversa quel punto ed immaginiamo tracciata una porzione S di un tubo sottilissimo formato con queste linee (*tubo di movimento*) compresa fra due sezioni ortogonali vicinissime $\sigma_1$ e $\sigma_2$ (fig. 5).

L'incremento $E_c$ che subisce in un tempuscolo $t$ la energia cinetica della materia contenuta in S verrà data dalla forza viva della materia che penetra attraverso la sezione $\sigma_1$, diminuita di quella che esce attraverso la sezione $\sigma_2$, e finalmente dal lavoro eseguito dalle forze che agiscono sugli elementi di materia contenuti in S.

Se chiamiamo $\rho_1$ e $V_1$ la densità e la velocità della materia in $\sigma_1$, e $\rho_2$ e $V_2$ le analoghe quantità in $\sigma_2$, la quantità di materia, che penetra nel tempo $t$ attraverso $\sigma_1$, sarà $\rho_1 V_1 t \sigma_1$. Quindi la quantità di energia cinetica che entra attraverso quest'area sarà

$$\frac{1}{2} (\rho_1 V_1 t \sigma_1) V_1^2$$



www.rcin.org.pl

e analogamente quella che esce attraverso $\sigma_2$ sarà

$$\frac{1}{2}(\rho_2 V_2 t \sigma_2) V_2^2 .$$

Per calcolare il lavoro $L_n$ eseguito dalle forze newtoniane agenti sull'elemento S basterà moltiplicare la massa dell'elemento $\rho S$, indicando con $\rho$ la densità media, per la componente $\varphi$ della forza unitaria presa nel verso del movimento (ossia nel verso del tubo) e pel cammino percorso nel tempo $t$ cioè $Vt$, essendo V la velocità media.

Ma $\varphi$ si misurerà col rapporto $(U_2 - U_1)/\delta$, chiamando $U_2$ e $U_1$ i valori del potenziale in $\sigma_2$ e $\sigma_1$ e $\delta$ la loro distanza; perciò il detto lavoro si scriverà

$$L_n = \rho S \cdot \frac{U_2 - U_1}{\delta} V t .$$

Ora, se con $\sigma$ denotiamo la sezione media, S sarà eguale a $\sigma\delta$ e la espressione precedente diverrà

$$L_n = \rho\sigma (U_2 - U_1) V t .$$

A questo lavoro dovremo aggiungere quello delle forze elastiche, il quale sarà misurato dalla diminuzione $-E_e$ della energia elastica nell'elemento S e dal lavoro $L_e$ eseguito dalle tensioni che agiscono sulla superficie che limita l'elemento stesso. Dunque il lavoro totale eseguito da tutte le forze che agiscono sugli elementi di materia contenuti in S sarà

$$L_n - E_e + L_e$$

e quindi, per ciò che abbiamo detto precedentemente l'incremento che subisce nel tempo $t$ la energia cinetica della materia contenuta nello spazio S si esprimerà colla formula

$$(6) \qquad E_c = \frac{1}{2}(\rho_1 V_1 t \sigma_1) V_1^2 - \frac{1}{2}(\rho_2 V_2 t \sigma_2) V_2^2 + [L_n - E_e + L_e] .$$

Ora la espressione $L_n = \rho\sigma (U_2 - U_1) V t$ è suscettibile di una trasformazione analoga ad una fatta precedentemente. Possiamo infatti scriverla

$$\rho_2 \sigma_2 U_2 V_2 t - \rho_1 \sigma_1 U_1 V_1 t + (\rho_1 \sigma_1 V_1 t - \rho\sigma V t) U_1 + (\rho\sigma V t - \rho_2 \sigma_2 V_2 t) U_2$$

e se negli ultimi due termini poniamo il valore medio U del potenziale in luogo di $U_1$ e $U_2$, alterando così l'espressione di quantità trascurabili, essa diverrà

$$(7) \qquad \rho_1 \sigma_2 U_2 V_2 t - \rho_1 \sigma_1 U_1 V_1 t + U (\rho_1 \sigma_1 V_1 t - \rho_2 \sigma_2 V_2 t).$$

Ma poco fa abbiamo detto che $\rho_1 \sigma_1 V_1 t$ e $\rho_2 \sigma_2 V_2 t$ rappresentano le quantità di materia che rispettivamente entrano in S ed escono da questo spazio nel tempo $t$, attraverso $\sigma_1$ e $\sigma_2$, dunque la differenza $\rho_1 \sigma_1 V_1 t -$ $- \rho_2 \sigma_2 V_2 t$ misura l'incremento di massa nel tempo stesso. Se quindi $\mu$ denota l'incremento di massa relativo all'unità di tempo, la precedente differenza sarà eguale a $\mu t$, e l'espressione (7) cioè $L_n$ potrà scriversi

$$\rho_2 \sigma_2 U_2 V_2 t - \rho_1 \sigma_1 V_1 t + U \mu t$$

www.rcin.org.pl

e, sostituendo nella formula (6) ad $L_n$ questo valore, quindi raccogliendo nel secondo membro i termini che contengono $\sigma_1$ e $\sigma_2$, avremo

$$E_c + E_e - U\mu t - L_c = \sigma_1 t\left(\frac{1}{2}V_1^2 - U_1\right)V_1\rho_1 - \sigma_2 t\left(\frac{1}{2}V_2^2 - U_2\right)V_2\rho_2 .$$

Dividendo per $t$ e chiamando rispettivamente $e_c$, $e_e$ gli incrementi unitari (relativamente al tempo) della energia cinetica ed elastica, ossia i rapporti $E_c/t$, $E_e/t$ la formula precedente diverrà

$$e_c + e_e - U\mu - \frac{L_e}{t} = \sigma_1\left(\frac{1}{2}V_1^2 - U_1\right)V_1\rho_1 - \sigma_2\left(\frac{1}{2}V_2^2 - U_2\right)V_2\rho_2 .$$

Consideriamo ora il *secondo flusso di energia*. Ammetteremo che esso percorra i *tubi di moto* con una intensità (per unità di area) data da

$$\left(\frac{1}{2}V^2 - U\right)V\rho .$$

Evidentemente questo flusso sussisterà solo nelle regioni occupate da materia.

Il secondo membro della equazione precedente misurerà la quantità di energia che, in virtù di questo secondo flusso, entra nell'unità di tempo attraverso $\sigma_1$, diminuita di quella che esce da $\sigma_2$, onde esaminando il primo membro potremo concludere che il secondo flusso di energia attraversando una regione dello spazio determinerà non solo la somma della variazione $e_c$ della energia cinetica e di quella $e_e$ della energia elastica, ma oltre a ciò darà anche un residuo costituito dai due termini $-U\mu - L_e/t$.

Quindi se componiamo il secondo flusso di energia col primo flusso di energia e teniamo presente che questo ci lascia un residuo $U\mu$, otterremo un flusso che fornirà ad ogni elemento di spazio l'incremento della energia potenziale di quella elastica e di quella cinetica, oltre ad un residuo $-L_e/t$, giacché gli altri due residui $U\mu$ e $-U\mu$ dei due flussi si elimineranno fra loro.

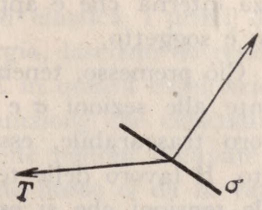

Fig. 6.

Resta ora a provare che anche l'ultimo residuo può eliminarsi considerando un terzo flusso di energia.

In altri termini basterà provare che il lavoro $L_e/t$ delle tensioni (ridotte all'unità di tempo) può considerarsi come equivalente ad un flusso di energia.

A tal fine immaginiamo condotto per ogni punto dello spazio occupato da materia un elemento di piano $\sigma$ normale alla direzione della velocità V (fig. 6) e consideriamo la tensione unitaria T (ridotta cioè all'unità d'area) che si esercita sopra $\sigma$ dalla parte opposta a quella secondo la quale la materia si sposta.

Supposto condotto il vettore T per ogni punto e le linee che hanno in ogni punto per tangente T, avremo un sistema di linee analoghe alle linee di forza e di moto che si potranno chiamare le *linee di tensione*, ed in corrispondenza ad esse potremo considerare i *tubi di tensione*.

www.rcin.org.pl

Esaminiamo una porzione infinitesima S di uno di questi tubi sottilissimi compresa fra le sezioni $\sigma$ e $\sigma'$ rispettivamente normali alle direzioni del movimento V e V' (fig. 7).

Le tensioni T e $T_1$ unitarie esercitantisi sopra $\sigma$ e $\sigma'$ dalla parte esterna ad S avranno la direzione del tubo, quindi lateralmente le tensioni $\tau$ e $\tau'$ dovranno esercitarsi parallelamente a $\sigma$ e $\sigma'$ (a meno di inclinazioni trascu-

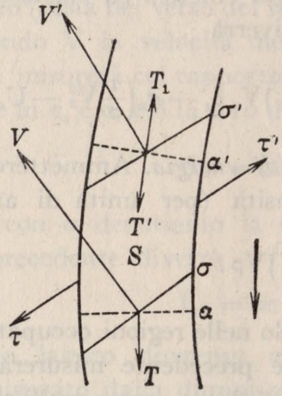

Fig. 7.

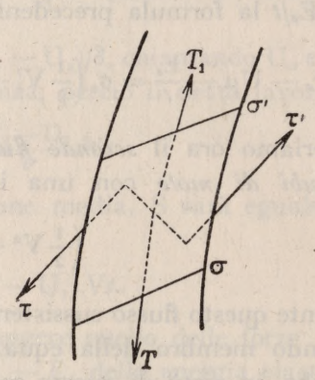

Fig. 8.

rabili), come è indicato nella fig. 7; altrimenti se ciò non fosse (come viene rappresentato nella fig. 8), componendo le tensioni laterali si avrebbe una coppia risultante e quindi le tensioni stesse non potrebbero equilibrare la forza interna che è applicata all'elemento in virtù delle attrazioni a cui esso è soggetto.

Ciò premesso, tenendo conto che la velocità del moto ha luogo normalmente alle sezioni $\sigma$ e $\sigma'$, si avrà che le tensioni laterali eseguiranno un lavoro trascurabile, essendo esse sensibilmente normali alla direzione del moto. Il lavoro delle tensioni si ridurrà dunque soltanto a quello eseguito dalle tensioni che si esercitano sopra $\sigma$ e $\sigma'$. Queste sono rispettivamente $T\sigma$ e $T_1\sigma'$; i cammini percorsi dai loro punti d'applicazione in un tempuscolo $t$, sono $Vt$ e $V't$, essendo V e V' le velocità del moto in $\sigma$ e $\sigma'$; onde il lavoro stesso nel tempo $t$ sarà (vedi fig. 7)

$$(T\sigma)(Vt)\cos(\widehat{TV}) + (T_1\sigma')(V't)\cos(\widehat{T_1V'}).$$

Prendiamo il vettore T' eguale ed opposto a $T_1$. Esso rappresenterà la tensione che si esercita dalla parte opposta su $\sigma'$, cioè dalla parte opposta a quella secondo cui avviene il moto. La espressione precedente diverrà dunque

$$T\sigma\, Vt\cos(\widehat{TV}) - T'\sigma'\, V't\cos(\widehat{T'V'});$$

ma le sezioni $\alpha$, $\alpha'$ normali al filetto di tensione sono rispettivamente eguali a $-\sigma\cos(TV)$ e a $-\sigma'\cos(T'V')$, quindi essa si scriverà anche

$$T'\alpha'\, V't - T\alpha\, Vt$$

www.rcin.org.pl

e, riducendo questo lavoro delle tensioni all'unità di tempo otterremo

$$T'\alpha' V' - T\alpha V.$$

Immaginiamo ora un flusso di energia percorrente i tubi di tensione nel loro verso colla intensità TV per unità d'area. Sarà il *terzo flusso di energia* ed esso pure, al pari del secondo, risulterà limitato alle regioni ove si trova la materia.

In virtù di questo terzo flusso, attraverso $\alpha'$ entrerà per unità di tempo la quantità di energia $T'V'\alpha'$, e attraverso $\alpha$ ne escirà $TV\alpha$, onde, a cagione dell'ultima formula trovata, il lavoro unitario (rapporto al tempo) delle tensioni che abbiamo precedentemente rappresentato con $L_e/t$ equivarrà a questo terzo flusso di energia.

Se quindi lo componiamo col *primo* e col *secondo flusso di energia*, il flusso risultante produrrà la variazione della *energia newtoniana*, di quella *cinetica* e di quella *elastica*, ossia della *energia meccanica totale* in ogni elemento.

Riassumendo diremo dunque che il flusso di energia meccanica potrà considerarsi dovuto a tre flussi di energia rispettivamente scorrenti lungo i tubi d'incremento di forza, i tubi di moto ed i tubi di tensione. Il primo percorre l'intero spazio, gli altri due sono ristretti alle regioni occupate da materia.

In queste regioni i tre flussi non ci dànno separatamente le variazioni delle tre specie di energia, newtoniana, cinetica ed elastica; i primi due, oltre a fornirci le variazioni di queste specie di energia, lasciano dei residui, ma questi si eliminano fra loro e col terzo flusso. È in questa eliminazione che si rivela l'intima relazione fra i tre flussi, la funzione che ciascuno di essi compie e la loro ragion d'essere simultanea nelle regioni occupate da materia. Solo nella regione libera di materia, il primo flusso ci dà la variazione di energia newtoniana in ogni elemento.

I risultati ottenuti possono enunciarsi ancora nei termini seguenti.

Il vettore che rappresenta il flusso di energia meccanica in ogni punto è risultante di tre vettori:

1° del vettore I, cioè dell'incremento unitario di forza, moltiplicato per $U/4\pi$, essendo U il potenziale newtoniano;

2° del vettore V che rappresenta la velocità del moto moltiplicato per $\rho\,(V^2/2 - U)$, essendo $\rho$ la densità della materia;

3° del prodotto della grandezza della velocità V pel vettore T che rappresenta la tensione unitaria elastica, la quale viene esercitata sull'elemento normale alla direzione del moto dalla parte opposta a quella secondo cui la materia si sposta.

Sono queste le leggi fondamentali del flusso di energia nel caso dei sistemi soggetti a forze newtoniane.

www.rcin.org.pl

L'applicazione delle leggi precedenti conduce a vari risultati che presentano una singolare curiosità ed in certi casi hanno un carattere suggestivo evidente.

Così, se ci poniamo a calcolare la quantità totale di energia che in un dato istante penetra attraverso una superficie di livello esterna alle masse, si trova che essa è nulla, ossia che la quantità di energia che vi entra in ogni istante è eguale a quella che ne esce.

Per dimostrare questa proposizione, basterà osservare che, essendo costante il potenziale sopra una superficie di livello, la quantità di energia che vi penetra durante un tempo brevissimo $t$ si otterrà, in virtù delle precedenti leggi, moltiplicando il valore costante del potenziale per $t/4\pi$ e pel flusso totale di incremento di forza esteso a tutta la superficie di livello. Ma il prodotto di $t/4\pi$ per questo flusso di incremento di forza equivale alla variazione subìta durante il tempo $t$ dal rapporto che si ottiene dividendo il flusso totale di forza esteso a tutta la superficie per $4\pi$. Ora questo rapporto non cambia nel tempo $t$, perché esso misura la quantità di materia contenuta nell'interno della superficie di livello, e questa quantità di materia si mantiene invariata durante l'intervallo di tempo considerato, essendo per ipotesi la superficie di livello esterna alle masse. Resta dunque provato che la quantità totale di energia penetrata entro la superficie in un tempo brevissimo è nulla.

Possiamo esaminare il caso che i corpi attraentisi siano sferici e si conservino approssimativamente invariati durante tutto il movimento.

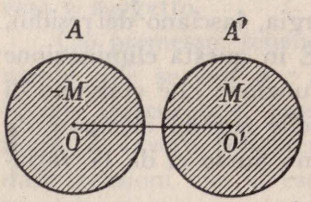

Fig. 9.

È un caso importante, perché si approssima molto a quello dei corpi celesti.

Per avere il flusso di energia bisogna calcolare l'incremento della forza in ogni punto dello spazio. Sia A (fig. 9) una sfera che durante l'intervallo brevissimo di tempo $t$ è giunta in A'. L'attrazione di A equivarrà a quella dell'intera massa M della sfera concentrata nel centro O e quella di A' all'attrazione della stessa massa concentrata in O', onde l'incremento di forza, ossia la differenza fra le due attrazioni, equivarrà alla forza d'attrazione che eserciterebbe la massa M in O' e la massa $-$M in O.

Ora l'azione di queste due masse M e $-$M equivale evidentemente a quella di un elemento magnetico avente la direzione O'O e di momento proporzionale ad M ed allo spostamento (e quindi alla velocità della sfera) sopra l'unità di magnetismo. Perciò possiamo concludere che, se più corpi sferici liberi si muovono sotto l'azione delle loro mutue attrazioni newtoniane, le linee di flusso dell'energia meccanica nello spazio esterno alle masse attraenti coincideranno colle linee di forza magnetiche che si otterrebbero situando al centro d'ogni sfera un elemento magnetico il cui momento fosse eguale e contrario alla quantità di moto d'ogni sfera.

www.rcin.org.pl

Nel caso di due sfere che cadono l'una sull'altra in virtù della loro mutua attrazione riesce molto facile il farsi un'idea di queste linee di flusso dell'energia. Infatti sia S la prima sfera ed S' l'altra; se immaginiamo nel centro O di S un elemento magnetico il cui asse abbia la direzione O'O, potremo facilmente disegnare le corrispondenti linee di forza situate in un

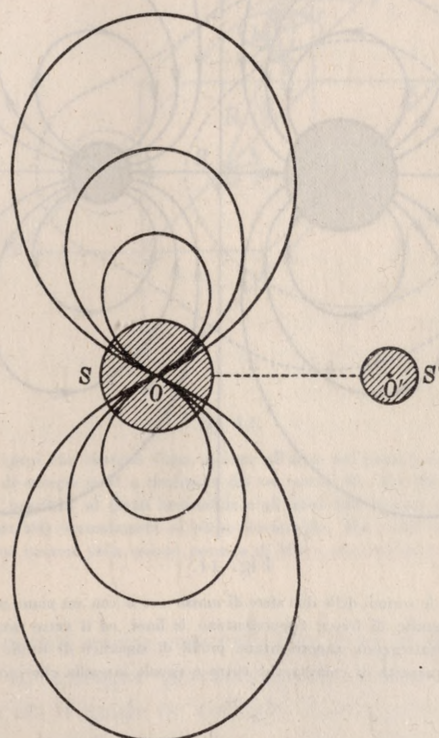


Fig. 10.

piano passante per OO' (fig. 10). Ora noi dobbiamo supporre che anche nel centro O' dell'altra sfera esista un elemento magnetico simmetricamente disposto ed eguale, giacché le quantità di moto delle due sfere debbono essere eguali fra loro.

I sistemi di linee di forza, che si avrebbero se ciascun elemento magnetico esistesse da solo, si perturberanno vicendevomente in virtù della loro coesistenza, nel senso che le linee saranno deformate come se venissero spinte verso il difuori da azioni esercitantisi nella regione intermedia alle due sfere, onde la forma delle linee stesse risulterà come è indicato nella seguente figura 11.

La simmetria sarà mantenuta rapporto ai due assi $x$ e $y$ anche se le masse delle due sfere saranno disuguali fra loro.

Queste linee corrispondono, come abbiamo veduto, alle linee d'incremento delle forze newtoniane, e perciò rappresentano le linee di flusso dell'energia.

www.rcin.org.pl

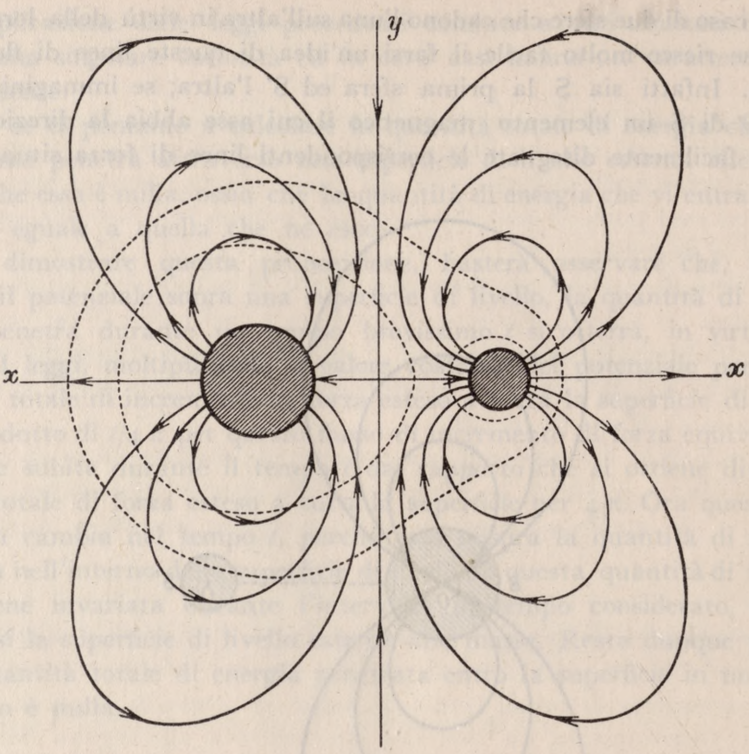


Fig. 11.

La figura rappresenta le sezioni delle due sfere di massa 1 e 8 con un piano passante pei centri. Le linee continue munite di frecce rappresentano le linee ed il verso secondo cui fluisce la energia. – Le linee tratteggiate rappresentano profili di superficie di livello, attraverso le quali la quantità di energia che entra è eguale a quella che esce.

Il caso del moto così detto non perturbato, allorché l'eccentricità delle orbite è trascurabile, ossia il caso di due corpi che si attirano colla legge di NEWTON, girando l'uno attorno all'altro secondo traiettorie circolari, conduce pure a dei risultati semplici, giacché approssimativamente il flusso di energia può ottenersi in ogni punto, sufficientemente lontano dai due corpi, componendo un vettore ruotante in un piano parallelo al piano invariabile con due vettori ruotanti in senso inverso in un piano normale, essendo la velocità di rotazione di ciascuno doppia di quella con cui l'un corpo gira attorno all'altro (vedi la fig. 12).

Ma è inutile il moltiplicare gli esempii: bastano quelli che vennero esposti per dare un'idea delle applicazioni delle leggi trovate.

Dirò solo che molte e molte questioni si affollano ed aspettano una risposta. Ed esse si presentano tanto spontaneamente che è quasi superfluo l'indicarle. I risultati ottenuti non costituiscono, io credo, che un primo passo in una lunga via da percorrere.

Non l'esame dei soli fenomeni meccanici o degli elettrici o calorifici, ciascuno dei quali considerato distintamente, deve costituire lo studio defi-

www.rcin.org.pl

nitivo del problema del flusso di energia; bensì un esame complessivo dei varii fenomeni che in natura non avvengono separatamente, ma in un me-

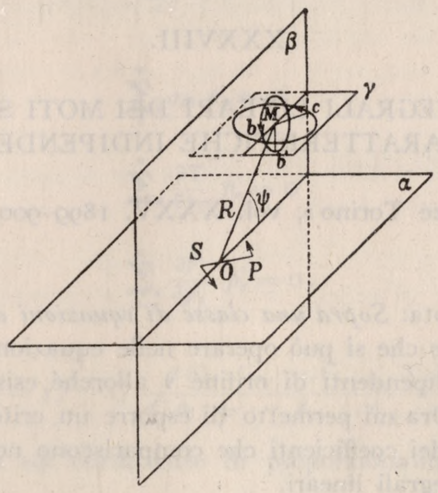


Fig. 12.

P ed S sono i due corpi che ruotano l'uno attorno all'altro nel piano invariabile $\alpha$; O il loro baricentro. Il flusso di energia in M è risultante dei tre vettori M*c*, M*b*, M*b'*; il primo dei quali ruota nel piano $\gamma$ parallelo al piano invariabile e gli altri due ruotano in senso inverso nel piano $\beta$ condotto per MO normalmente al piano invariabile. $Mb = Mb' = 5\,Mc \cos\psi/4$ e M*c* è in ragione inversa della quinta potenza di MO e proporzionale al cos $\psi$.

desimo tempo, onde risulti, come concetto che tutti li domina ed abbraccia, quello di un flusso di energia percorrente lo spazio infinito e penetrante ogni più intima molecola il quale ne colleghi l'andamento, e togliendo le apparenti discontinuità, stabilisca un nesso nella infinita molteplicità delle apparenze loro.

www.rcin.org.pl